

Chuyên đề
Bồi dưỡng
Học sinh giỏi

TUYỂN TẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ HAY VÀ KHÓ

Lời giới thiệu

Có lẽ trong những năm gần đây, phương trình và hệ phương trình đã đi dần vào quên lãng khi hình thức thi trắc nghiệm được áp dụng. Tuy nhiên với các kì thi học sinh giỏi thì dạng toán này vẫn còn chỗ đứng nhất định. Nhưng chắc hẳn bạn đọc cũng đã biết được rằng: đây là chủ đề đã được nhiều tác giả đề cập tới, với rất nhiều những dạng toán gần như bao phủ hết các vấn đề cơ bản của mảng kiến thức này. Vì thế điều mà chúng tôi suy nghĩ và trăn trở, là làm sao để cuốn sách này có một chất riêng, một sự mới lạ và sáng tạo trong từng bài toán. Chúng tôi sẽ đề cập tới những phương pháp hướng tư duy và phương thức sử dụng chúng sẽ vô cùng biến tấu và độc đáo. Với các bạn mới bước vào ngôi trường chuyên, và các bạn yêu thích môn toán thì quyển sách sẽ có ích cho các bạn rất nhiều. Cuốn sách phù hợp với những ai muốn tăng khả năng tư duy giải toán của mình và rèn luyện để ôn thi học sinh giỏi. Đó là lời chúng tôi muốn dành cho độc giả trước khi bắt đầu đọc cuốn sách này. Nội dung quyển sách gồm 7 chương.

- **Chương 1.** Phương trình đại số cơ bản.
- **Chương 2.** Phương pháp lượng giác hóa.
- **Chương 3.** Ứng dụng số phức giải hệ phương trình.
- **Chương 4.** Phương pháp hàm số.
- **Chương 5.** Các bài toán chứa tham số.
- **Chương 6.** Phương pháp bất đẳng thức.
- **Chương 7.** Hệ phương trình nhiều ẩn.

Dù đã cố gắng hết sức trong quá trình biên soạn nhưng không thể tránh khỏi những sai sót nhất định. Chúng tôi xin cảm ơn và mong nhận được sự góp ý chân thành từ phía bạn đọc để cuốn sách ngày một được hoàn thiện hơn. Cuối cùng xin gửi lời cảm ơn bạn đọc đã tin tưởng và ủng hộ nhóm tác giả chúng tôi.

Nhóm tác giả

Nguyễn Minh Tuấn – Nguyễn Trường Phát – Nguyễn Hoàng Mai Anh – Đinh Quốc Khánh

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ CƠ BẢN	1
A. LỊCH SỬ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3	1
B. CÔNG THỨC GIẢI NGHIỆM TỔNG QUÁT	4
C. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3	7
D. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4	9
CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA	21
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN	21
B. CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA	22
CHƯƠNG 3. SỬ DỤNG SỐ PHỨC GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH	50
A. SỐ PHỨC LÀ GÌ	50
B. SỬ DỤNG SỐ PHỨC GIẢI MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH	53
CHƯƠNG 4. PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ	70
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	70
PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HÀM ĐƠN ĐIỀU	70
PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG	92
CÁC BÀI TOÁN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH	113
CHƯƠNG 5. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI THAM SỐ	146
A. PHẦN PHƯƠNG TRÌNH	146
I. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐẠO HÀM	146
II. PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC	180
III. ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ	183
B. PHẦN HỆ PHƯƠNG TRÌNH	195
CHƯƠNG 6. SỬ DỤNG ĐÁNH GIÁ BẤT ĐẲNG THỨC	229
I. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH	231
ĐÁNH GIÁ MIỀN NGHIỆM	231
KỸ THUẬT ĐÁNH GIÁ THEO CỤM	240
ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP VECTOR	246
SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN	249
II. CÁC BÀI TOÁN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH	324
MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC ĐỐI XỨNG 2 BIẾN	324
KỸ THUẬT TĂNG GIẢM SOS	365
CHƯƠNG 7. CÁC BÀI TOÁN HỆ PHƯƠNG TRÌNH NHIỀU ẨN	372
I. HỆ HOÁN VỊ VÒNG QUANH	372
II. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC	440

Chương

1

Phương trình đại số cơ bản

A. Lịch sử phương trình bậc 3.

Nhiều học sinh THPT ngày nay có lẽ đã đều biết về công thức Cardano – công thức tính nghiệm của một phương trình bậc ba tổng quát. Thế nhưng, liệu có ai trong chúng ta biết rằng đằng sau công thức vừa phức tạp, vừa thú vị đó, là cả một câu chuyện dài về những nhà toán học thời kì Phục Hưng? Và cái tên Cardano trong công thức thực tế không phải là người đã thực sự tìm ra cách giải quyết phương trình bậc ba khó nhằn đó? Hôm nay, hãy cùng chúng tôi xuôi ngược thời gian về nước Ý vào thế kỷ XVI, mà ẩn sau nó là cả một thiên truyện dài...

I. Cuộc thi tài ở đại học bologna.

Mở đầu bài viết này chúng ta sẽ nghe một câu chuyện, về nhà Toán học Niccolo Fontana (1499–1557) sống tại công quốc Venezia (nay là một thành phố của Italia) với biệt danh Tartaglia (kẻ nói lắp).



Niccolo Tartaglia (1499 – 1557)

Tartaglia trải qua một thời thơ ấu cực kì nặng nề, khi mới năm 13 tuổi, giặc Pháp đã tràn vào quê hương Brescia, giết đi người cha của ông và chém vào hàm và miệng của ông khi đang ăn nấu. Ông được mẹ tìm ra và chữa giúp ông bình phục, tuy vậy sau này vết thương ở vòm miệng đó đã khiến việc nói năng của ông gặp khó khăn suốt đời. Sau đó, mẹ mất, ông đã phải tự tìm đường kiếm sống, tự học vật lý và toán cũng như phát triển những đam mê cho mình. Tartaglia bắt đầu gây được tiếng vang khi là người Italia đầu tiên phiên dịch tác phẩm toán học vĩ đại mang tên “Cơ bản” của Euclid, từ

| Phương trình đại số cơ bản

tiếng Hy Lạp sang ngôn ngữ địa phương. Cùng với đó, ông cũng có nhiều công trình toán học cho riêng mình. Năm 1530, một nhà toán học đã thách Tartaglia giải quyết hai câu hỏi liên quan đến phương trình bậc 3, nhằm hạ uy tín ông:

- Tìm ra một số lập phương cùng với 3 lần bình phương thì bằng 5, tức giải phương trình $x^3 + 3x^2 = 5$
- Tìm ba số mà trong đó số thứ hai lớn hơn số thứ nhất 2 đơn vị và số thứ ba lớn hơn số thứ hai 2 đơn vị và tích của chúng bằng 1000, (hay giải $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$)

Tartaglia đã tìm ra nghiệm cả hai phương trình này, và càng trở nên nổi tiếng. Nhưng phải đến năm 1535, tại đại học Bologna cổ kính nổi tiếng ngày ấy về các cuộc thi Toán học, tên tuổi của Tartaglia mới thực sự vang danh.

Tartaglia bị vướng vào một cuộc thách đấu Toán học giải các phương trình bậc 3 khác nhau với nhóm môn đệ của Scipione del Ferro (nhà Toán học đã tìm ra cách giải một lớp phương trình bậc 3 đặc biệt). Bởi vì đến thời điểm ấy vẫn chưa có ai tìm ra được cách giải phương trình bậc 3 tổng quát nên cuộc thách đấu đã được sự quan tâm của cả giới Toán học Châu Âu thời bấy giờ. Cảm thấy hơi nao núng vì đối thủ quá tự tin và mình chỉ là người tự học, Tartaglia đã miệt mài suy nghĩ và trước kì thi 8 ngày ông đã tìm ra được cách giải tổng quát.

Vào ngày 22-2-1535, các nhà toán học và những người hâm mộ ở nhiều nước châu Âu kéo về thành phố Milan để dự cuộc thi tài. Mỗi bên sẽ ra cho đối phương 30 phương trình bậc 3 khác nhau và giải trong 2 giờ. Và bởi vì nhóm Ferro chỉ giải được một lớp các phương trình bậc 3 đặc biệt trong khi Tartaglia nắm giữ trong tay “Cửu âm chân kinh” do ông sáng tạo ra nên không có gì bất ngờ khi tỉ số trận quyết đấu là 30:0. Tartaglia trở nên rất nổi tiếng khắp Châu Âu sau thành công vang dội này. Tuy vậy, ông vẫn quyết giữ bí mật công thức của mình, và thậm chí còn sáng tác một bài thơ hàm ẩn công thức đó để gây khó khăn cho những kẻ khác có thể lấy cắp.

II . Cardano và tartaglia, ai là kẻ có lỗi?

“Tôi hứa với anh. Không, tôi sẽ làm hơn thế nữa. Tôi thề trước kinh Phúc Âm thiêng liêng sẽ giữ bí mật khám phá của anh. Nếu không, tôi không xứng đáng là một con chiên và một bậc quân tử. Liệu chúng ta có thể thỏa thuận việc này như những bậc quân tử hay không?”



Cardano, sinh ra là một đứa con ngoài giá thú, đã gặp phải rất nhiều khó khăn trong việc trở thành một thầy thuốc ở xã hội Ý bấy giờ. Ông cũng là một con bạc khát nước, đã từng xuất bản cuốn sách

đầu tiên về xác suất có hệ thống **Liber de ludo aleae** (sách về các trò cờ bạc), trong đó có cả những mảnh khốe gian lận. Tuy vậy, ông cũng là một con người yêu Toán, đã dày công nghiên cứu về cách giải phương trình bậc ba nhiều năm mà chưa có kết quả. Cho đến khi tiếng vang của Tartaglia đến tai Cardano, ông đã nhanh chóng tìm gặp Tartaglia và bằng khả năng thuyết phục của mình, ông đã khiến Tartaglia nói ra cách giải phương trình bậc ba. (Dĩ nhiên là dưới dạng bài thơ mật mã, tuy nhiên Cardano đã hiểu và mở rộng được phương pháp đó).

Cardano sau đó đã thuê một nhà toán học trẻ tên là Ludovico Ferrari làm trợ lí. Họ cùng nhau nghiên cứu toán học và làm việc, cùng nhau đã khám phá ra nhiều kiến thức mới. Sau đó, họ đã tìm kiếm ra phương pháp giải phương trình bậc ba của del Ferro (dù không đầy đủ bằng). Khi đó, Cardano cảm thấy mình không còn nghĩa vụ phải giữ lời hứa với Tartaglia nữa, và ông đã nuốt lời.

Ông đã công bố cách giải này trong một cuốn sách của mình: **Ars Magna (nghệ thuật vĩ đại hay các quy tắc đại số)** năm 1545 và mặc dù trong lời nói đầu của cuốn sách ông có xác nhận rằng cách giải này là của Tartaglia, giới Toán học dường như vẫn chỉ nhớ đến ông khi nhắc đến phát minh này. Cũng dễ hiểu là Tartaglia đã bị tổn thương như thế nào, ông đã công kích Cardano nhiều năm và buộc tội Cardano là kẻ trộm. Một cuộc tranh luận lớn nổ ra và cũng như lần trước Tartaglia gửi đến một lời thách đấu. Không may cho Tartaglia, lần này ông đã không ngờ rằng Lodovico Ferrari, một học trò tài ba của Cardano từ phương pháp được thầy mình truyền lại đã tìm ra được cách giải tổng quát cho phương trình bậc 4 cũng như hiểu thấu đáo phương trình bậc 3 hơn cả Tartaglia. Vì vậy, trong cuộc tranh luận đó Tartaglia đã thất bại cay đắng và mang nỗi uất hận trong lòng cho đến khi ông mất...



Lodovico Ferrari(1522-1565)

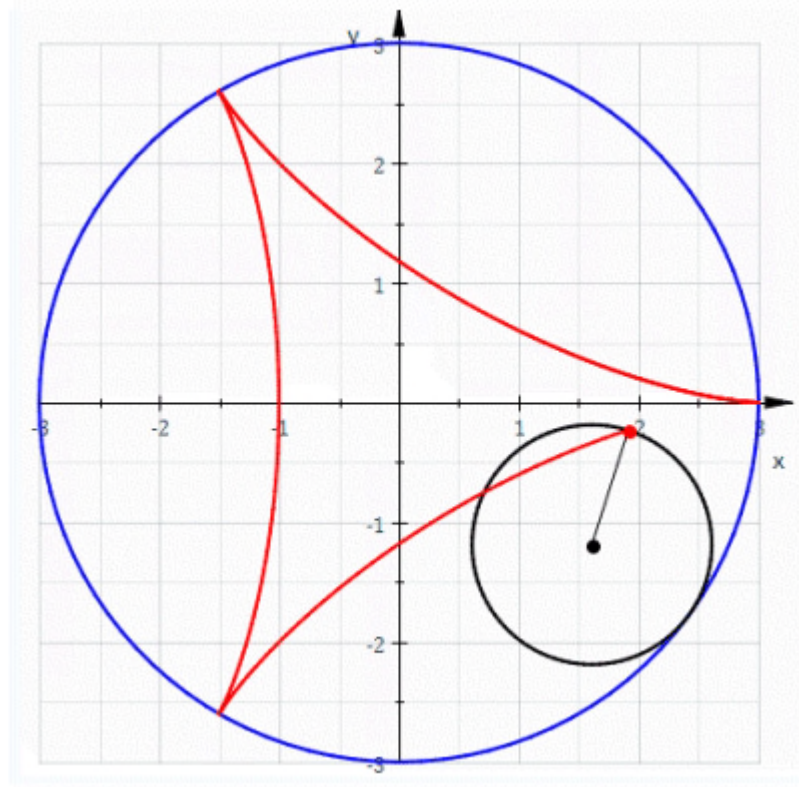
Liệu Tartaglia có công bằng không khi đã bôi nhọ thanh danh của Cardano trong nhiều năm và không chấp nhận lời ghi công trong cuốn sách xuất bản ấy, dù chính cuốn sách đó đã chính thức phổ biến một kiến thức cực kỳ quan trọng cho toán học của nhân loại? Và liệu Cardano có đáng bị chê trách không, khi đã tự rút đi lời hứa của mình mà không nói cho Tartaglia một lời nào?

III. Di sản.

Bất luận cuộc tranh cãi giữa các nhà toán học là thế nào, thì câu chuyện thú vị của thời Phục Hưng khó lường đã đem lại những kiến thức quý báu cho nhân loại. Trong đó, tiêu biểu nhất, là cách giải phương trình bậc 3 hay công thức Cardano – Tartaglia. Trong cách giải này, được xuất bản trong cuốn Ars Magna, cả Tartaglia, Cardano và Ferrari đều phải thừa nhận sự có mặt của số phức, bao gồm phần thực và phần ảo dưới dạng $a + bi$ ($i = \sqrt{-1}$) với một khái niệm mà phải đến những năm 1560, Rafael Bombelli mới đưa ra giải thích và sử dụng đầy đủ đầu tiên.

Lodovico Ferrari, như đã nói, khi tìm hiểu công thức của Tartaglia đã tự khám phá ra cách giải phương trình bậc bốn cho riêng mình và cũng đã công bố nó trong cuốn sách của Cardano. Và đây cũng được cho là phương trình bậc cao nhất có thể được giải ở dạng tổng quát (mặc dù điều đó chỉ bắt đầu được giả thuyết hàng thế kỉ sau phát kiến của Ferrari).

Cardano, ngoài những công trình về xác suất và phương trình của mình, cũng là người đầu tiên đưa ra khái niệm đường hypocycloid – đường cong được vẽ bởi một điểm trên đường tròn đơn vị đang chuyển động lăn trên đường tròn lớn khác. Và đường tròn lớn đó đã được đặt tên là đường tròn Cardano.



Đường tròn Cardano và đường hypocycloid (màu đỏ)

B. Công thức giải nghiệm tổng quát.

1. Công thức 1.

Sưu tầm từ vietnamcasioerteam.blogspot.com do Lâm Hữu Minh biên soạn.

Xét phương trình tổng quát có dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Đặt $y = x + \frac{b}{3a}$ đưa phương trình về dạng $y^3 + py + q = 0$.

Đến đây có 2 cách làm:

- **Cách 1:** Áp dụng công thức Cardano – Tartaglia:

Đặt $u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ ta được nghiệm thực $x = \frac{p}{3u} - u - \frac{b}{3a}$

- **Cách 2:** Lượng giác hóa: Đặt tiếp $y = kt (k > 0)$, phương trình trở thành: $k^3 t^3 + p k t + q = 0$.

Nếu $p > 0$ ta chọn k sao cho $\frac{k^2}{4} = \frac{p}{3}$, ngược lại $p < 0$ thì $\frac{k^2}{4} = -\frac{p}{3}$, đưa phương trình về dạng $4t^3 \pm 3t = q'$. Đến đây xảy ra 2 trường hợp:

1. **Trường hợp 1.** Với $4t^3 - 3t = q'$, nếu $|q'| \leq 1$ ta đặt $t = \cos \varphi$, phương trình về dạng lượng giác $\cos 3\varphi = q'$. Còn ngược lại, ta giải phương trình $r^6 - 2q'r^3 + 1 = 0$ tìm r , khi đó ta thu được nghiệm $t = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right)$ cũng là nghiệm duy nhất.
2. **Trường hợp 2.** Với $4t^3 + 3t = q'$, ta chỉ có thể tìm r thông qua phương trình $r^6 - 2q'r^3 - 1 = 0$, khi đó $t = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$ cũng là nghiệm duy nhất.

Tuy là dài như vậy, các bạn chỉ cần nhớ cho mình các công thức sau đây:

Đầu tiên, ta đặt $\Delta = b^2 - 3ac$ và $k = \frac{9abc - 2b^3 - 27a^2d^2}{2\sqrt{|\Delta^3|}}$, ta được:

- Nếu $\Delta > 0$

$$+ \text{ Với } |k| \leq 1, \text{ phương trình có 3 nghiệm như sau } \begin{cases} x_1 = \frac{2\sqrt{\Delta} \cos \frac{\arccos k}{3} - b}{3a} \\ x_2 = \frac{2\sqrt{\Delta} \cos \left(\frac{\arccos k}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) - b}{3a} \\ x_3 = \frac{2\sqrt{\Delta} \cos \left(\frac{\arccos k}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) - b}{3a} \end{cases}$$

+ Với $|k| > 1$, phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{|k|\sqrt{\Delta}}{3ak} \left(\sqrt[3]{|k^2| + \sqrt{k^2 - 1}} + \sqrt[3]{|k^2| - \sqrt{k^2 - 1}} \right) - \frac{b}{3a}$$

- Nếu $\Delta = 0$, phương trình có 1 nghiệm bội $x = \frac{-b + \sqrt[3]{b^3 - 27a^2d}}{3a}$.

- Nếu $\Delta < 0$, phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{3a} \left(\sqrt[3]{k + \sqrt{k^2 + 1}} + \sqrt[3]{k - \sqrt{k^2 + 1}} \right) - \frac{b}{3a}$$

2. Công thức 2.

Sưu tầm từ Bùi Thế Việt.

Xét phương trình tổng quát: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

| Phương trình đại số cơ bản

Đặt $x = y - \frac{a}{3}$ ta được phương trình mới là $y^3 + \left(b - \frac{a^3}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$

Nếu đặt $y = u + v$ thì ta được

$$y^3 + \left(b - \frac{a^3}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0 \Leftrightarrow \left(u^3 + v^3 + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) + (u+v)\left(3uv - \frac{a^2}{3} + b\right) = 0$$

Ta chọn u, v sao cho:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0 \\ 3uv - \frac{a^2}{3} + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{a}{3} + \frac{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}}{6}, \text{ Với } \begin{cases} mn = 64(a^2 - 3b)^3 \\ m + n = -16a^3 + 72ab - 216c \end{cases}$$

Còn nếu đặt $y = k \cos t$ thì ta được

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0 \Leftrightarrow k^3 \cos^3 t + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)k \cos t + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

Ta chọn k sao cho: $\frac{k^3}{\left(b - \frac{a^2}{3}\right)k} = -\frac{4}{3} \Rightarrow k = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$

Từ đó ta biến đổi: $k^3 \cos^3 t + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)k \cos t + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0 \Leftrightarrow k^3 \cos(3t) + \frac{8a^3}{27} - \frac{4ab}{3} + 4c = 0$

Từ đây ta có thể suy ra nghiệm của phương trình là:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{2a^2 - 9ab + 27c}{2(\sqrt{a^2 - 3b})^3} \right) \right) - \frac{a}{3} \\ x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{2a^2 - 9ab + 27c}{2(\sqrt{a^2 - 3b})^3} \right) + \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{a}{3} \\ x_3 = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{2a^2 - 9ab + 27c}{2(\sqrt{a^2 - 3b})^3} \right) - \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{a}{3} \end{cases}$$

Tất nhiên là trong các bài toán giải phương trình bình thường sẽ hầu như không cho vào phương trình bậc 3 tổng quát mà không có đặc điểm nào đặc biệt cả, và ta cũng không cần thiết phải sử dụng đến công thức tổng quát nếu gặp phương trình bậc 3 trong đề thi. Do đó chúng ta hãy cùng tìm hiểu các bài toán về phương trình bậc cao dưới đây để có thêm cách nhìn và xử lý lớp bài toán này!

C. Các bài toán về phương trình bậc 3.

PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $4x^3 + 3x = m$

Phương pháp giải. Xét hàm số $f(x) = 4x^3 + 3x$ có $f'(x) = 12x^2 + 3 > 0$, vậy phương trình đầu có tối đa một nghiệm.

$$\text{Khi đó ta đặt } m = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right) \Leftrightarrow a^3 = m \pm \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{m \pm \sqrt{m^2 + 1}}$$

$$\text{Chọn } a = \sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} \Rightarrow \frac{1}{a} = -\sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}}$$

$$\text{Khi đó } 4 \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right]^3 + 3 \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right)$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}} \right) \text{ là nghiệm duy nhất!}$$

Sau đây chúng ta sẽ cùng đi vào các ví dụ cụ thể!

Câu 1: Giải phương trình $4x^3 + 3x = 1$

Giải

Xét hàm số $f(x) = 4x^3 + 3x - 1$ có $f'(x) = 12x^2 + 3 > 0$ nên phương trình đã cho có tối đa một nghiệm.

$$\text{Đặt } 1 = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right) \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{1 \pm \sqrt{2}} \text{ chọn } a = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{a} = -\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$$

$$\text{Khi đó } 4 \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right]^3 + 3 \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right)$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm duy nhất } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \right)$$

PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $4x^3 - 3x = m(*)$

Phương pháp giải.

- Trường hợp 1. $|m| \leq 1$

$$\text{Đặt } m = \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \text{ trong đó } a = \pm \frac{\arccos(m)}{3}$$

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4x^3 - 3x &= 4\cos^3 a - 3\cos a \\ \Leftrightarrow 4(x^3 - \cos^3 a) - 3(x - \cos a) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - \cos a)(4x^2 + 4x\cos a + 4\cos^2 a - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos a \\ 4x^2 + 4x\cos a + 4\cos^2 a - 3 = 0(*) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải phương trình $(*)$ ta có

$$\Delta' = 4\cos^2 a - 4(4\cos^2 a - 3) = 12(1 - \cos^2 a) = 12\sin^2 a > 0$$

Vậy phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt là

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2\cos a + 2\sqrt{3}\sin a}{4} = -\left(\frac{\cos a}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin a}{2}\right) = -\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(a - \frac{2\pi}{3}\right) \\ x_2 = \frac{-2\cos a - 2\sqrt{3}\sin a}{4} = -\left(\frac{\cos a}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin a}{2}\right) = -\cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

- Trường hợp 2. $|m| > 1$

$$\text{Đặt } m = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) \Leftrightarrow a^3 = m \pm \sqrt{m^2 - 1} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{m \pm \sqrt{m^2 - 1}}$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} \Rightarrow \frac{1}{a} = \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}}$$

$$\text{Khi đó } 4\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^3 - 3\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$$

$$\text{Do đó } x_0 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}}\right) \text{ là một nghiệm của } (*)$$

Ta sẽ đi chứng minh x_0 là nghiệm duy nhất của $(*)$, thật vậy ta có

$$\begin{aligned} 4x^3 - 3x &= 4x_0^3 - 3x_0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)(4x^2 + 4x_0 \cdot x + 4x_0^2 - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = x_0 \left(\text{do } (2x + x_0)^2 + 3(x_0^2 - 1) > 0, \forall x_0^2 > 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}}\right) \text{ là nghiệm duy nhất của phương trình } (*)$$

Sau đây chúng ta sẽ cùng đi vào các ví dụ cụ thể!

Câu 2: Giải phương trình $8x^3 - 6x = \sqrt{3}$

Giải

Ta thấy rằng $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ nên phương trình viết lại thành

$$\begin{aligned} 4x^3 - 3x &= \cos \frac{\pi}{6} = 4\cos^3 \frac{\pi}{18} - 3\cos \frac{\pi}{18} \\ &\Leftrightarrow \left(x - \cos \frac{\pi}{18}\right) \left(4x^2 + 4\cos \frac{\pi}{18} \cdot x + \cos^2 \frac{\pi}{18} - 3\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \cos \frac{\pi}{18} \vee \cos \frac{11\pi}{18} \vee \cos \frac{13\pi}{18} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \cos \frac{\pi}{18}; \cos \frac{11\pi}{18}; \cos \frac{13\pi}{18} \right\}$.

Câu 3: Giải phương trình $4x^3 - 3x = 2$

Giải

$$\text{Đặt } 2 = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{3}} \text{ chọn } a = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{a} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$$

$$\text{Khi đó } 4\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^3 - 3\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$$

Do đó $x_0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}\right)$ là một nghiệm duy nhất của phương trình.

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x &= 4x_0^3 - 3x_0 \\ \Leftrightarrow (x - x_0)(4x^2 + 4x_0 \cdot x + 4x_0^2 - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = x_0 \left(do(2x + x_0)^2 + 3(x_0^2 - 1) > 0, \forall x_0^2 > 1 \right)\end{aligned}$$

Nên x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình!

PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $x^3 + px = n$

Phương pháp giải.

- Nếu $p = 0$ khi đó phương trình có nghiệm $x = \sqrt[3]{n}$
- Nếu $p \neq 0$ thì ta đặt $x = at$, khi đó thế vào phương trình đầu ta được

$$a^3 \cdot t^3 + pa \cdot t = n \Leftrightarrow t^3 + \frac{p}{a^2} \cdot t = \frac{n}{a^3} (*)$$

Bây giờ ta sẽ nghĩ cách đặt để đưa phương trình trên về dạng 2 phương trình ta đã tìm hiểu.

Khi đó để đưa về dạng đầu ta buộc phải có $\frac{p}{a^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$. Từ đó ta có cách đặt sau để đưa về dạng phương trình đã biết

- Khi $p > 0$ ta đặt $x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot t$ thì phương trình trở thành $4t^3 + 3t = m$
- Khi $p < 0$ ta đặt $x = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot t$ thì phương trình trở thành $4t^3 - 3t = m$

Sau đây chúng ta sẽ cùng đi vào các ví dụ cụ thể!

Câu 4: Giải phương trình $x^3 + 27x = 27$

Giải

Đặt $x = 6t$ ta được $216t^3 + 162t = 27 \Leftrightarrow 4t^3 + 3t = \frac{1}{2} (1)$

Dễ thấy phương trình có nghiệm duy nhất. Đặt $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right) \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$

Chọn $a = \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \frac{1}{a} = -\sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$ khi đó $4 \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right]^3 + 3 \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right)$

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}} \right)$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3 \left(\sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}} \right)$

Kết luận. Vậy ta đã tìm hiểu các dạng toán phương trình bậc 3 đặc biệt, ngoài các dạng toán này ra ta sẽ phải dùng phương pháp tổng quát để giải.

D. Các bài toán về phương trình bậc 4.

Phương trình bậc bốn tổng quát có dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Phương trình đa thức này luôn luôn có thể giải được, tuy nhiên cách giải tổng quát rất phức tạp, vậy nên khi giải phương trình bậc bốn ta cần quan sát xem điểm đặc biệt của phương trình là gì để có thể tìm ra lời giải đẹp nhất nhé!

I. Các dạng phương trình bậc 4 đặc biệt.

PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Phương pháp giải.

Đây là dạng phương trình đa thức bậc bốn khá dễ ta chỉ cần đặt $x^2 = t$ với $t \geq 0$ là ta có thể đưa phương trình bậc bốn này về phương trình bậc 2.

Sau đây chúng ta sẽ cùng đi vào các ví dụ cụ thể!

Câu 1: Giải phương trình $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (1)

Giải

Cách 1. Đặt $t = x^2 \Rightarrow t \geq 0$ phương trình (1) có dạng $t^2 - 13t + 36 = 0$

$$\text{Ta có } \Delta = 13^2 - 4.36 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{13+5}{2} = 9 \\ t_2 = \frac{13-5}{2} = 4 \end{cases}$$

- Với $t_1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$
- Với $t_2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm : $x_1 = -2$; $x_2 = -3$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$.

Cách 2. Biến đổi phương trình tương đương

$$\begin{aligned} x^4 - 13x^2 + 36 = 0 &\Leftrightarrow (x^4 - 12x^2 + 36) - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 6)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6 - x)(x^2 - 6 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6 - x = 0 \\ x^2 - 6 + x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Giải 2 phương trình trên ta được 4 nghiệm

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x_1 = -3$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$.

PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$

Trước khi ta bước vào phương pháp giải loại phương trình này chúng ta sẽ cùng biến đổi phương trình trùng phương một chút nhé!

Từ phương trình $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$ ta đặt $x = t - 4$ ta thu được một phương trình mới ở như sau

$$\begin{aligned} (t-4)^4 + 6(t-4)^2 - 40 &= 0 \\ &\Leftrightarrow t^4 - 16t^3 + 102t^2 - 304t + 312 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2t^4 - 2.16t^3 + 2.102t^2 - 2.304t + 2.312 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t^4 - 12t^3 + 54t^2 - 108t + 81) + (t^4 - 20t^3 + 150t^2 - 500t + 625) = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-3)^4 + (t-5)^4 = 82 \end{aligned}$$

Bạn thấy đó chỉ qua 1 phép đặt tôi đã có thể đưa được phương trình trùng phương về dạng $(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$. Điều đó đặt ra một câu hỏi phải chăng là cách giải của dạng $(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$ là ta biến đổi đưa về phương trình trùng phương để giải ? Ngay sau đây tôi sẽ trình bày phương pháp giải của dạng phương trình trên đây

Phương pháp giải.

Đây là dạng phương trình đa thức bậc bốn khá dễ ta chỉ cần đặt $x^2 = t$ với $t \geq 0$ là ta có thể đưa phương trình bậc bốn này về phương trình bậc 2.

Ta đặt $k = x - \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow x = k + \frac{a+b}{2}$ Giờ ta sẽ thay vào và thu được một phương trình mới ẩn là k như

$$\text{sau } \left(k + \frac{a+b}{2} - a\right)^4 + \left(k + \frac{a+b}{2} - b\right)^4 = c \Leftrightarrow \left(k + \frac{b-a}{2}\right)^4 + \left(k + \frac{a-b}{2}\right)^4 = c$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left[k^4 + 4k^3 \left(\frac{b-a}{2} \right) + 6k^2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + 4k \left(\frac{b-a}{2} \right)^3 + b^4 \right] \\
 &+ \left[k^4 + 4k^3 \left(\frac{a-b}{2} \right) + 6k^2 \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + 4k \left(\frac{a-b}{2} \right)^3 + b^4 \right] = c \\
 &\Leftrightarrow 2k^4 + 4k^3 \left(\frac{b-a}{2} + \frac{a-b}{2} \right) + 6k^2 \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right] + 4k \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^3 + \left(\frac{a-b}{2} \right)^3 \right] + 2b^4 = c \\
 &\Leftrightarrow 2k^4 + 6k^2 \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right] + 2b^4 = c \\
 &\Leftrightarrow 2k^4 + 6k^2 \left[\frac{(a-b)^2 + (b-a)^2}{4} \right] + 2b^4 = c \\
 &\Leftrightarrow 2k^4 + 6k^2 \left[\frac{a^2 + b^2}{2} \right] + 2b^4 = c \Leftrightarrow 2k^4 + 3k^2(a^2 + b^2) + 2b^4 = c
 \end{aligned}$$

Như vậy là ta đã đưa được về phương trình trùng phương ẩn k

Khi đưa được về phương trình trùng phương rồi thì bài toán sẽ rất đơn giản và giải như phần 1 ở trên.

Giờ chúng ta sẽ cùng đến với một số ví dụ nhé !

Câu 2: Giải phương trình $(x-3)^4 + (x-5)^4 = 82$ (*)

Giải

Xác định hệ số a,b ta có $a=3, b=5$. Ta đặt $x=t+4$ thay vào phương trình $(x-3)^4 + (x-5)^4 = 82$ ta được một phương trình mới ẩn t như sau

$$(t+4-3)^4 + (t+4-5)^4 = 82 \Leftrightarrow (t+1)^4 + (t-1)^4 = 82$$

Ta khai triển đa thức trên ra thu được $2x^4 + 12x^2 - 80 = 0$ (*). Đến đây ta đặt $x^2 = k$ với mọi $k \geq 0$.

Phương trình (*) trở thành $2k^2 + 12k - 80 = 0$.

Đến đây ta giải phương trình bậc 2. Lời giải tiếp theo tôi dành cho bạn đọc.

Vậy phương trình có nghiệm $x=2, x=6$

Lưu ý. Ta có 2 đẳng thức sau
$$\begin{cases} (a+b)^4 = a^4 + 4a^3.b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3.b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \end{cases}$$

Câu 3: Giải phương trình $(x+2)^4 + (x+8)^4 = 272$ (*)

Giải

Xác định hệ số a,b ta được $a=-2, b=-8$

Đặt $x=k-5$. Phương trình (*) trở thành

$$\begin{aligned}
 &(k-5+2)^4 + (k-5+8)^4 = 272 \\
 &\Leftrightarrow (k-3)^4 + (k+3)^4 = 272 \\
 &\Leftrightarrow k^4 - 4k^3.3 + 6k^2.3^2 - 4k.3^3 + 3^4 + k^4 + 4k^3.3 + 6k^2.3^2 + 4k.3^3 + 3^4 = 272 \\
 &\Leftrightarrow 2k^4 + 12k^2.9 + 3^4 + 3^4 = 272 \\
 &\Leftrightarrow 2k^4 + 12k^2.9 + 3^4 + 3^4 = 272 \\
 &\Leftrightarrow 2k^4 + 108k^2 + 162 = 272 \\
 &\Leftrightarrow 2k^4 + 108k^2 - 110 = 0(**)
 \end{aligned}$$

| Phương trình đại số cơ bản

Đặt $k^2 = t$, phương trình $(**)$ trở thành $2t^2 + 108t - 110 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -55(L) \end{cases}$

Vậy $k^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} x = 6 \\ x = 4 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 6, x = 4$

Lưu ý. Khi đặt $x = k + \frac{a+b}{2}$ ta nhớ xác định đúng hệ số a, b. Nếu xác định sai thì ta không thể giải được bài toán trên.

Các bài toán tương tự.

Bài 1: Giải phương trình: $(x-5)^4 + (x-7)^4 = 2$

Bài 2: Giải phương trình: $(x+3)^4 + (x-1)^4 = 1$

Bài 3: Giải phương trình: $(x-9)^4 + (x-15)^4 = 30962$

Bài 4: Giải phương trình: $(x-9)^4 + (x-5)^4 = 4352$

Bài 5: Giải phương trình: $(x+2)^4 + (x+8)^4 = 272$

Bài 6: Giải phương trình: $(x+\sqrt{2})^4 + (x+1)^4 = 33 + 12\sqrt{2}$

Bài 7: Giải phương trình: $(x+10)^4 + (x-4)^4 = 28562$

Bài 8: Giải phương trình: $(x+1)^4 + (x-3)^4 = 90$

Chú ý. Chắc hẳn sau khi các bạn học và làm quen dạng này thì sẽ thắc mắc một câu hỏi “Vì sao lại nghĩ được cách đặt như vậy”. Rất đơn giản thôi. Ta cần đặt y bằng bao nhiêu sao cho thỏa mãn hệ điều kiện sau

$$\begin{cases} x-a=y+\alpha \\ x-b=y+\alpha \end{cases} \Rightarrow 2x-a-b=2y \Rightarrow y=x-\frac{a+b}{2} \Rightarrow x=y+\frac{a+b}{2}$$

PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ với $a+d=b+c$

Phương pháp giải.

Ta đặt $u=(x+a)(x+d)$ hoặc $u=(x+b)(x+c)$ để đưa về phương trình bậc hai, sau khi đặt phương trình sẽ đưa về dạng như sau

$$\begin{aligned} (x+a)(x+b)(x+c)(x+d) &= m \Leftrightarrow u.(x+b)(x+c) = m \\ &\Leftrightarrow u.(x^2 + bx + cx + bc) = m \Leftrightarrow u.(x^2 + (b+c)x + bc) = m \quad (*) \end{aligned}$$

Mà $a+d=b+c$ nên $(*) \Leftrightarrow u(u-ad+bc) = m \Leftrightarrow u^2 + (bc-ad)u - m = 0$

Đến đây ta chỉ việc giải phương trình bậc 2 để tìm nghiệm, sau khi tìm nghiệm u xong ta tìm ngược lại x và kiểm tra nghiệm.

Giờ chúng ta cùng đến với một số ví dụ về dạng toán này nhé!

Câu 4: Giải phương trình $(x-5)(x+6)(x-7)(x+4)=504$

Giải

Ta đặt $u=(x-5)(x+4)=x^2-x-20$

Phương trình trở thành $u^2-22u-504=0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (u+14)(u-36) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -14 \\ u = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 20 = -14 \\ x^2 - x - 20 = 36 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-3) = 0 \\ (x+7)(x-8) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; x = 3 \\ x = -7; x = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 5: Giải phương trình $(x-8)(x-10)(x+4)(x+2) = 1152$

Giải

Ta đặt $u = (x-8)(x+2) = x^2 - 6x - 16$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} u^2 - 24u - 1152 &= 0 \\ \Leftrightarrow (u+24)(u-48) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = -24 \\ u = 48 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x - 16 = -24 \\ x^2 - 6x - 16 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; x = 4 \\ x = 3 - \sqrt{73}; x = 3 + \sqrt{73} \end{cases} \end{aligned}$$

Các bài tập tương tự

Bài 1: Giải phương trình: $(x-6)(x-5)(x-4)(x-3) = 5.6.7.8$

Bài 2: Giải phương trình: $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) = 360$

Bài 3: Giải phương trình: $(x+2)(x+3)(x-7)(x-8) = 144$

Bài 4: Giải phương trình: $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35$

Bài 5: Giải phương trình: $(4x+3)^2(x+1)(2x+1) = 810$

PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$

Đây cũng là một dạng phương trình đặc biệt trong chuỗi các dạng phương trình bậc 4. Cách giải dạng phương trình này cũng rất độc đáo, giờ chúng ta sẽ đi tìm hiểu nhé!

Phương pháp giải

Đầu tiên ta xét $x=0$ không là nghiệm của phương trình và ta chỉ xét phương trình này khi c khác 0.

Tiếp theo ta chia cả 2 vế cho x^2 ta được phương trình như sau

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(ax^2 + \frac{e}{x^2}\right) + \left(bx + \frac{d}{x}\right) + c &= 0 \\ \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{e}{ax^2}\right) + \left(bx + \frac{d}{x}\right) + c &= 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{e}{ax^2}\right) + b\left(x + \frac{d}{bx}\right) + c = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Giờ ta đặt $t = x + \frac{d}{bx}$ chú ý thấy $t^2 = x^2 + \frac{d^2}{b^2x^2} + \frac{2d}{b}$ nên ta có thể quy phương trình trên thành phương trình bậc 2 ẩn t và dễ dàng có thể giải được.

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow a\left(t^2 - \frac{2d}{b}\right) + bt + c = 0 \\ &\Leftrightarrow at^2 - a \cdot \frac{4dt}{b} + \frac{4d^2}{b^2} + bt + c = 0 \Leftrightarrow at^2 - \left(\frac{4ad}{b} + b\right)t + c = 0 \end{aligned}$$

Đến giờ đã được phương trình bậc 2, độc giả hoàn toàn có thể dễ dàng giải chúng, tôi xin dành lại phần này cho độc giả làm nốt.

Giờ chúng ta cùng đến với một số ví dụ về dạng toán này nhé!

Câu 6: Giải phương trình $x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 6x + 4 = 0$

Giải

| Phương trình đại số cơ bản

Ta nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên ta chia cả 2 vế cho x^2 ta được

$$x^2 + 3x - 6 + \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{2}{x}\right) - 6 = 0$$

Ta đặt $t = x + \frac{2}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} + 4$ Thay vào phương trình trên ta được

$$t^2 - 4 + 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ta thấy $t^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} + 4 \Rightarrow t^2 > 4 \Rightarrow |t| > 2$ nên ta chỉ lấy trường hợp $t = -5$

$$\text{Suy ra } x + \frac{2}{x} = -5 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Câu 7: Giải phương trình $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 24x + 9 = 0$ (1)

Giải

Cách 1.

Ta sẽ làm theo cách đặt ẩn phụ trên, như vậy ta có lời giải như sau

$$(1) \Leftrightarrow (x^4 + 9 + 6x^2) - 8x(x^2 + 3) + 16x^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow [(x^2 + 3) - 4x]^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = x \\ x^2 - 4x + 3 = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 3 = 0 \\ x^2 - 3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Cách 2. Biến đổi phương trình ta được

$$(x^4 + 6x^2 + 9) - 8x(x^2 + 3) + 15x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)^2 - 8x(x^2 + 3) + 15x^2$$

Ta đặt $y = x^2 + 3$, thay vào phương trình 1 ta được

$$y^2 - 8xy + 15x^2 = 0 \Leftrightarrow (y - 3x)(y - 5x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ y = 5x \end{cases}$$

Với $y = 3x$, ta có $x^2 + 3 = 3x$ Suy ra phương trình vô nghiệm

$$\text{Với } y = 5x, \text{ ta có } x^2 + 3 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm là } S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right\}$$

Chú ý. Bạn thấy đó 2 cách này đều có cái hay riêng của nó, cách một có thể giải ra luôn mà không cần thông qua ẩn phụ, cách thứ 2 tuy rằng phải đặt ẩn phụ nhưng trong quá trình tính toán sẽ ít bị sai sót hơn rất nhiều.

Bài tập tương tự

1) $x^4 - 13x^3 + 46x^2 - 39x + 9 = 0$;

2) $2x^4 + 3x^3 - 27x^2 + 6x + 8 = 0$

3) $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$;

4) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$

PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = ex^2, ad=bc=m$

Phương pháp giải. Phương pháp giải dạng toán này cũng rất là phong phú ở đây tôi sẽ trình bày 2 cách như sau

- **Cách 1.** Ta sẽ đưa phương trình về dạng 2 bình phương bằng nhau $A^2 = B^2$

$$\Leftrightarrow (x^2 + px + m)(x^2 + nx + m) = ex^2 (ad = bc = m, p = a + d, n = b + c)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{p+n}{2}x + m - \frac{n-p}{2}x\right) \left(x^2 + \frac{p+n}{2}x + m + \frac{n-p}{2}x\right) = ex^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{p+n}{2}x + m\right)^2 = \left[\left(\frac{n-p}{2}\right)^2 + e\right]x^2$$

Ở dạng bình phương này ta hoàn toàn có thể giải nó một cách dễ dàng.

- **Cách 2.**

Trường hợp 1. Kiểm tra xem $x=0$ có là nghiệm của phương trình hay không

Trường hợp 2. Xét trường hợp $x \neq 0$

$$(*) \Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{x} + p\right) \left(x + \frac{m}{x} + n\right) = e$$

Đặt $u = x + \frac{m}{x}$. Phương trình trở thành $(u+p)(u+n) = e$

Đến đây ta giải phương trình bậc hai ẩn u , sau đó tìm x

Giờ chúng ta cùng đến với một số ví dụ về dạng toán này nhé!

Câu 8: Giải phương trình $(x+4)(x+6)(x-2)(x-12) = 25x^2$ (1)

Giải

Cách 1. Biến đổi phương trình tương đương

$$(x+4)(x+6)(x-2)(x-12) = 25x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 10x + 24)(x^2 - 14x + 24) = 25x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 24 + 12x)(x^2 - 2x + 24 - 12x) = 25x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 24)^2 = 169x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 24 = 13x \\ x^2 - 2x + 24 = -13x \end{cases}$$

Cách 2.

Ta có $(x+4)(x+6)(x-2)(x-12) = 25x^2 \Leftrightarrow (x^2 + 10x + 24)(x^2 - 14x + 24) = 25x^2$

Ta xét $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left(x + \frac{24}{x} + 10\right) \left(x + \frac{24}{x} - 14\right) = 25 \quad (2)$$

Đặt $y = x + \frac{24}{x} \Rightarrow |y| \geq 4\sqrt{6}$. Phương trình (2) trở thành

$$(y+10)(y-14) = 25 \Leftrightarrow (y+11)(y-15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -11 \\ y = 15 \end{cases}$$

Với $y = -11$ ta có $x + \frac{24}{x} = -11 \Leftrightarrow x^2 + 11x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -8 \end{cases}$

Với $y = 15$ ta có $y = 15x + \frac{24}{x} = 15 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{129}}{2}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{-3; -8; \frac{15 - \sqrt{129}}{2}; \frac{15 + \sqrt{129}}{2}\right\}$

PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $t^4 = \alpha t^2 + \beta t + \lambda$

Phương pháp giải. Giữ nguyên ý tưởng phương pháp giải phương trình dạng

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = ex^2, ad = bc = m$$

Ta sẽ có ý tưởng như sau

Đưa về dạng $A^2 = B^2$

- **Trường hợp 1.** $\Delta = \beta^2 - 4\alpha \cdot \lambda = 0$. Biến đổi về phải thành bình phương đúng
- **Trường hợp 2.** Δ khác 0 Ta sẽ giải quyết nó theo cách sau. Ta có

$$\begin{aligned} t^4 &= \left[(t^2 - m) + m \right]^2 = (t^2 - m)^2 + 2m(t^2 - m) + m^2 \\ &= (t^2 - m)^2 + 2mt^2 - m^2, \forall m \end{aligned}$$

Phương trình trở thành $(t^2 - m)^2 = (\alpha - 2m)t^2 + \beta t + \lambda + m^2$

Chú ý. Đến đây ta cần chọn m để vế phải của phương trình thỏa mãn biểu thức

$$\beta^2 - 4(\alpha - 2m)(\lambda + m^2) = 0 (**).$$

Đây chính là biểu thức Δ của phương trình trên.

Ta thấy phương trình (**) chính là phương trình bậc ba. Mà ở chương trước tôi đã trình bày về phương pháp giải vô cùng chi tiết nên chúng ta hoàn toàn có thể dễ dàng giải phương trình (**)

Giờ chúng ta cùng đến với một số ví dụ về dạng toán này nhé!

Câu 9: Giải phương trình $x^4 = 2x^2 + 3x - \frac{7}{16}$ (1)

Giải

Phân tích. Ta nhận thấy delta của vế phải phương trình khác 0 nên ta phải làm theo trường hợp hai. Ta cần chọn m sao cho hợp lý để giải bài toán. Theo như phương pháp giải ở trên ta sẽ tìm m như sau

$$\begin{aligned} x^4 &= \left[(x^2 - m) + m \right]^2 = (x^2 - m)^2 + 2m(x^2 - m) + m^2 = (x^2 - m)^2 + 2mx^2 - m^2 \\ 2x^2 + 3x - \frac{7}{16} - 2mx^2 + m^2 &= (x^2 - m)^2 = (2 - 2m)x^2 + 3x + m^2 - \frac{7}{16} \end{aligned}$$

Giờ ta cần chọn m sao cho thỏa mãn hệ thức sau

$$\begin{cases} \Delta_m = 9 - 4(2 - 2m)\left(m^2 - \frac{7}{16}\right) = 9 - \frac{1}{2}(1 - m)(16m^2 - 7) = 0 \\ 2 - 2m > 0 \end{cases}$$

Ta chọn được $m = -1$, do đó ta có lời giải như sau.

Lời giải. Phương trình tương đương

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 4x^2 + 3x + \frac{9}{16} \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = \left(2x + \frac{3}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 2x + \frac{3}{4} \\ x^2 + 1 = -2x - \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0 \\ x^2 + 2x + \frac{7}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Bình luận. Đằng sau cái lời giải ngắn gọn trên kia là cả một bầu trời suy nghĩ, người giải cần tìm ra $m = -1$ sau đó làm bình thường như theo ý tưởng ở phần “Phương pháp giải” trên.

Câu 10: Giải phương trình $x^4 + x^2 - 6x + 1 = 0$ (1)

Giải

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^2 + 4 &= 3x^2 + 6x + 3 \Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = 3(x + 1)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = \sqrt{3}(x + 1) \\ x^2 + 2 = -\sqrt{3}(x + 1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{3}x + 2 - \sqrt{3} = 0 \\ x^2 + \sqrt{3}x + 2 + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4\sqrt{3} - 5}}{2}, \frac{\sqrt{3} + \sqrt{4\sqrt{3} - 5}}{2} \right\} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $S = \left\{ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4\sqrt{3} - 5}}{2}, \frac{\sqrt{3} + \sqrt{4\sqrt{3} - 5}}{2} \right\}$

Bài tập tương tự

Bài 1. Giải phương trình $x^4 - 19x^2 - 10x + 8 = 0$

Bài 2. Giải phương trình $x^4 = 4x + 1$

Bài 3. Giải phương trình $x^4 = 8x + 7$

Bài 4. Giải phương trình $2x^4 + 3x^2 - 10x + 3 = 0$

Bài 5. Giải phương trình $(x^2 - 16)^2 = 16x + 1$

Bài 6. Giải phương trình $3x^4 - 2x^2 - 16x - 5 = 0$

Vậy là chúng ta đã bước qua một chặng đường dài những dạng đặc biệt của phương trình bậc bốn, mỗi dạng phương trình lại có một phương pháp giải riêng, chẳng hạn đến đây các bạn thắc mắc vậy một phương trình không thuộc các dạng trên, không có gì đặc biệt thì giải như thế nào? Phương trình như vậy gọi là phương trình bậc 4 tổng quát, giờ ta sẽ cùng nhau đi làm quen và tìm hiểu phương pháp giải dạng phương trình bậc 4 tổng quát này

PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($a \neq 0$)

Phương pháp giải.

Cách 1. Đầu tiên ta đặt $x = -\frac{b}{4a} + t$

Phương trình sẽ có dạng

$$\begin{aligned} a\left(\frac{-b}{4a} + t\right)^4 + b\left(\frac{-b}{4a} + t\right)^3 + c\left(\frac{-b}{4a} + t\right)^2 + d\left(\frac{-b}{4a} + t\right) + e &= 0 \\ \Leftrightarrow a\left[\left(\frac{-b}{4a}\right)^4 + t^4 + 4\left(\frac{-b}{4a}\right)t + 6\left(\frac{-b}{4a}\right)^2 t^2 + 4\left(\frac{-b}{4a}\right)t^3\right] \\ + b\left[\left(\frac{-b}{4a}\right)^3 + t^3 + 3\left(\frac{-b}{4a}\right)t^2 + 3\left(\frac{-b}{4a}\right)t\right] + c\left[\left(\frac{-b}{4a}\right)^2 + t^2 + 2\left(\frac{-b}{4a}\right)t\right] + d\left(\frac{-b}{4a} + t\right) + e &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow a\left(\frac{-b}{4a}\right)^4 + at^4 + 4a\left(\frac{-b}{4a}\right)^3 t + 6a\left(\frac{-b}{4a}\right)^2 t^2 + 4a\left(\frac{-b}{4a}\right)t^3 + b\left(\frac{-b}{4a}\right)^3 + bt^3 \\
 &+ 3b\left(\frac{-b}{4a}\right)t^2 + 3b\left(\frac{-b}{4a}\right)^2 t + c\left(\frac{-b}{4a}\right)^2 + ct^2 + 2c\left(\frac{-b}{4a}\right)t + \left(d\frac{-b}{4a} + d.t\right) + e = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{b^4}{4^4.a^3} + at^4 - \frac{b^3}{(4a)^2}.t + \frac{3b^2}{8a}.t^2 - bt^3 - \frac{b^4}{(4a)^3} + bt^3 - \frac{3b^2}{4a}.t^2 \\
 &\quad + \frac{3b^3}{(4a)^2}t + \frac{b^2c}{(4a)^2} + c.t^2 - \frac{bc}{2a}.t - \frac{bd}{4a} + dt + e = 0 \\
 &\Leftrightarrow at^4 + \left(\frac{b^4}{4^4.a^3} - \frac{b^4}{(4a)^3} + \frac{b^2c}{(4a)^2} - \frac{bd}{4a} + e\right) + t^2\left(c - \frac{3b^2}{4a} + \frac{3b^2}{8a}\right) \\
 &\quad + \left(d - \frac{b^3}{(4a)^2} - \frac{bc}{2a} + \frac{3b^3}{(4a)^2}\right)t = 0 \\
 &\Leftrightarrow t^4 = \alpha t^2 + \beta t + \gamma
 \end{aligned}$$

Đến đây phương trình trên đưa về dạng như cũ!

Cách 2. Ta tách phương trình bậc 4 thành như sau

$$\begin{aligned}
 &ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (a \neq 0) \\
 &\Leftrightarrow 4a^2x^4 + 4bax^3 + 4cax^2 + 4dax + 4ae = 0 \\
 &\Leftrightarrow (2ax^2 + bx)^2 = (b^2 - 4ac)x^2 - 4adx - 4ae
 \end{aligned}$$

Ta cộng thêm vào 2 vế một biểu thức $2(2ax^2 + bx)y + y^2$ để cho vế trái trở thành một bình phương còn vế phải là một tam thức bậc hai

$$f(x) = (b^2 - 4ac - 4ay)x^2 + 2(by - 2ad)x - 4ae + y^2$$

Ta chọn y sao cho Δ vế phải bằng 0

Từ đó đưa phương trình về dạng hai phương trình bình phương bằng nhau $A^2 = B^2$

Cách 3. Công thức giải phương trình bậc 4 tổng quát.

Xét phương trình tổng quát: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Bước 1: Ta sẽ viết lại thành:

$$\begin{aligned}
 &x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{ax}{2} + k\right)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4} - 2k\right)x^2 + (c - ak)x + d - k^2 = 0
 \end{aligned}$$

Bước 2: Ta sẽ đi tìm k sao cho $\left(b - \frac{a^2}{4} - 2k\right)x^2 + (c - ak)x + d - k^2 = A(x - B)^2$

Khi đó k là nghiệm của phương trình bậc 3 sau:

$$\begin{aligned}
 &\Delta = (c - ak)^2 - 4\left(b - \frac{a^2}{4} - 2k\right)(d - k^2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 8k^3 - 4bk^2 + 2(ac - 4d)k - da^2 - c^2 + 4bd = 0
 \end{aligned}$$

Do ta đã biết cách giải phương trình bậc 3 ở trên cho nên tìm k không phải là một vấn đề khó!

Bước 3: Ta viết lại phương trình thành:

$$\begin{aligned}
 &x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \\
 &\Leftrightarrow (a^2 - 4b + 8k)(2x^2 + ax + 2k)^2 = ((a^2 - 4b + 8k)x + 2ak - 2c)^2
 \end{aligned}$$

Từ phương trình trên ta hoàn toàn có thể biện luận được các nghiệm của phương trình bậc 4. Ta được phương trình bậc 4 có 4 nghiệm như sau:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a}{4} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b + 8k}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{a^2 - 2b - 4k - \frac{a^3 - 4ab + 8c}{\sqrt{a^2 - 4b + 8k}}} \\ x_2 = -\frac{a}{4} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b + 8k}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{a^2 - 2b - 4k - \frac{a^3 - 4ab + 8c}{\sqrt{a^2 - 4b + 8k}}} \\ x_3 = -\frac{a}{4} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b + 8k}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{a^2 - 2b - 4k + \frac{a^3 - 4ab + 8c}{\sqrt{a^2 - 4b + 8k}}} \\ x_4 = -\frac{a}{4} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b + 8k}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{a^2 - 2b - 4k + \frac{a^3 - 4ab + 8c}{\sqrt{a^2 - 4b + 8k}}} \end{cases}$$

Chú ý. Nhưng tuy nhiên công thức này có một điểm yếu, đó là khi ta tìm k mà thay vào thì $\sqrt{a^2 - 4b + 8k}$ bằng 0 lúc đó phương trình vô nghĩa. Lúc này ta sẽ thế ngược k vào phương trình ở bước 1 ta sẽ giải ra được x , trong trường hợp như vậy k luôn là số hữu tỷ.

Giờ chúng ta cùng đến với một số ví dụ về dạng toán này nhé!

Câu 11: Giải phương trình $x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 12x - 9 = 0$

Giải

Ta đặt $x = t + 2$ Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (t+2)^4 - 8(t+2)^3 + 20(t+2)^2 - 12(t+2) - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^4 - 4t^2 + 4t - 1 &= 0 \Leftrightarrow t^4 - (2t-1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (t^2 - 2t + 1)(t^2 + 2t - 1) &= 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 [(t+1)^2 - 2] = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)^2 = 0 \\ (t+1)^2 - 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Mà $x = t + 2$ nên ta sẽ có tập nghiệm của phương trình là $S = \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}; 3\}$

Câu 12: Giải phương trình $x^4 - 16x^3 + 66x^2 - 16x - 55 = 0$

Giải

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^4 - 16x^3 + 64x^2 &= -2x^2 + 16x + 55 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 8x)^2 + 2y(x^2 - 8x) + y^2 &= (2y - 2)x^2 + (16 - 16y)x + 55 + y^2 \end{aligned}$$

Giải phương trình sao cho Δ' của vế phải bằng 0, tức là giải phương trình

$$(8 - 8y)^2 - (55 + y^2)(2y - 2) = 0$$

Ta thu được 2 nghiệm là $y = 1, y = 3, y = 29$

Ta chọn $y = 3$. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} (x^2 - 8x + 3)^2 &= 4(x - 4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 3 = 2(x - 4) \\ x^2 - 8x + 3 = -2(x - 4) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 11 = 0 \\ x^2 - 6x - 5 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{14} \\ x = 5 \pm \sqrt{14} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{3 + \sqrt{14}; 3 - \sqrt{14}; 5 + \sqrt{14}; 5 - \sqrt{14}\}$

Câu 13: Giải phương trình $8x^4 + 8x^3 - 24x^2 - 12x + 15 = 0$

Giải

Áp dụng công thức nghiệm ta được

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{125}{128}\right)} + \sqrt{\frac{9}{8} - \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{125}{128}\right) - \frac{1}{8\sqrt{9+16\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{125}{128}\right)}}} \\
 x_2 &= -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{125}{128}\right)} - \sqrt{\frac{9}{8} - \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{125}{128}\right) - \frac{1}{8\sqrt{9+16\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{125}{128}\right)}}} \\
 x_3 &= -\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{9}{16} + \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{125}{128}\right)} + \sqrt{\frac{9}{8} - \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{125}{128}\right) - \frac{1}{8\sqrt{9+16\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{125}{128}\right)}}} \\
 x_4 &= -\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{9}{16} + \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{125}{128}\right)} - \sqrt{\frac{9}{8} - \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{125}{128}\right) - \frac{1}{8\sqrt{9+16\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{125}{128}\right)}}}
 \end{aligned}$$

Chương

2

Phương pháp lượng giác hóa

Trong thế giới phương trình hệ phương trình chắc hẳn với những bạn yêu toán đã gặp những bài toán mà nghiệm của nó không thể nhầm được, không có cách nào đưa chúng về các dạng toán như đặt ẩn phụ, đánh giá... và đứng trước ngõ cụt của các bài toán đó. Vì thế ở chương này mình sẽ giới thiệu cho các bạn một phương pháp rất hữu hiệu để xử lý các bài toán như thế đó là phương pháp lượng giác hóa. Với chương này yêu cầu các bạn phải nắm chắc các tính chất của lượng giác, các công thức biến đổi từ đó lợi dụng một đặc điểm tương đương của bài toán để đặt ẩn phụ và đưa bài toán về giải phương trình lượng giác bình thường. Sau đây chúng ta sẽ cùng tìm hiểu kỹ phương pháp làm các dạng toán này!

A. Các kiến thức cơ bản.

Các công thức biến đổi lượng giác cần dùng

- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$; $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$; $1 + \cot^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$
- Nếu đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$
- Công thức góc nhân 2 $\begin{cases} \sin 2a = 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \\ \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \end{cases}$
- Công thức góc nhân 3 $\begin{cases} \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \\ \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \\ \tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a} \end{cases}$

• Công thức hạ bậc

$$\begin{cases} \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \\ \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ \sin^3 a = \frac{3 \sin a - \sin 3a}{4} \\ \cos^3 a = \frac{3 \cos a + \cos 3a}{4} \end{cases}$$

Một số dấu hiệu và phương pháp lượng giác hóa thường gặp

- Chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$, đặt $\begin{cases} x = |a| \sin t, \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right) \\ x = |a| \cos t, \left(t \in [0; \pi] \right) \end{cases}$.
- Chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$, đặt $\begin{cases} x = \frac{|a|}{\sin t}, \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \setminus \{0\} \right) \\ x = \frac{|a|}{\cos t}, \left(t \in [0; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \right) \end{cases}$.
- Chứa $\sqrt{a^2 + x^2}$, đặt $\begin{cases} x = |a| \tan t, \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ x = |a| \cot t, \left(t \in (0; \pi) \right) \end{cases}$.
- Chứa $\sqrt{(x-a)(b-x)}$, đặt $x = a + (b-a) \sin^2 t$
- Chứa $\sqrt{\frac{a \pm x}{a \mp x}}$, đặt $x = a \cos t, \left(\cos t \in [-1; 1] \right)$.

Bản chất của phương pháp là lợi dụng các công thức lượng giác, chủ yếu là để khai căn dễ hơn.

B. Các bài toán minh họa.

I. Các bài toán về phương trình.

Để làm tốt các bài toán ở đây ta cần nắm chắc được dấu hiệu nhận biết ở phần A và các lý thuyết liên quan, nào chúng ta cùng bắt đầu với bài toán đầu tiên!

Câu 1: Giải phương trình $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$

Giải

Phân tích. Chú ý đến đại lượng $\sqrt{1-x^2}$ ta sẽ đặt sin hoặc cos nhưng chú ý vế trái đang có dạng giống với công thức nhân 3 của $\cos t$ vậy ta sẽ đặt $x = \cos t$. Vậy lời giải như sau.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi] \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t$.

Khi đó phương trình trở thành

$$4\cos^3 t - 3\cos t = \sin t \Leftrightarrow \cos 3t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2} - t + k2\pi \\ 3t = -\frac{\pi}{2} + t + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{R})$$

Do $t \in [0; \pi] \Rightarrow x = \cos \frac{\pi}{8} \vee x = \cos \frac{5\pi}{8} \vee x = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 2: Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1+2\sqrt{1-x^2})$

Giải

Phân tích. Bài này cũng giống bài trên kia, xuất hiện đại lượng $\sqrt{1-x^2}$ vậy ta sẽ đặt $x = \cos t$ hoặc $x = \sin t$ đều được!

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$.

Khi đó phương trình trở thành

$$\sqrt{1+\cos t} = \sin t(1+2\cos t) \Leftrightarrow \sqrt{2\cos^2 \frac{t}{2}} = \sin t + \sin 2t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} = 2\sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} \left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{3t}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{t}{2} = 0 \\ \sin \frac{3t}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{3t}{2} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee \frac{3t}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \pi + k2\pi \\ t = \frac{\pi}{6} + \frac{k4\pi}{3} \vee t = \frac{\pi}{2} + \frac{k4\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \vee t = \frac{\pi}{2}$. Với $\begin{cases} t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{1}{2} \vee x = 1$.

Câu 3: Giải phương trình $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{2}$

Giải

Phân tích. Ta dễ ý thấy có đại lượng $\sqrt{x^2-1}$ vậy ta sẽ đặt $x = \frac{1}{\cos t}$ hoặc $x = \frac{1}{\sin t}$!

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Đặt $x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{\sin t}{\cos t}$.

Phương trình trở thành $\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = 2\sqrt{2}$

| Phương pháp lượng giác hóa

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin t + \cos t = 2\sqrt{2} \sin t \cos t \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin 2t$$

$$\Leftrightarrow \sin 2t = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = t + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2t = \pi - t - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{2}$.

Câu 4: Giải phương trình $\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} \quad (*)$

Giải

Điều kiện $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{2} \cos t, t \in [0; \pi] \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-2x} = \sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} \\ \sqrt{1+2x} = \sqrt{1+\cos t} = \sqrt{2\cos^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} \\ \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} = \frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}} = \tan \frac{t}{2}; \quad \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} = \cot \frac{t}{2} \end{cases}.$$

Phương trình tương đương

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} = \tan \frac{t}{2} + \cot \frac{t}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right) = \frac{\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right) \left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sin t} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \cos \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \sin t = \sqrt{2} \quad (L) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } t \in [0; \pi], k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 5: Giải phương trình $\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2+1}{2x} = \frac{(x^2+1)^2}{2x(1-x^2)} \quad (*)$

Giải

Điều kiện $x \neq 0, x \neq \pm 1$. Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{0; \pm \frac{\pi}{4}\right\}$.

Sử dụng các hệ thức lượng ta có

- $x^2 + 1 = \tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{\cos t}.$
- $\sin 2t = \frac{2 \tan t}{1 + \tan^2 t} = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{1}{\sin 2t}.$

$$\bullet \quad \cos 2t = \frac{1 - \tan^2 t}{1 + \tan^2 t} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \Rightarrow 2 \sin 2t \cos 2t = \frac{4x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 4t} = \frac{(x^2 + 1)^2}{2x(1 - x^2)}.$$

Khi đó phương trình tương đương $\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin 2t} = \frac{2}{\sin 4t}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2 \sin t \cos t} - \frac{1}{2 \sin t \cos t \cos 2t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} \left[1 + \frac{1}{2 \sin t} - \frac{1}{2 \sin t (1 - 2 \sin^2 t)} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin t (1 - 2 \sin^2 t) + (1 - 2 \sin^2 t) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^3 t + \sin^2 t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = 0 & (L) \\ \sin t = \frac{1}{2} & (N). \\ \sin t = -1 & (L) \end{cases}$$

Với $\sin t = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee t = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Do $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{0; \pm \frac{\pi}{4}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6: Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)^3}{6x^5 - 20x^3 + 6x} \quad (*)$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x \neq \pm \sqrt{3} \end{cases}$. Ta biến đổi phương trình để làm xuất hiện các biểu thức liên hệ

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{6x}{1 + x^2} - 4 \left(\frac{2x}{1 + x^2} \right)^3 \quad (1)$$

Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{0; \pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{\pi}{6}\right\}$.

Phương trình trở thành $\cos t = 3 \sin 2t - 4 \sin^3 2t = \sin 6t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 6t\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} - 6t + k2\pi \\ t = 6t - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \\ t = \frac{\pi}{10} - \frac{k2\pi}{5} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{0; \pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{\pi}{6}\right\} \Rightarrow t = \left\{-\frac{5\pi}{14}; -\frac{3\pi}{14}; -\frac{\pi}{10}; -\frac{\pi}{14}; \frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{14}; \frac{3\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}\right\}$.

$$\Rightarrow x \in \left\{\tan\left(-\frac{5\pi}{14}\right); \tan\left(-\frac{3\pi}{14}\right); \tan\left(-\frac{\pi}{10}\right); \tan\left(-\frac{\pi}{14}\right); \tan\frac{\pi}{18}; \tan\frac{\pi}{14}; \tan\frac{3\pi}{14}; \tan\frac{5\pi}{14}\right\}.$$

Câu 7: Giải phương trình $x^3 - 3x = \sqrt{x+2} \quad (*)$

Giải

Điều kiện: $x \geq -2$.

- Nếu $x > 2$ thì $x^3 - 3x = x + x(x^2 - 4) > x > \sqrt{x+2}$ nên phương trình đã cho không có nghiệm khi $x > 2$.
- Nếu $-2 \leq x \leq 2$ thì đặt $x = 2\cos t, t \in [0; \pi]$.

Phương trình trở thành $8\cos^3 t - 6\cos t = \sqrt{2\cos t + 2}$

$$\Leftrightarrow 2(4\cos^3 t - 3\cos t) = \sqrt{2(\cos t + 1)} \Leftrightarrow 2\cos 3t = \sqrt{2.2\cos^2 \frac{t}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t = \cos \frac{t}{2} \Leftrightarrow 3t = \frac{t}{2} + k2\pi \vee 3t = -\frac{t}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{k4\pi}{5} \vee t = \frac{k4\pi}{7}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } t \in [0; \pi] \Rightarrow t = 0 \vee t = \frac{4\pi}{7} \vee t = \frac{4\pi}{5}.$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là } x = 2 \vee x = 2\cos \frac{4\pi}{7} \vee x = 2\cos \frac{4\pi}{5}.$$

Câu 8: Giải phương trình $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2-2x^2} \quad (*)$

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi]$. Phương trình trở thành

$$\cos^3 t + \sqrt{(1 - \cos^2 t)^3} = \cos t \sqrt{2(1 - \cos^2 t)}$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 t + \sqrt{(\sin^2 t)^3} = \cos t \sqrt{2\sin^2 t} \Leftrightarrow \sin^3 t + \cos^3 t = \sqrt{2} \sin t \cos t$$

$$\Leftrightarrow (\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cos t) = \sqrt{2} \sin t \cos t \quad (1)$$

$$\text{Đặt } u = \sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow u^2 = 1 + 2\sin t \cos t \Leftrightarrow \sin t \cos t = \frac{u^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Do } 0 \leq t \leq \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq t + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{4} \leq \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sin \frac{5\pi}{4} \Rightarrow u \in \left[-\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right].$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành } u\left(1 - \frac{u^2 - 1}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{u^2 - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow u^3 + \sqrt{2}u^2 - 3u - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (u - \sqrt{2})(u^2 + 2\sqrt{2}u + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sqrt{2} & (N) \\ u = -\sqrt{2} + 1 & (N) \\ u = -\sqrt{2} - 1 < -\sqrt{2} & (L) \end{cases}$$

- Với $u = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

- Với $\begin{cases} u = \sin t + \cos t = 1 - \sqrt{2} \\ \sin t \cos t = \frac{u^2 - 1}{2} = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (2)$

Theo định lí Viét thì $\sin t, \cos t$ là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$X^2 - (1 - \sqrt{2})X + 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 3)}}{2}.$$

Do $\sin t \geq 0 \Rightarrow x = \cos t = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 3)}}{2}.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 3)}}{2}.$

Câu 9: Giải phương trình $2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1$ (*)

HSG – Trường THPT Năng Khiếu – Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 2000

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1.$

Đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi] \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = \sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t \end{cases}$

Phương trình trở thành $2\cos^2 t + \sqrt{2}\sin \frac{t}{2} + 2\cos t \cdot \sin t = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin \frac{t}{2} + \sin 2t = 1 - 2\cos^2 t \Leftrightarrow \cos 2t + \sin 2t = -\sqrt{2}\sin \frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2t - \frac{\pi}{4} = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee 2t - \frac{\pi}{4} = -\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + \frac{k4\pi}{3} \vee t = -\frac{\pi}{10} + \frac{k4\pi}{5}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $t \in [0; \pi] \Rightarrow x = \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad x = \cos \frac{7\pi}{10}.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0 \vee x = \cos \frac{7\pi}{10}.$

Câu 10: Giải phương trình $8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$ (*)

Giải

Phương trình tương đương $8x(2x^2 - 1)[2(2x^2 - 1)^2 - 1] = 1$ (2)

- **Trường hợp 1.** $x \geq 1 \Rightarrow$ Vế trái $> 1 \Rightarrow (2)$: vô nghiệm $\Leftrightarrow (1)$: vô nghiệm.
- **Trường hợp 2.** $x \leq -1 \Rightarrow$ Vế trái $< 0 \Rightarrow (2)$: vô nghiệm $\Leftrightarrow (1)$: vô nghiệm.
- **Trường hợp 3.** $-1 \leq x \leq 1$: Đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi]$. Phương trình trở thành

$$8\cos t(2\cos^2 t - 1)[2(2\cos^2 t - 1)^2 - 1] = 1 \Leftrightarrow 8\cos t \cdot \cos 2t(2\cos^2 2t - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 8\cos t \cdot \cos 2t \cos 4t = 1 \Leftrightarrow 8\sin t \cos t \cdot \cos 2t \cdot \cos 4t = \sin t$$

$$\Leftrightarrow 4\sin 2t \cos 2t \cos 4t = \sin t \Leftrightarrow 2\sin 4t \cos 4t = \sin t \Leftrightarrow \sin 8t = \sin t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8t = t + k2\pi \\ 8t = \pi - t + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{k2\pi}{7} \\ t = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{9} \end{cases}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

| Phương pháp lượng giác hóa

$$\text{Do } t \in [0; \pi] \Rightarrow t \in \left\{ \frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}; \frac{6\pi}{7}; \frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9} \right\}.$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \cos \frac{2\pi}{7}; \cos \frac{4\pi}{7}; \cos \frac{6\pi}{7}; \cos \frac{\pi}{9}; \cos \frac{5\pi}{9}; \cos \frac{7\pi}{9} \right\}.$$

Câu 11: Giải phương trình $128x^2(4x^2-1)(8x^2-1)^2+1-2x=0$ với $-\frac{1}{2} < x < 0$.

Giải

Biến đổi phương trình tương đương

$$\begin{cases} (2x-1)[128x^2(2x+1)(8x^2-1)^2-1]=0 \\ -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32(2x)^2(2x+1)[2(4x)^2-1]^2=1 \\ -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}$$

Đặt $2x = \cos t$, $t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x = \cos t, t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ 32 \cos^2 t (\cos t + 1) (2 \cos^2 t - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64 \cos^2 \frac{t}{2} \cos^2 t \cos^2 2t = 1 \\ 2x = \cos t, t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \cos t, t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \sin^2 \frac{t}{2} > 0 \\ 64 \sin^2 \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} \cos^2 t \cos^2 2t = \sin^2 \frac{t}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \cos t, t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ \sin^2 4t = \sin^2 \frac{t}{2} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \cos t, t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ \cos 8t = \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t, t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ t = \left\{ \frac{4\pi}{7}; \frac{6\pi}{7}; \frac{8\pi}{9}; \frac{2\pi}{3} \right\} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $x = \left\{ \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{7}; -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7}; -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{9}; -\frac{1}{4} \right\}$.

Câu 12: Giải phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 2 - \frac{x^2}{4}$ với $-\frac{1}{2} < x < 0$.

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$. Phương trình tương đương $\sqrt{1+\cos t} + \sqrt{1-\cos t} \leq 2 - \frac{\cos^2 t}{4}$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow 2 \cos \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \leq 2 - \sin^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\ & \Leftrightarrow 2 \cos \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \leq 2 - \left[1 - \cos^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \cos^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\ & \Leftrightarrow \cos^4 \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \cos^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 2 \cos \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \left[\cos \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right]^2 \left[\cos^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \right] \geq 0 \quad (**) \end{aligned}$$

Vì (**) luôn đúng $\forall t \in [0; \pi]$ nên tập nghiệm của (*) là $x \in [-1; 1]$.

Câu 13: Giải phương trình $\sqrt{x+1} = 32x^3 + 48x^2 + 18x + 1$

Giải

Điều kiện $x \geq -1$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{4x+4} = 64x^3 + 96x^2 + 36x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{(4x+2)+2} = (4x+2)^3 - 3(4x+2) \quad (i)$$

Đặt $t = 4x+2$, do $x \geq -1$ nên $t = 4x+2 \geq -2$. Khi đó $(i) \Leftrightarrow \sqrt{t+2} = t^3 - 3t \quad (ii)$

$$\begin{aligned} \text{Với } t > 2 \text{ thì } t^3 - 3t &= (t^3 - 4t) + t = t(t^2 - 4) + \sqrt{t^2} > \sqrt{t^2} = \sqrt{(t^2 - t - 2) + t + 2} \\ &= \sqrt{(t+1)(t-2) + t + 2} > \sqrt{t+2}, \text{ nên } (ii) \text{ vô nghiệm khi } t > 2. \end{aligned}$$

- Với $-2 \leq t \leq 2$, đặt $t = 2\cos u$, ($u \in [0; \pi]$). Suy ra

$$\sqrt{t+2} = \sqrt{2(1+\cos u)} = 2\sqrt{\cos^2 \frac{u}{2}} = 2\left|\cos \frac{u}{2}\right| = 2\cos \frac{u}{2}, \left(\text{do } \frac{u}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

$$(ii) \Leftrightarrow 2\cos \frac{u}{2} = 8\cos^3 u - 6\cos u \Leftrightarrow \cos 3u = \cos \frac{u}{2} \Leftrightarrow u = \frac{k4\pi}{7} \vee u = \frac{k4\pi}{5}, (k \in \mathbb{Z})$$

Do $u \in [0; \pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, suy ra: $u = \left\{0; \frac{4\pi}{5}; \frac{4\pi}{7}\right\}$. Nên $t = \left\{0; 2\cos \frac{4\pi}{5}; 2\cos \frac{4\pi}{7}\right\}$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\left(-1 + \cos \frac{4\pi}{5}\right)$, $x = \frac{1}{2}\left(-1 + \cos \frac{4\pi}{7}\right)$.

Câu 14: Giải phương trình $2x + (4x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} = 4x^3 + \sqrt{1-x^2}$

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$, $\left(\text{do } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Phương trình trở thành $2\sin t + (4\sin^2 t - 1)\cos t = 4\sin^3 t + \cos t$

$$\Leftrightarrow 2\sin t + 4\sin^2 t \cos t - 2\cos t - 2\sin^3 t = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin t - \cos t) - 2\sin^2 t(\sin t - \cos t) = 0 \Leftrightarrow (\sin t - \cos t)(1 - 2\sin^2 t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\cos 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, suy ra $t = \pm \frac{\pi}{4}$ nên $x = \sin t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 15: Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1-x^2}{3}}$.

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \\ \sqrt{(1+x)^3} = (\sqrt{1+\cos t})^3 = \left(\sqrt{2\cos^2 \frac{t}{2}}\right)^3 = 2\sqrt{2} \left|\cos^3 \frac{t}{2}\right| = 2\sqrt{2} \cos^3 \frac{t}{2} \\ \sqrt{(1-x)^3} = (\sqrt{1-\cos t})^3 = \left(\sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}}\right)^3 = 2\sqrt{2} \left|\sin^3 \frac{t}{2}\right| = 2\sqrt{2} \sin^3 \frac{t}{2} \\ \sqrt{1+\sin t} = \sqrt{\left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2}\right)^2} = \left|\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2}\right| = \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình trở thành } & \sqrt{1+\sin t} \left[2\sqrt{2} \left(\cos^3 \frac{t}{2} - \sin^3 \frac{t}{2} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} (2 + \sin t) \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{2} \left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right) \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} (2 + \sin t) \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{2} \left(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin t \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} (2 + \sin t) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2} \cos t (2 + \sin t) - \frac{1}{\sqrt{3}} (2 + \sin t) = 0 \Leftrightarrow (2 + \sin t) \left(\sqrt{2} \cos t - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2} \cos t - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Câu 16: Giải phương trình $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1-2x^2$

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$ thì $1+2x\sqrt{1-x^2} = \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)^2 \geq 0$ luôn đúng.

Đặt $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$, suy ra $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t$.

Phương trình trở thành

$$\sqrt{(\cos t + \sin t)^2} = \sqrt{2} (1 - 2\cos^2 t) \Leftrightarrow |\cos t + \sin t| = -\sqrt{2} \cos 2t$$

$$\Leftrightarrow \left| \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right| = -\cos 2t \Leftrightarrow \left| \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right| = \cos(\pi - 2t) = -\cos 2t \quad (1)$$

- Nếu $t \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow t - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0$ thì

$$(1) \Leftrightarrow -\cos 2t = \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ t = \frac{3\pi}{4} - k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{5\pi}{12} \\ t = \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \left(\text{do } t \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] \right).$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = \cos \frac{5\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ x = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

- Nếu $t \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right] \Rightarrow t - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) < 0$ thì

$$(1) \Leftrightarrow -\cos 2t = -\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ t = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ để } t \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right].$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17: Giải phương trình $\sqrt{1-x^2} = \frac{x}{4x^2-1}$

Giải

Điều kiện $x \in [-1; 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Đặt $x = \cos t$, $t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\cos^2 t} &= \frac{\cos t}{4\cos^2 t - 1} \Leftrightarrow (4\cos^2 t - 1)\sqrt{\sin^2 t} = \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t [4(1-\sin^2 t) - 1] &= \cos t \Leftrightarrow 3\sin t - 4\sin^3 t = \cos t \Leftrightarrow \sin 3t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, \left(k \in \mathbb{Z}, t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}\right) &\Rightarrow t = \frac{\pi}{8} \vee t = \frac{5\pi}{8} \vee t = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ta có $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \Rightarrow \cos t = \pm \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}}$. Nên:

- Với $t = \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, (do $\cos \frac{\pi}{8} > 0$).
- Với $t = \frac{5\pi}{8} \Rightarrow x = \cos \frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+\cos \frac{5\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, (do $\cos \frac{5\pi}{8} < 0$).
- Với $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 18: Giải phương trình $(16x^4 - 12x^2 + 1)\sqrt{1-x^2} = x$

Giải

Đặt $x = \cos t$, $t \in [0; \pi] \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1)\sin t &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sin [16(1-\sin^2 t)^2 - 12(1-\sin^2 t) + 1] &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t (16\sin^4 t - 20\sin^2 t + 5) &= \cos t \Leftrightarrow 16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t = \cos t \\ \Leftrightarrow \sin 5t = \cos t \Leftrightarrow \sin 5t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \text{ hoặc } t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}. \end{aligned}$$

| Phương pháp lượng giác hóa

Do $t \in [0; \pi]$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $t = \frac{\pi}{12} \vee t = \frac{\pi}{8} \vee t = \frac{5\pi}{12} \vee t = \frac{5\pi}{8} \vee t = \frac{3\pi}{4}$.

Ta có $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \Rightarrow \cos t = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2t}{2}}$.

- Với $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Với $t = \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \left(\text{do } \cos \frac{\pi}{12} > 0 \right)$.
- Với $t = \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}, \left(\text{do } \cos \frac{\pi}{8} > 0 \right)$.
- Với $t = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow x = \cos \frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{5\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \left(\text{do } \cos \frac{5\pi}{12} > 0 \right)$.
- Với $t = \frac{5\pi}{8} \Rightarrow x = \cos \frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{5\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}, \left(\text{do } \cos \frac{5\pi}{8} < 0 \right)$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}, x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}, x = -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 19: Giải phương trình $\frac{1}{1 - \sqrt{1 - x}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1, x \neq 0$. Đặt $x = \cos t, t \in (0; \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \\ \sqrt{1 - x} = \sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{2} \left| \sin \frac{t}{2} \right| = \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} \\ \sqrt{1 + x} = \sqrt{1 + \cos t} = \sqrt{2 \cos^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{2} \left| \cos \frac{t}{2} \right| = \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} \end{cases}$$

Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \sqrt{2} \sin \frac{t}{2}} + \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cos \frac{t}{2}} &= \frac{1}{\sin t} \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} + 1 - \sqrt{2} \sin \frac{t}{2}}{\left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{t}{2}\right) \left(1 + \sqrt{2} \cos \frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{\sin t} \\ &\Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{2} \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right)}{1 + \sqrt{2} \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) - 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $a = \cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow a^2 = 1 - 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$.

Do $t \in (0; \pi)$ suy ra $a \in (-1; 1)$

Khi đó (1) trở thành $\frac{2+\sqrt{2}a}{1+\sqrt{2}a-(1-a^2)} = \frac{1}{1-a^2} \Leftrightarrow (2+\sqrt{2}a) \cdot (1-a^2) - a^2 - \sqrt{2}a = 0$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (\sqrt{2}a^2 + 4a + 2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $\sqrt{2} \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} + k4\pi \\ t = -\frac{7\pi}{6} + k4\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Do $t \in (0; \pi)$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \cos t = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 20: Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-4x^2}} = x\left(1+\sqrt{1+2\sqrt{1-4x^2}}\right).$

Giải

Điều kiện $0 < x \leq \frac{1}{2}.$ Đặt $x = \frac{1}{2} \cos t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

Suy ra $\sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t.$

Khi đó phương trình trở thành $\sqrt{1+\sin t} = \frac{\cos t}{2} \cdot (1+\sqrt{1+2\sin t})$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} + 2\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \left(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}\right) \cdot (1+\sqrt{1+2\sin t})$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}\right)^2} = \left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}\right) \cdot \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}\right) \cdot (1+\sqrt{1+2\sin t})$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}\right) = \left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}\right) \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}\right) (1+\sqrt{1+2\sin t})$$

$$\Leftrightarrow 2 = \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}\right) (1+\sqrt{1+2\sin t}) \quad \left(\text{do } t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} > 0\right).$$

Đặt $a = \cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow a^2 = 1 - 2\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \Rightarrow \sin t = 1 - a^2.$

Do $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow a \in [0; 1].$ Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 2 = a\left[1+\sqrt{1+2(1-a^2)}\right]$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{3-2a^2} = 2-a \Leftrightarrow a^2(3-2a^2) = (2-a)^2 \Leftrightarrow 2a^4 - 2a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+2a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Với $a = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k4\pi \\ t = -\pi + k4\pi \end{cases}.$

Do $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $t = 0$, suy ra $x = \frac{1}{2} \cos t = \frac{1}{2}.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}.$

Câu 21: Giải phương trình $\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2}{|x-1|}$.

Giải

Điều kiện $2x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$ thì $0 \leq \sqrt{2x-x^2} \leq 1$ nên ta đặt

$$\cos t = \sqrt{2x-x^2}, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} = \sqrt{1-\cos t}; \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} = \sqrt{1+\sin t}$$

Và $\cos^2 t = 2x-x^2 = 1-(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = 1-\cos^2 t = \sin^2 t \Leftrightarrow |x-1| = \sin t$.

Khi đó phương trình đầu trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\cos t} + \sqrt{1+\cos t} &= \frac{2}{\sin t} \Leftrightarrow (\sqrt{1-\cos t} + \sqrt{1+\cos t})^2 = \left(\frac{2}{\sin t}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-\cos^2 t} &= \frac{4}{\sin^2 t} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\sin^2 t} = \frac{2}{\sin t} \Leftrightarrow 1 + \sin t = \frac{2}{\sin t} \\ \Leftrightarrow \sin^3 t + \sin t - 2 &= 0 \Leftrightarrow \sin t = 1 \Leftrightarrow \cos t = 0 \Rightarrow \sqrt{2x-x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy 2 nghiệm cần tìm là $x=0, x=2$.

Câu 22: Giải phương trình $4x^3 - 12x^2 + 9x - 1 = \sqrt{2x-x^2}$.

Giải

Điều kiện $0 \leq x \leq 2$. Biến đổi phương trình đầu ta được

$$4(x-1)^3 - 3(x-1) = \sqrt{1-(x-1)^2}$$

Do $x \in [0;2] \Rightarrow (x-1) \in [-1;1]$ nên đặt $x-1 = \cos t, t \in [0;\pi]$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4\cos^3 t - 3\cos t &= \sqrt{1-\cos^2 t} \Leftrightarrow \cos 3t = \sin t \Leftrightarrow \cos 3t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \text{ hoặc } t = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Do $t \in [0;\pi], k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \frac{5\pi}{8}$ hoặc $t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 1 + \cos \frac{5\pi}{8}$ hoặc $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy các nghiệm cần tìm là $x = 1 + \cos \frac{5\pi}{8}, x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 23: Giải phương trình $\sqrt{1-x^2} = \frac{4x^3-3x}{16x^4-12x^2+1}$.

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$ và $16x^4 - 12x^2 + 1 \neq 0$.

Đặt $x = \cos t, t \in [0;\pi]$, suy ra $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = \sin t$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \sin t \cdot (16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1) &= 4\cos^3 t - 3\cos t \\ \Leftrightarrow \sin t \left[16 \cdot (1 - \sin^2 t)^2 - 12 \cdot (1 - \sin^2 t) + 1 \right] &= \cos 3t \\ \Leftrightarrow \sin t \cdot (16\sin^4 t - 20\sin^2 t + 5) &= \cos 3t \Leftrightarrow 16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t = \cos 3t \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin 5t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right) \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \text{ hoặc } t = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } t \in [0; \pi] \Rightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{16}; \frac{5\pi}{16}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hoặc } x = \cos \frac{\pi}{16} \text{ hoặc } x = \cos \frac{5\pi}{16}.$$

$$\text{Vậy các nghiệm cần tìm là } x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; x = \cos \frac{\pi}{16}; x = \cos \frac{5\pi}{16}.$$

Câu 24: Giải phương trình $\frac{5x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2}{x^2+1} = 4$.

Giải

$$\text{Đặt } x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos t > 0.$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2 t + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t} \text{ và } x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 t} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+1} = 2\cos^2 t.$$

Khi đó phương trình trở thành

$$5 \tan t \cos t + 2 \cos^2 t - 4 = 0 \Leftrightarrow 5 \sin t + 2(1 - \sin^2 t) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 t + 5\sin t - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ t = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ và } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } t = \frac{\pi}{6}. \text{ Suy ra } x = \tan t = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy nghiệm cần tìm của phương trình là } x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 25: Giải phương trình $\sqrt{x^2+25} = x + \frac{50}{\sqrt{x^2+25}}$.

Giải

$$\text{Đặt } x = 5 \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos t > 0.$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+25} = \sqrt{25(\tan^2 t + 1)} = \frac{5}{\sqrt{\cos^2 t}} = \frac{5}{\cos t} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+25}} = \frac{\cos t}{5}.$$

Khi đó phương trình trở thành

$$\frac{5}{\cos t} = 5 \tan t + 10 \cos t \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} + 2 \cos t$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 t + \sin t - 1 = 0, (\text{do } \cos t > 0) \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 t) + \sin t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2 t + \sin t + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin t = 1 \text{ hoặc } \sin t = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hoặc } t = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } t = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Do } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ và } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } t = -\frac{\pi}{6}, \text{ suy ra: } x = 5 \tan t = -\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy nghiệm cần tìm của phương trình là } x = -\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 26: Giải phương trình $x^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = 4(x^2 - 1)$

Giải

Điều kiện $x < -1$ hoặc $x > 1$.

Đặt $x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in (0; \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \Rightarrow \sin t > 0$.

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{\sin t}{|\cos t|}.$$

- Với $t \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \cos t > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = \frac{\sin t}{|\cos t|} = \frac{\sin t}{\cos t}$.

Khi đó phương trình trở thành

$$\frac{1}{\cos^2 t} \left(1 + \frac{\cos t}{\sin t} \right) = 4 \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \Leftrightarrow 1 + \cot t = 4 \sin^2 t, \text{ (do : } \cos t > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cot t = \frac{4}{1 + \cot^2 t} \Leftrightarrow (1 + \cot t)(1 + \cot^2 t) = 4$$

$$\Leftrightarrow \cot^3 t + \cot^2 t + \cot t - 3 = 0 \Leftrightarrow \cot t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

Do $t \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{\cos t} = \sqrt{2}$.

- Với $t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right) \Rightarrow \cos t < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = \frac{\sin t}{|\cos t|} = -\frac{\sin t}{\cos t}$

Khi đó phương trình trở thành

$$\frac{1}{\cos^2 t} \left(1 - \frac{\cos t}{\sin t} \right) = 4 \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \Leftrightarrow 1 - \cot t = 4 \sin^2 t, \text{ (} \cos t < 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cot t = \frac{4}{1 + \cot^2 t} \Leftrightarrow (1 - \cot t)(1 + \cot^2 t) = 4$$

$$\Leftrightarrow -\cot^3 t + \cot^2 t - \cot t - 3 = 0 \Leftrightarrow \cot t = -1 \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

Do $t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{\cos t} = -\sqrt{2}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$.

Câu 27: Giải phương trình $1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{5}{6x}$ (*)

Giải

Điều kiện $x < -1$ hoặc $x > 1$.

- Nếu $x < -1$ thì vế trái $= 1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0$ và vế phải $= \frac{5}{6x} < 0$ nên (*) vô nghiệm.

- Nếu $x > 1$ thì đặt $x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \sin t > 0 \\ \cos t > 0 \\ \tan t > 0 \end{cases}$

Khi đó $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\tan^2 t} = |\tan t| = \tan t$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1-\frac{1}{\cos t}}{\tan t} = \frac{\cos t-1}{\cos t \cdot \tan t} = \frac{\cos t-1}{\sin t} \text{ và } \frac{5}{6x} = \frac{5 \cos t}{6}.$$

Phương trình trở thành $1 + \frac{\cos t-1}{\sin t} = \frac{5 \cos t}{6} \Leftrightarrow \sin t + \cos t - 1 = \frac{5}{6} \sin t \cos t \quad (**)$

Đặt $a = \sin t + \cos t \Rightarrow a^2 = 1 + 2 \sin t \cos t \Rightarrow \sin t \cos t = \frac{a^2-1}{2}, a \in (1; \sqrt{2}]$.

Phương trình $(**)$ trở thành $a-1 = \frac{5}{6} \cdot \frac{a^2-1}{2} \Leftrightarrow 5a^2 - 12a + 7 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Với $a = \frac{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} \sin t + \cos t = \frac{7}{5} \\ \sin t \cdot \cos t = \frac{a^2-1}{2} = \frac{12}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{3}{5} \\ \cos t = \frac{4}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sin t = \frac{4}{5} \\ \cos t = \frac{3}{5} \end{cases}.$

Với $\cos t = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{4}$ và $\cos t = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{3}$.

Vậy nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \frac{5}{3}, x = \frac{5}{4}$.

Câu 28: Giải phương trình $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$

Giải

Đặt $x = 2 \cos t$ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2 \cos t &= \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \cos t}}} \\ \Leftrightarrow 2 \cos t &= \sqrt{2 + \sqrt{2 - 2 \cos \frac{t}{2}}} \\ \Leftrightarrow 2 \cos t &= \sqrt{2 + 2 \sin \frac{t}{4}} \\ \Leftrightarrow 2 \cos t &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{t}{8} + \cos \frac{t}{8} \right) \\ \Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) &= \sin \left(\frac{t}{8} + \frac{\pi}{4} \right) (*) \end{aligned}$$

Giải phương trình $(*)$ và kết hợp điều kiện ta được $x = \cos \frac{2\pi}{9}$ và $x = \cos \frac{-2\pi}{7}$

Câu 29: Giải phương trình $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

Giải

Phương trình đã cho tương đương $\frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) + \frac{3}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x}}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) + \frac{3\sqrt{1-x}}{x} = 1$

Đặt $t = \frac{\sqrt{1-x}}{x} \Rightarrow t^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$.

Khi đó, phương trình đã cho có thể viết lại $t \cdot -t^2 + 3t = 1 \Leftrightarrow t^3 - 3t + 1 = 0$

Đặt $t = 2a$. Ta được phương trình $8a^3 - 6a + 1 = 0 \Leftrightarrow 4a^3 - 3a = -\frac{1}{2}$

Xét các nghiệm thuộc $[-1; 1]$ của phương trình trên. Khi đó đặt $a = \cos a$.

Ta được phương trình mới $\cos 3a = \frac{1}{2}$.

Đến đây xin mời bạn đọc tiếp tục phần còn lại của bài toán.

Câu 30: Giải phương trình $4x^3 - 12x^2 + 9x - 1 = \sqrt{2x - x^2}$

Giải

Điều kiện $0 \leq x \leq 2$.

Phương trình tương đương $4(x-1)^3 - 3(x-1) = \sqrt{1-(x-1)^2}$

Đặt $t = x-1$ nên phương trình trở thành: $4t^3 - 3t = \sqrt{1-t^2}$

Đặt $t = \cos \alpha; t \in [-1; 1]$

Nên phương trình trở thành $4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = \sin \alpha$

Hay $4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = -\sin \alpha \Leftrightarrow \cos 3\alpha = -\sin \alpha$

Đến đây xin mời bạn đọc tiếp tục lời giải!

II. Các bài toán về hệ phương trình.

Nhìn chung các bài toán về hệ phương trình cũng không có khác nhiều các bài toán phương trình chúng ta vẫn chú ý lợi dụng đặc điểm của các đại lượng $\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2}, \dots$ và sự xuất hiện của biểu thức $x^2 + y^2 = a^2$ trong phương trình trong hệ, từ đó đưa ra cách đặt ẩn phù hợp nhất. Sau đây ta sẽ cùng đi giải quyết các bài toán nhé!

Câu 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} = \frac{1}{4} \\ y\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$.

Đặt $x = \sin u, y = \cos v$ với $u, v \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 u} = \sin u \\ \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 v} = \cos v \end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình trở thành
$$\begin{cases} \cos u \sin v = \frac{1}{4} \\ \cos v \sin u = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(u+v) = \frac{1}{2} \\ \sin(u-v) = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow u-v = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $u, v \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow u = v$.

Thay $u = v$ vào (1) $\Rightarrow \sin 2u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \\ u = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$.

Vì $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow u = \frac{\pi}{12} \vee u = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow (x; y) = \left(\cos \frac{\pi}{12}; \cos \frac{\pi}{12}\right), \left(\cos \frac{5\pi}{12}; \cos \frac{5\pi}{12}\right)$

Trong đó $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Câu 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x = \frac{2y}{1-y^2} \\ y = \frac{2x}{1-x^2} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y \neq \pm 1$.

Đặt $x = \tan u$, $y = \tan v$ thì $u, v \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\pm \frac{\pi}{4}\right\}$.

Ta có $\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} = \tan 2u$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} \tan u = \tan 2v \\ \tan v = \tan 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v + k\pi \\ v = 2u + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{(k+2m)\pi}{3} \\ v = -\frac{(m+2k)\pi}{3} \end{cases}$$

Vì $u, v \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\pm \frac{\pi}{4}\right\} \Rightarrow (k; m) = \{(0; 0), (1; -1), (-1; 1)\}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = \{(0; 0), (\sqrt{3}; -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}; \sqrt{3})\}$.

Câu 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3y^2 - 2y = 0 & (1) \\ 36(x\sqrt{x} + 3y^3) - 27(4y^2 - y) + (2\sqrt{3} - 9)\sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases}$$

Olympic 30 – 04 lần XIX ngày 06/04/2013 Toán 11 – THPT chuyên Lê Hồng Phong

Giải

Điều kiện $x \geq 0$. Ta thấy rằng phương trình (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{3x})^2 + (3y-1)^2 = 1$.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{3x} = \sin t \\ 3y-1 = \cos t \end{cases}$ khi đó hệ trở thành
$$\begin{cases} t \in [0; \pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\ 4\sqrt{3} \sin^3 t + 4(1 + \cos t)^3 - 12(1 + \cos t)^2 + 9(1 + \cos t) + (2 - 3\sqrt{3}) \sin t = 1 \\ t \in [0; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^3 t - 3\cos t + 4\sqrt{3} \sin^3 t - 3\sqrt{3} \sin t + 2\sin t = 0 \\ t \in [0; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3t - \sqrt{3} \sin 3t + 2\sin t = 0 \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(3t - \frac{\pi}{6}\right) = \sin t \\ t \in [0; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee t = \frac{7\pi}{24} + \frac{m\pi}{2}, (k, m \in \mathbb{Z}) \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{24}; \frac{19\pi}{24}\right\}.$$

- Với $t = \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{12} \Rightarrow y = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{12}}{3} = \frac{4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{12}.$

- Với $t = \frac{7\pi}{24} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \sin^2 \frac{7\pi}{24} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \cos \frac{7\pi}{12}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2} + \sqrt{6}}{24} \Rightarrow y = \frac{4 + \sqrt{2(4 + \sqrt{2} - \sqrt{6})}}{12}$.
- Với $t = \frac{19\pi}{24} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \sin^2 \frac{19\pi}{24} \Rightarrow x = \frac{4 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{24} \Rightarrow y = \frac{4 - \sqrt{2(4 - \sqrt{2} + \sqrt{6})}}{12}$.

Câu 4: Cho các số dương a, b, c . Xác định các số thực dương x, y, z sao cho

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ 4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc \end{cases}$$

Giải

Từ giả thiết, ta có $4xyz = (a^2x + b^2y + c^2z) + abc \Rightarrow 4 = \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz}$

Đặt $x_1 = \frac{a}{\sqrt{yz}}; y_1 = \frac{b}{\sqrt{zx}}; z_1 = \frac{c}{\sqrt{xy}}$. Khi đó, ta có

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1y_1z_1 = 4 \Leftrightarrow z_1^2 + (x_1y_1)z_1 + (x_1^2 + y_1^2 - 4) = 0 \quad (**)$$

Và $0 < x_1 < 2; 0 < y_1 < 2; 0 < z_1 < 2$.

Xem (**) là phương trình bậc 2, ta có

$$\Delta = (x_1y_1)^2 - 4(y_1^2 + x_1^2 - 4) = (y_1^2 - 4)(x_1^2 - 4)$$

Đặt $x_1 = 2\sin u; y_1 = 2\sin v; u, v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra, $\Delta = 16\cos^2 u \cdot \cos^2 v \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2(\cos u \cos v - \sin u \sin v) \\ z_1 = -2(\cos u \cos v + \sin u \sin v) \end{cases}$

Vì $u, v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \sin v, \sin u > 0, \cos v, \cos u > 0$ nên loại $z_1 = -2(\cos u \cos v + \sin u \sin v)$

Chọn $z_1 = 2(\cos u \cos v - \sin u \sin v) = 2\cos(u + v)$

Vậy từ cách đặt

$$a = x_1\sqrt{yz} = 2\sin u \cdot \sqrt{yz}; b = y_1\sqrt{zx} = 2\sin v \cdot \sqrt{zx}; c = z_1\sqrt{xy} = 2\cos(u + v)\sqrt{xy}$$

Từ giả thiết $x + y + z = a + b + c \Leftrightarrow x + y + z = 2\sin u \cdot \sqrt{yz} + 2\sin v \cdot \sqrt{zx} + 2\cos(u + v)\sqrt{xy}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 + \sqrt{z}^2 - 2\sin u \cdot \sqrt{yz} - 2\sin v \cdot \sqrt{zx} - 2\cos u \cos v \sqrt{xy} + 2\sin u \sin v \sqrt{xy} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} \cos v - \sqrt{y} \cos u)^2 + (\sqrt{x} \sin v + \sqrt{y} \sin u - \sqrt{z})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \cos v = \sqrt{y} \cos u \\ \sqrt{z} = \sqrt{x} \sin v + \sqrt{y} \sin u \end{cases} \quad (I)$$

Do cách đặt $x_1 = 2\sin u; y_1 = 2\sin v \Rightarrow \sin u = \frac{x_1}{2}, \sin v = \frac{y_1}{2}$ thế vào (I) ta được $\sqrt{z} = \sqrt{x} \frac{y_1}{2} + \sqrt{y} \frac{x_1}{2}$.

Mà $x_1 = \frac{a}{\sqrt{yz}}; y_1 = \frac{b}{\sqrt{zx}}$ nên ta được: $\sqrt{z} = \sqrt{x} \frac{b}{\sqrt{zx}} + \sqrt{y} \frac{a}{\sqrt{yz}} \Rightarrow z = \frac{a+b}{2}$

Tương tự $y = \frac{c+a}{2}; x = \frac{b+c}{2}$.

Thử lại ta thấy thỏa hệ. Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x, y, z) = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$.

Câu 5: Với a, b là các hằng số cho trước, giải hệ phương trình sau

$$x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = (x-b)^2 + (y-a)^2$$

Giải

Ta đặt $x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = (x-b)^2 + (y-a)^2 = R^2$

$$\text{Khi đó hệ trở thành } \begin{cases} x = R \cos \alpha; a = R \sin \alpha \\ y = R \cos \beta; b = R \sin \beta \\ R^2 (\cos \alpha - \sin \beta)^2 + R^2 (\cos \beta - \sin \alpha)^2 = R^2 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in [0; 2\pi])$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = R \cos \alpha; a = R \sin \alpha \\ y = R \cos \beta; b = R \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Nếu } \alpha + \beta = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ thì } \begin{cases} y = R \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{a}{2} \\ b = R \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2b + a\sqrt{3} \\ y = 2a + b\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Nếu } \alpha + \beta = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ thì } \begin{cases} y = R \cos\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{a}{2} \\ b = R \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2b - a\sqrt{3} \\ y = 2a - b\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

$$\text{Câu 6: Giải hệ phương trình } \begin{cases} (x^2 + xy)(y + 2z) = \frac{1}{8} \\ x^2 + y^2 + 3xy + 4xz + 2yz = -\frac{3}{4} \quad (x < 0 < y < z) \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Giải

Ta có $x^2 + y^2 + 3xy + 4xz + 2yz = x(x + y) + (x + y)(y + 2z) + x(y + 2z)$

$$\text{Khi đó ta đặt } \begin{cases} u = x \\ v = x + y \\ w = y + 2z \end{cases} \text{ . Hệ phương trình trở thành } \begin{cases} uvw = \frac{1}{8} \\ uv + vw + wu = -\frac{3}{4} \quad (u < 0; u < v < w) \\ u + v + w = 0 \end{cases}$$

Theo viet ta có u, v, w là nghiệm của phương trình

$$X^2 - \frac{3}{4}X - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 4X^3 - 3X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos \frac{\pi}{9} \\ X = \cos \frac{5\pi}{9} \\ X = \cos \frac{7\pi}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \cos \frac{7\pi}{9} \\ v = \cos \frac{5\pi}{9} \\ w = \cos \frac{\pi}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos \frac{7\pi}{9} \\ y = \cos \frac{5\pi}{9} - \cos \frac{7\pi}{9} \\ z = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} \right) \end{cases}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!

Câu 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

Giải

Ta để ý rằng nếu (x, y, z) là nghiệm thì $(-x, -y, -z)$ cũng là nghiệm của hệ và x, y, z phải cùng dấu.

Từ điều kiện $xy + yz + zx = 1$ ta đặt
$$\begin{cases} x = \tan \frac{A}{2} \\ y = \tan \frac{B}{2} \\ z = \tan \frac{C}{2} \end{cases}$$

Với A, B, C là ba góc của một tam giác ABC.

Ta có $3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow 3\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right) = 4\left(\frac{y^2 + 1}{2y}\right) = 5\left(\frac{z^2 + 1}{2z}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{5}{\sin C}$

Dễ thấy ngay tam giác ABC vuông tại C, ta giả sử 3 cạnh của tam giác là 3, 4, 5. Ta có

$$\begin{cases} x = \tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3} \\ y = \tan \frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{\sin B} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2} \\ z = \tan \frac{C}{2} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm cần tìm là $(x, y, z) = \pm \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\right)$

Chú ý. Với các bài toán có giả thiết $xy + yz + zx = 1$ ta sẽ đặt
$$\begin{cases} x = \tan \frac{A}{2} \\ y = \tan \frac{B}{2} \\ z = \tan \frac{C}{2} \end{cases}$$

Câu 8: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ 16x^5 - 20x^3 + 5x + 512y^5 - 160y^3 + 10y + \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

Giải

Ta dễ dàng nhận thấy ý tưởng đặt ẩn lượng giác ngay từ phương trình đầu.

Đặt $\begin{cases} x = \sin t \\ 2y = \cos t \end{cases}$ ta đưa hệ về dạng

$$\begin{cases} \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\ 16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t + 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t = -\sqrt{2} (*) \end{cases}$$

Để ý phương trình (*) các hệ số $\cos t, \sin t$ bằng nhau nên ta nghĩ ngay tới $\sin 5t, \cos 5t$ ta được

$$(*) \Leftrightarrow \sin 5t + \cos 5t = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 5t + \frac{\pi}{4} = -1 \Leftrightarrow t = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Mặt khác $\begin{cases} t \in (0; 2\pi) \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow t \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{13\pi}{20}; \frac{21\pi}{20}; \frac{29\pi}{20}; \frac{27\pi}{20} \right\}$

Vậy các nghiệm của hệ phương trình là $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right);$

$$\left(\sin \frac{13\pi}{20}; \frac{1}{2} \cos \frac{13\pi}{20} \right); \left(\sin \frac{21\pi}{20}; \frac{1}{2} \cos \frac{21\pi}{20} \right); \left(\sin \frac{29\pi}{20}; \frac{1}{2} \cos \frac{29\pi}{20} \right); \left(\sin \frac{37\pi}{20}; \frac{1}{2} \cos \frac{37\pi}{20} \right)$$

Chú ý. Bài này ta sử dụng đến 2 công thức lượng giác sau

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5 \alpha - 20\cos^3 \alpha + 5\cos \alpha$$

$$\sin 5\alpha = 16\sin^5 \alpha - 20\sin^3 \alpha + 5\sin \alpha$$

Câu 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 3x^2y + 2\sqrt{3}xy + 2x \\ x^2 = y^2 + 1 \end{cases}$

Giải

Nhận xét. Nhìn thoáng qua có lẽ chúng ta chưa thể nhìn ra đặt ẩn lượng giác kiểu gì phải không nào!

Hãy để ý tới công thức lượng giác $\frac{1}{\cos^2 a} = \tan^2 a + 1$. Vậy ở phương trình (2) nếu ta đặt $x = \frac{1}{\cos t}$ thì $y = \tan t \quad \alpha \in [0; \pi]$.

Phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} \frac{4}{\cos^3 \alpha} + 4 \tan^3 \alpha &= \frac{3}{\cos^2 \alpha} \tan \alpha + 2\sqrt{3} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \tan \alpha + \frac{2}{\cos \alpha} \\ \Leftrightarrow 4 + 4 \sin^3 \alpha &= 3 \sin \alpha + 2\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha \\ \Leftrightarrow 3 &= \sin 3\alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \Leftrightarrow 3 = \sin 3\alpha + 2 \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) (*) \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng $-1 \leq \sin 3\alpha; \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ nên để (*) có nghiệm thì

$$\begin{cases} \sin 3\alpha = 1 \\ \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}}{\alpha \in [0; \pi]} \alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$

Câu 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} = \frac{9}{4} \end{cases}$

Giải

Nhận xét. Chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng có 3 ẩn mà chỉ có 2 phương trình nên chắc chắn đây là bài toán đánh giá bất đẳng thức, nhưng chúng ta sẽ tiếp cận bằng phương pháp đặt ẩn lượng giác hóa ở bài toán này! Như câu 7 chúng ta đã có cách đặt ẩn lượng giác, vậy câu này chúng ta buộc phải biến đổi $x + y + z = 1$ về dạng như câu 7. Ta có

$$\sqrt{\frac{xy}{z}} \sqrt{\frac{xz}{y}} + \sqrt{\frac{yz}{x}} \sqrt{\frac{yx}{z}} + \sqrt{\frac{zx}{y}} \sqrt{\frac{zy}{x}} = 1$$

| Phương pháp lượng giác hóa

Từ đó đặt $\sqrt{\frac{xy}{z}} = \tan \frac{A}{2}, \sqrt{\frac{xz}{y}} = \tan \frac{B}{2}, \sqrt{\frac{yz}{x}} = \tan \frac{C}{2}; A, B, C \in (0, \pi)$ và suy ra được A, B, C là ba góc của một tam giác. Khi đó phương trình 2 trở thành

$$\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} = \frac{1}{1+\tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{1+\tan^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{1+\tan^2 \frac{C}{2}} = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} + 2\cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 \frac{A}{2} + 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \frac{3}{2} (*)$$

Mặt khác ta lại có $\Delta' = 4\left(\cos^2 \frac{B-C}{2} - 1\right) \leq 0$

Vậy phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B-C}{2} \\ \sin \frac{B-C}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x = y = z = \frac{1}{3}$

Câu 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y = x(1-y^2) \\ 3x - x^3 = y(1-3x^2) \end{cases}$

Giải

Nhìn hệ này có vẻ rất đơn giản, nhưng bên trong vẻ ngoài yếu đuối đó lại là một một sự nguy hiểm vô cùng! Nếu như ý tưởng đầu tiên mà bạn nghĩ đến đó là đưa về phương trình đẳng cấp thì chắc chắn sẽ khó mà giải được hệ này, chúng ta cần biến đổi một chút!

$$\begin{cases} x = \frac{2y}{1-y^2} \\ y = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \end{cases}$$

Nhìn thế kia chắc các bạn đã nghĩ ra ý tưởng rồi phải không, có phải là rất giống công thức nhân 2 và nhân 3 của $\tan t$ không nào? Đặt $x = \tan \alpha \left(\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \right)$ khi đó từ phương trình (2) ta có

$$y = \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha} = \tan 3\alpha$$

Thế vào phương trình đầu ta được $x = \frac{2\tan 3\alpha}{1 - \tan^2 3\alpha} = \tan 6\alpha$.

Dẫn đến ta sẽ phải giải phương trình

$$\tan \alpha = \tan 6\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{5} \Leftrightarrow \alpha = \left\{ -\frac{2\pi}{5}; -\frac{\pi}{5}; 0; \frac{\pi}{5}; \frac{2\pi}{5} \right\}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = \left(\tan \frac{\pm 2\pi}{5}; \tan \frac{\pm 6\pi}{5} \right), \left(\tan \frac{\pm \pi}{5}; \tan \frac{\pm 3\pi}{5} \right), (0; 0)$.

Câu 12: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = xyz \\ x(y^2 - 1)(z^2 - 1) + y(x^2 - 1)(z^2 - 1) + z(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Giải

- Nếu $xyz = 0$ thì ít nhất một trong ba số x, y, z bằng 0. Giả sử $x = 0$, khi đó từ phương trình thứ nhất của hệ ta có: $y = -z$.

Thay $x = 0$ vào phương trình thứ hai của hệ ta có: $y(1 - z^2) + z(1 - y^2) = 0$ luôn đúng do $y = -z$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(0; y; z)$ với $y = -z$; $(x; 0; z)$ với $x = -z$; $(x; y; 0)$ với $x = -y$.

- Nếu $xyz \neq 0$ thì chia cả hai vế của phương trình thứ hai trong hệ ta được:

$$\frac{y^2 - 1}{2y} \cdot \frac{z^2 - 1}{2z} + \frac{x^2 - 1}{2x} \cdot \frac{z^2 - 1}{2z} + \frac{x^2 - 1}{2x} \cdot \frac{y^2 - 1}{2y} = 0 (*)$$

Đặt $x = \tan \alpha$, $y = \tan \beta$, $z = \tan \gamma$. phương trình thứ nhất của hệ thành:

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Do đó $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. Suy ra

$$\cot 2\alpha \cot 2\beta + \cot 2\beta \cot 2\gamma + \cot 2\gamma \cot 2\alpha = 1$$

Hay $\frac{y^2 - 1}{2y} \cdot \frac{z^2 - 1}{2z} + \frac{x^2 - 1}{2x} \cdot \frac{z^2 - 1}{2z} + \frac{x^2 - 1}{2x} \cdot \frac{y^2 - 1}{2y} = 1$. Do đó (*) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(0; y; z)$ với $y = -z$; $(x; 0; z)$ với $x = -z$; $(x; y; 0)$ với $x = -y$.

Câu 13: Trong các nghiệm thực (x, y, z, t) của hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + t^2 = 2 \\ xt + yz \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

Hãy tìm nghiệm sao cho tổng $y + t$ nhỏ nhất

Giải

Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$xt + yz \leq |xt + yz| \leq \sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)} = \sqrt{2}.$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + t^2 = 2 \\ xt + yz = \sqrt{2} \\ t = kx \\ z = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + t^2 = 2 \\ t = \sqrt{2}x \\ z = \sqrt{2}y \end{cases} \quad (I)$$

Ta có $(y + t)^2 = y^2 + t^2 + 2yt = 3 - x^2 - z^2 + 2xz = 3 - (x - z)^2 \leq 3 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq y + t \leq \sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = z$. Kết hợp với hệ (I) ta được:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + t^2 = 2 \\ x = z = \sqrt{2}y \\ t = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x = z = \sqrt{2}y \\ t = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{3}; y = \frac{\sqrt{3}}{3}; z = \frac{\sqrt{6}}{3}; t = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = -\frac{\sqrt{6}}{3}; y = -\frac{\sqrt{3}}{3}; z = -\frac{\sqrt{6}}{3}; t = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Suy ra $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho thỏa mãn điều kiện

$$\min(y+t) = -\sqrt{3}.$$

Cách 2.

Giả sử hệ đã cho có nghiệm. Khi đó tồn tại các góc α và β sao cho

$$x = \cos\alpha, y = \sin\alpha, z = \sqrt{2}\cos\beta, t = \sqrt{2}\sin\beta.$$

Từ bất phương trình thứ ba của hệ ta có: $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \geq 1 \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) \geq 1$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Suy ra $\sin\alpha = \cos\beta$; $\cos\alpha = \sin\beta$ và $y+t = \sin\alpha + \sqrt{2}\sin\beta = \sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha \geq -\sqrt{3}$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Suy ra $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$. Từ đó: $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}; y = -\frac{\sqrt{3}}{3}; z = -\frac{\sqrt{6}}{3}; t = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho $\min(y+t) = -\sqrt{3}$.

Câu 14: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{1-4^x}}{\log_3 y} + 2^x \sqrt{1-\log_3^2 y} = 1 \\ (1-\log_3 y)(1+2^x) = 2 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} 0 < y \neq 1 \\ |2^x| \leq 1 \\ |\log_3 x| \leq 1 \end{cases}$$

Đặt $2^x = \cos\alpha$; $\log_3 y = \cos\beta$ với $\alpha, \beta \in [0; \pi]$

Hệ phương trình đã cho thành

$$\begin{cases} \sqrt{1-\cos^2\alpha}.\cos\beta + \sqrt{1-\cos^2\beta}.\cos\alpha = 1 \\ (1-\cos\beta)(1+\cos\alpha) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = 1 \\ (1-\cos\beta)(1+\cos\alpha) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = 1 \\ (1-\cos\beta)(1+\cos\alpha) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \\ \sin\beta - \cos\beta - \sin\beta\cos\beta - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $t = \sin\beta - \cos\beta$; $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Suy ra $\sin\beta\cos\beta = \frac{1-t^2}{2}$.

Phương trình (*) thành $t - \frac{1-t^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \notin [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{cases}$

Với $t=1$ tức $\sqrt{2}\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow \beta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha=0$.

Khi đó: $\begin{cases} 2^x=1 \\ \log_3 y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ (không thỏa mãn điều kiện ban đầu)

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 15: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3y^2-2y=0 \\ 36(x\sqrt{x}+3y^3)-27(4y^2-y)+(2\sqrt{3}-9)\sqrt{x}-1=0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x \geq 0$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$3x+(3y-1)^2=1 \Leftrightarrow (\sqrt{3x})^2+(3y-1)^2=1$$

Vậy ta đặt $3y-1=\cos t, \sqrt{3x}=\sin t, t \in [0; \pi]$

Thay hết vào phương trình thứ hai, ta được

$$\begin{aligned} 36x\sqrt{x}+(2\sqrt{3}-9)\sqrt{x}+4(3y-1)^3-3(3y-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{36\sin^3 t}{3\sqrt{3}}+(2\sqrt{3}-9)\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+4\cos^3 t-3\cos t &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\sqrt{3}\sin^3 t-3\sqrt{3}\sin t+\cos 3t &= -2\sin t \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 3t-\cos 3t=2\sin t \Leftrightarrow \sin\left(3t-\frac{\pi}{6}\right) &= \sin t \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ t=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{24}; \frac{19\pi}{24}\right\} \\ t \in [0; \pi] \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{\sin^2 t}{3}; \frac{1+\cos t}{3}\right)$ với $t \in \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{24}; \frac{19\pi}{24}\right\}$

Câu 16: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y+2+x(y^2+2y)=0 \\ y+1-\frac{x^3-3x}{3x^2-1}=0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Đặt $y+1=a$. Ta có hệ $\begin{cases} 2a+x(a^2-1) \\ a=\frac{x^3-3x}{3x^2-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2a}{1-a^2} \\ a=\frac{x^3-3x}{3x^2-1} \end{cases}$

Đến đây là phương pháp lượng giác hóa quá quen thuộc, xin nhường lại cho bạn đọc giải quyết phần còn lại! Vậy hệ đã cho có nghiệm

$$\begin{aligned} (x; y) &= (0; -1), \left(\pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}; -1 \mp \left(2\sqrt{5-2\sqrt{5}} + \sqrt{5(5-2\sqrt{5})}\right)\right), \\ &\left(\pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}; -1 \mp \left(2\sqrt{5-2\sqrt{5}} - \sqrt{5(5-2\sqrt{5})}\right)\right). \end{aligned}$$

Câu 17: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \\ x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + y\sqrt{(1-z^2)(1-x^2)} + z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = x + y + z \\ x + y + z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Giải

Phân tích. Một câu hình thức vô cùng khủng, và nếu bạn nào đã từng làm quen với lượng giác thì chắc chắn bài này không hề khó, mấu chốt vẫn là xử lý những giả thiết phức tạp.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \end{cases} \Rightarrow x, y, z \in (0; 1)$

Ta đặt $x = \cos \alpha, y = \cos \beta, z = \cos \gamma$ thì $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Từ giả thiết ta có $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \frac{1 + \cos 2\gamma}{2} + \cos \alpha [\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)] = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) + \cos \alpha \cos(\beta + \gamma) + \cos \alpha \cos(\beta - \gamma) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(\beta + \gamma)(\cos(\beta - \gamma) + \cos \alpha) + \cos \alpha (\cos(\beta - \gamma) + \cos \alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos(\beta - \gamma) + \cos \alpha)(\cos(\beta + \gamma) + \cos \alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \cos \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do } \alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) &\Rightarrow \left| \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \right| < \frac{\pi}{2}; \left| \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \right| < \frac{\pi}{2}; \left| \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \right| < \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \cos \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \cos \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó từ } (*) &\text{ ta có } \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) = -1 \\ &\Rightarrow \cos(\alpha + \beta)\cos \gamma - \sin(\alpha + \beta)\sin \gamma = -1 \\ &\Rightarrow \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta - \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha = -1 \\ &\Rightarrow 1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta \quad (**) \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}; \sin \beta = \sqrt{1 - y^2}; \sin \gamma = \sqrt{1 - z^2}$$

Khi đó từ phương trình (**) ta có

$$1 + xyz = x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + y\sqrt{(1-z^2)(1-x^2)} + z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

Đến đây xin nhường lại bạn đọc giải hệ phương trình này!

Câu 18: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y^2 + 6} + y\sqrt{x^2 + 3} = 7xy(1) \\ x\sqrt{x^2 + 3} + y\sqrt{y^2 + 6} = x^2 + y^2 + 2(2) \end{cases}$

Nguyễn Hoàng Vũ

Giải

Khi nhìn thấy hệ này, chúng ta sẽ nghĩ nó đơn giản. Tuy nhiên, hệ này là 1 hệ cực kỳ khó và rất dài. Cho nên ở hệ này, mình sẽ dùng 1 phương pháp mới là lượng giác hóa. Hãy tham khảo cách sau

Đặt $x = \tan \alpha \sqrt{3}; y = \tan \beta \sqrt{6}; \alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Biến đổi phương trình (1), ta có

$$\begin{aligned} \tan \alpha \sqrt{3} \sqrt{6 \tan^2 \beta + 6} + \tan \beta \sqrt{6} \sqrt{3 \tan^2 \alpha + 3} &= 7 \tan \alpha \sqrt{3} \tan \beta \sqrt{6} \\ \Rightarrow \sqrt{3} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sqrt{6}}{\cos \beta} + \sqrt{6} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \frac{\sqrt{3}}{\cos \alpha} &= 7 \sqrt{3} \sqrt{6} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \\ \Rightarrow \sqrt{18} \sin \alpha + \sqrt{18} \sin \beta &= 7 \sqrt{18} \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow \sin \alpha + \sin \beta = 7 \sin \alpha \sin \beta \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2), ta có $\sqrt{3} \tan \alpha \sqrt{3 \tan^2 \alpha + 3} + \sqrt{6} \tan \beta \sqrt{6 \tan^2 \beta + 6} = 3 \tan^2 \alpha + 6 \tan^2 \beta + 2$

Suy ra $3 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + 6 \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} = 3 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 6 \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} + 2 \quad (4)$

Từ (3), (4) đặt $\sin \alpha = p; \sin \beta = q$ ta có hệ
$$\begin{cases} p + q = 7pq \\ \frac{3p}{1-p^2} + \frac{6q}{1-q^2} = \frac{3p^2}{1-p^2} + \frac{6q^2}{1-q^2} + 2 \end{cases}$$

Ta biến đổi phương trình sau của hệ thành

$$\frac{3p^2 - 3p}{1-p^2} + \frac{6q^2 - 6q}{1-q^2} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{3p}{p+1} + \frac{6q}{q+1} + 2 = 0$$

Suy ra $3pq + 3p + 6pq + 6p = 2pq + 2p + 2q + 2$. Hay $7pq + p + 4q = 2$.

Thế $7pq = p + q$, ta có $p + q + p + 4q = 2$.

Suy ra $= \frac{2-5q}{2} \quad (5)$, từ đó ta có phương trình

$$\frac{2-5q}{2} + q = 7q \frac{2-5q}{2} \quad \text{hay} \quad 35q^2 - 17q + 2 = 0$$

- Khi $q = \frac{2}{7} \Rightarrow p = \frac{2}{7}$.
- Khi $q = \frac{1}{5} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$.

Mặt khác ta lại có $x = \tan \alpha \sqrt{3} = \sqrt{3} \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}; y = \tan \beta \sqrt{6} = \sqrt{6} \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}$.

Vậy hệ có 2 nghiệm là $\left(\frac{2}{\sqrt{15}}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right); \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Chương

3

Phương pháp sử dụng số phức

Số phức là một công cụ còn khá mới lạ trong việc giải toán hệ phương trình, vì thế trong chương này, mình sẽ giới thiệu cho các bạn một ứng dụng của số phức trong giải hệ phương trình. Phương pháp này lợi dụng đặc điểm tương đồng giữa một đại lượng trong hệ phương trình và tính chất của số phức từ đó đưa về việc giải phương trình số phức. Không để các bạn phải chờ đợi lâu nữa, chúng ta bắt đầu nào!

A. Số phức là gì?

I. Định nghĩa số phức.

Định nghĩa 1.

- Cho số phức z là một biểu thức có dạng $z = a + bi$, trong đó a và b là những số thực và i là số thỏa mãn $i^2 = -1$.
- i được gọi là đơn vị ảo, a là phần thực và b là phần ảo của số phức z .
- Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Đặc biệt ta có

- Số phức $z = a + 0i$ có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là $z = a + 0.i = a$.
- Số phức $z = 0 + bi$ có phần thực bằng 0 được coi là số ảo (số thuần ảo) và viết là $z = 0 + bi = bi$.
- Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

Định nghĩa 2. Cho hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$)

Ta có $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.

II. Biểu diễn số phức trong hệ tọa độ Oxy.

- Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ.
- Mỗi điểm $M(a; b)$ biểu diễn một số phức $z = a + bi$, ta kí hiệu là $M(z)$.

Mặt phẳng tọa độ với việc biểu diễn số phức còn gọi là mặt phẳng phức.

III. Các tính chất của số phức.

1. Phép cộng.

Định nghĩa

Với $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ ($a, a', b, b' \in \mathbb{R}$), ta định nghĩa $z + z' = (a + a') + (b + b')i$

Tính chất

- Tính chất giao hoán: $z + z' = z' + z, \forall z, z' \in \mathbb{C}$

- Tính chất kết hợp: $(z + z') + z'' = z + (z' + z''), \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$
- Cộng với 0: $z + 0 = 0 + z = z, \forall z \in \mathbb{C}$.
- Số đối: Với mọi số phức $z = a + bi$, ta gọi số đối của z là $-z$, ký hiệu $-z = -a - bi$, thì ta có $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

2. Phép trừ.

Định nghĩa 4. Với hai số phức z, z' , ta định nghĩa: $z - z' = z + (-z')$, hay

Nếu $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ thì $z - z' = (a - a') + (b - b')i$

Biểu diễn hình học của phép cộng và phép trừ

- Trong mặt phẳng phức, ta cũng coi vectơ $\vec{u} = (a; b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$. Như vậy số phức z được biểu diễn bởi điểm M cũng có nghĩa là được biểu diễn bởi vectơ $\vec{OM}$.
- Nếu vectơ $\vec{u}, \vec{u}'$ lần lượt biểu diễn số phức z, z' thì:
 $+$ $\vec{u} + \vec{u}'$ lần lượt biểu diễn số phức $z + z'$,
 $+$ $\vec{u} - \vec{u}'$ lần lượt biểu diễn số phức $z - z'$.

3. Phép nhân số phức.

Định nghĩa 5. Với $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i (a, a', b, b' \in \mathbb{R})$, ta định nghĩa:

$$zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

Tính chất.

- Tính chất giao hoán: $zz' = z'z, \forall z, z' \in \mathbb{C}$
- Tính chất kết hợp: $(zz')z'' = z(z'z''), \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$
- Nhân với 1: $1.z = z.1 = z, \forall z \in \mathbb{C}$

Chú ý. Với $k \in \mathbb{R}, z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ thì $kz = ka + kbi$ và $0z = 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

4. Số phức liên hợp và môđun của số phức.

Số phức liên hợp.

Định nghĩa 6. Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ là số phức $a - bi$, ký hiệu là $\bar{z}$.

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Nhận xét.

- $z.\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
- z và $\bar{z}$ được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox .

Module của số phức.

Định nghĩa 7. Môđun của số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ là số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$, ký hiệu là $|z|$.

Nhận xét.

- Nếu $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ thì $|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.
- Nếu $z = 0$ thì $|z| = 0$.

5. Phép chia cho số phức khác 0.

Định nghĩa 8.

- Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là số phức ký hiệu là z^{-1}

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

| Phương pháp sử dụng số phức

- Phép chia số phức z' cho số phức z khác 0: $\frac{z'}{z} = z'z^{-1} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2}$.

6. Căn bậc hai của số phức.

Định nghĩa

- Cho số phức w . Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w .
- Mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình $z^2 - w = 0$

Trường hợp w là số thực. Căn bậc hai của 0 là 0

Xét số thực $w = a \neq 0$

- Khi $a > 0$ thì có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}, -\sqrt{a}$
- Khi $a < 0$ thì có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}i, -\sqrt{-a}i$

Trường hợp $w = a + bi$: ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$)

- Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)
- z là căn bậc hai của w

$$\Leftrightarrow z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}.$$

- Mỗi nghiệm (x, y) của hệ phương trình trên cho ta một căn bậc hai $z = x + yi$ của số phức $w = a + bi$.

7. Dạng lượng giác của số phức.

Argument của số phức khác 0.

Định nghĩa 1. Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là một điểm trong mp phức biểu diễn số phức z . Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác có tia đầu Ox , tia cuối OM được gọi là argumen của z .

Chú ý.

- Nếu φ là một argumen của z thì mọi argumen của z có dạng $\varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Hai số phức z mà mz (m là số thực nguyên dương) có argumen sai khác $k2\pi$, vì các điểm biểu diễn chúng thuộc cùng một tia gốc O .

Dạng lượng giác của số phức.

Định nghĩa 2. Cho số phức $z \neq 0$, gọi r là môđun của z và φ là argument của z thì số phức z được viết dưới dạng $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Chú ý.

- Dạng $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ được gọi là dạng lượng giác của z .
- Dạng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được gọi là dạng đại số của z .

Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác.

Định lí. Nếu $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ và $z' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$ ($r \geq 0, r' \geq 0$) thì

$$zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')] \text{ và } \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i \sin(\varphi - \varphi')](z' \neq 0).$$

Công thức Moivre. $[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

Đặc biệt khi $r = 1$, ta có $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.

Áp dụng công thức Moivre để tính căn bậc n của số phức

Căn bậc n của số phức w là số phức z thỏa mãn $z^n = w$

- Căn bậc n của 0 là 0.
- Với $w \neq 0$, $w = R(\cos \theta + i \sin \theta), R > 0$, ta đặt $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ thì ta có

$$z^n = w \Leftrightarrow r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = R (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\varphi = \theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Lấy $k = 0, 1, \dots, n-1$, ta được n giá trị của φ .

- Một số phức $w = R(\cos \theta + i \sin \theta)$, $R > 0$, có n căn bậc n ($n \geq 3$) được biểu diễn trong mặt phẳng phức bởi n điểm là n đỉnh của n -giác đều nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính $\sqrt[n]{R}$.

8. Phương trình bậc hai.

Xét phương trình: $Az^2 + Bz + C = 0$ (A, B, C là số phức và $A \neq 0$) (1)

Ta có $\Delta = B^2 - 4AC$

- Nếu $\Delta \neq 0$, Δ có hai căn bậc hai là δ và $-\delta$, phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{-B + \delta}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - \delta}{2A}$$
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $z_1 = z_2 = \frac{-B}{2A}$.

IV. Định lý cơ bản của đại số.

Định lý. Mọi phương trình bậc n , $n \geq 1$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt). Để giải một phương trình ẩn phức $f(z) = 0$ (1) với $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, ta thường giải bằng cách tách phần thực và phần ảo. Tức là viết lại phương trình dưới dạng

$$u(x, y) + v(x, y)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x, y) = 0 \\ v(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Điều đó có nghĩa là từ việc giải một phương trình với ẩn là số phức ta đã đưa về việc giải hệ phương trình đại số. Một câu hỏi tự nhiên đặt ra? Liệu có thể chuyển việc giải một hệ phương trình đại số về việc giải một phương trình với ẩn phức hay không? Chẳng hạn

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y) \\ h(x, y) = k(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow f(x, y) + ih(x, y) = g(x, y) + ik(x, y),$$

đưa ra giải phương trình $F(z) = 0$.

B. Sử dụng số phức để giải một số hệ phương trình thường gặp như hệ đẳng cấp, hệ đối xứng.

Câu 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 5 & (*) \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3} & (**) \end{cases}$$

Giải

Cách 1. Không sử dụng số phức

Nhận xét. Hệ trên là hệ đẳng cấp bậc ba.

Hệ được viết lại
$$\begin{cases} 2\sqrt{3}x^3 - 6\sqrt{3}xy^2 = 5\sqrt{3} \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3} \end{cases}$$

Khi đó ta có $\sqrt{3}x^3 - 3x^2y - 3\sqrt{3}xy^2 + y^3 = 0$ (1)

| Phương pháp sử dụng số phức

- Xét $y = 0$ thay vào phương trình (1) suy ra $x = 0$ (không thỏa hệ)
- Với $y \neq 0$, đặt $x = ty$ thay vào phương trình (1), ta được

$$\sqrt{3}t^3y^3 - 3t^2y^3 - 3\sqrt{3}ty^3 + y^3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}t^3 - 3t^2 - 3\sqrt{3}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}(t^3 - 3t) = 3t^2 - 1 \quad (2)$$

Phương trình (2) không có nghiệm hữu tỷ.

Ta thấy $t = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ không phải là nghiệm của (2) nên $(2) \Leftrightarrow \frac{t^3 - 3t}{3t^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (3)$

Đặt $t = \tan u$, $u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó (3) được viết lại

$$\frac{\tan^3 u - 3\tan u}{3\tan^2 u - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan 3u = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $u \in \left\{-\frac{5\pi}{18}; \frac{\pi}{18}; \frac{7\pi}{18}\right\}$.

Với $x = ty$ thay vào phương trình $(**)$ ta được $6t^2y^3 - 2y^3 = 5\sqrt{3} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{3}}{6t^2 - 2}}$

Suy ra hệ có ba nghiệm

$$\left(-\tan \frac{5\pi}{18} \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{3}}{6\tan^2 \frac{5\pi}{18} - 2}}; \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{3}}{6\tan^2 \frac{5\pi}{18} - 2}}\right), \left(\tan \frac{\pi}{18} \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{3}}{6\tan^2 \frac{\pi}{18} - 2}}; \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{3}}{6\tan^2 \frac{\pi}{18} - 2}}\right), \\ \left(\tan \frac{7\pi}{18} \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{3}}{6\tan^2 \frac{7\pi}{18} - 2}}; \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{3}}{6\tan^2 \frac{7\pi}{18} - 2}}\right)$$

Cách 2. Sử dụng số phức

Nhân hai vế của phương trình $(**)$ cho i và cộng với $(*)$ ta được

$$2x^3 - 6xy^2 + 6x^2yi - 2y^3i = 5 + 5\sqrt{3}i \\ \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2y + 6x(yi)^2 + 2(yi)^3 = 5 + 5\sqrt{3}i \Leftrightarrow (x + iy)^3 = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Đặt $z = x + iy$. Khi đó $z^3 = 5\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

- Với $z = \sqrt[3]{5}\left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}\right)$ thì $x = \sqrt[3]{5} \cos \frac{\pi}{9}; y = \sqrt[3]{5} \sin \frac{\pi}{9}$.
- Với $z = \sqrt[3]{5}\left(\cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$ thì $x = \sqrt[3]{5} \cos \frac{7\pi}{9}; y = \sqrt[3]{5} \sin \frac{7\pi}{9}$.
- Với $z = \sqrt[3]{5}\left(\cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right)\right)$ thì $x = \sqrt[3]{5} \cos \frac{13\pi}{9}; y = \sqrt[3]{5} \sin \frac{13\pi}{9}$.

Nhận xét. So với cách giải thông thường, phương pháp sử dụng số phức cũng dễ dàng thực hiện đồng thời cách giải cho ta nghiệm gọn hơn nhiều, dù cả hai cách giải đều biểu diễn nghiệm dưới dạng lượng giác nhưng ở cách sử dụng số phức nghiệm có vẻ “đẹp” hơn, cũng góp phần giúp học sinh có hứng thú hơn với phương pháp mới này.

Câu 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 6x^2y^2 = \sqrt{3} & (*) \\ 4x^3y - 4xy^3 = 1 & (**) \end{cases}$$

Giải

Cách 1. Không sử dụng số phức

Nhận xét. Hệ trên là hệ đẳng cấp bậc bốn. Có thể giải theo cách 1 của Bài toán 1.

Phương pháp sau đưa về hệ phương trình hệ quả.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^4 + y^4 - 6x^2y^2 = \sqrt{3} \\ 4x^3y - 4xy^3 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 = \sqrt{3} \\ 4xy(x^2 - y^2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y)^2(x + y)^2 - 4x^2y^2 = \sqrt{3} \\ 16x^2y^2(x - y)^2(x + y)^2 = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} [(x + y)^2 - 4xy](x + y)^2 - 4x^2y^2 = \sqrt{3} \\ 16x^2y^2[(x + y)^2 - 4xy](x + y)^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Bình phương hai vế cho ta hệ phương trình hệ quả

Đặt $S = x + y, P = xy$. Ta có
$$\begin{cases} (S^2 - 4P)^2 S^2 - 4P^2 = \sqrt{3} \quad (1) \\ 16P^2(S^2 - 4P)S^2 = 1 \end{cases}$$

Suy ra $16P^2(4P^2 + \sqrt{3}) = 1 \Leftrightarrow 64P^2 + 16\sqrt{3}P^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow P^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{8}$

- $P = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{8}}$, thay vào (1), ta được $S = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{8} - 1}{2}}$
- $P = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{8}}$, thay vào (1), ta được $S = \pm \sqrt{\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{8} - 1}{2}}$

Thử lại, suy ra hệ có bốn nghiệm

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{3} + 1}}{2}; \frac{\sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{3} - 1}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{3} - 1}}{2}; -\frac{\sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{3} + 1}}{2} \right), \\ &\left(\frac{-\sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{3} - 1}}{2}; \frac{\sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{3} + 1}}{2} \right) \text{ và } \left(\frac{-\sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{3} + 1}}{2}; -\frac{\sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{3} - 1}}{2} \right) \end{aligned}$$

Cách 2. Sử dụng số phức

Nhân hai vế của phương trình $(**)$ cho i và cộng với $(*)$ ta được

$$x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 4x^3yi - 4xy^3i = \sqrt{3} + i \Leftrightarrow (x + iy)^4 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

Đặt $z = x + iy$. Khi đó $z^4 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

- Với $z = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24} \right)$ thì $x = \sqrt[4]{2} \cos \frac{\pi}{24}; y = \sqrt[4]{2} \sin \frac{\pi}{24}$.
- Với $z = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{24} + i \sin \frac{13\pi}{24} \right)$ thì $x = \sqrt[4]{2} \cos \frac{13\pi}{24}; y = \sqrt[4]{2} \sin \frac{13\pi}{24}$.
- Với $z = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{25\pi}{24} + i \sin \frac{25\pi}{24} \right)$ thì $x = \sqrt[4]{2} \cos \frac{25\pi}{24}; y = \sqrt[4]{2} \sin \frac{25\pi}{24}$.
- Với $z = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{37\pi}{24} + i \sin \frac{37\pi}{24} \right)$ thì $x = \sqrt[4]{2} \cos \frac{37\pi}{24}; y = \sqrt[4]{2} \sin \frac{37\pi}{24}$.

Câu 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x = 0 & (*) \\ y^3 - 3x^2y - 3x^2 + 3y^2 + 3y + 9 = 0 & (**) \end{cases}$$

Giải

Cách 1. Không sử dụng số phức

Hệ được viết lại
$$\begin{cases} x(x^2 - 3y^2 - 6y - 3) = 0 & (*) \\ (y+1)^3 - 3x^2(y+1) + 8 = 0 & (**) \end{cases}$$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 3(y+1)^2$

- $x = 0$ thay vào phương trình $(**)$ suy ra $y = -3$.
- $x^2 = 3(y+1)^2$ thay vào phương trình $(**)$ suy ra $(y+1)^3 = 1 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Suy ra hệ có ba nghiệm $(0; -3)$, $(\sqrt{3}; 0)$ và $(-\sqrt{3}; 0)$

Cách 2. Sử dụng số phức.

Nhân hai vế của phương trình $(**)$ cho $-i$ và cộng với $(*)$ ta được

$$\begin{aligned} (x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i) + 3i(x^2 + 2xyi - y^2) - 3(x + yi) - 9i &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + iy)^3 + 3i(x + iy)^2 - 3(x + yi) - 9i &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $z = x + iy$. Khi đó $z^3 + 3iz^2 - 3z - 9i = 0 \Leftrightarrow (z + i)^3 = 8i \Leftrightarrow (z + i)^3 + (2i)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow (z + i + 2i)[(z + i)^2 - 2i(z + i) - 4] = 0 \Leftrightarrow (z + 3i)(z^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3i \\ z = \sqrt{3} \\ z = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra nghiệm của hệ là $(0; -3)$, $(\sqrt{3}; 0)$ và $(-\sqrt{3}; 0)$.

Câu 4: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 3x = 0 \\ y^3 - 3x^2y - 6xy - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình đã cho tương đương
$$\begin{cases} (x+1)^3 - 3y^2(x+1) = 1 \\ 3(x+1)^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

Lấy phương trình thứ nhất cộng với phương trình thứ 2 nhân i ta được

$$(x+1)^3 - 3y^2(x+1) + i[3(x+1)^2y - y^3] = 1 + i$$

$$\Leftrightarrow (x+1+iy)^3 = 1+i \Rightarrow z = x+1+iy \text{ là một căn bậc 3 của } i+1$$

Ta có $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ nên $i+1$ có căn bậc 3 là

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{4} + i\sin\frac{17\pi}{4}\right)$$

Vậy ta được 3 nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt[3]{2}\cos\frac{\pi}{12} \\ y = \sqrt[3]{2}\sin\frac{\pi}{12} \end{cases}, \begin{cases} x = -1 + \sqrt[3]{2}\cos\frac{3\pi}{4} \\ y = \sqrt[3]{2}\sin\frac{3\pi}{4} \end{cases}, \begin{cases} x = -1 + \sqrt[3]{2}\cos\frac{17\pi}{12} \\ y = \sqrt[3]{2}\sin\frac{17\pi}{12} \end{cases}$$

Câu 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 - x^3 - 6x^2y^2 + 6x^2y - 4x^2 + 3xy^2 + 2xy - x + y^4 - 2y^3 + 4y^2 - 4y = 0 & (1) \\ 4x^3y - 2x^3 - 3x^2y - x^2 - 4xy^3 + 6xy^2 + 6xy^2 + 6xy^2 + 4x + y^3 + y^2 - y + 13 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Lấy $(1) + i(2)$ ta được $(x + yi)^4 - (1 + 2i)(x + yi)^3 - (4 + i)(x + yi)^2 - (1 - 4i)(x + yi) + 1 + 3i = 0$

Đặt $z = x + yi$ ta được $z^4 - (1 + 2i)z^3 - (4 + i)z^2 - (1 - 4i)z + 1 + 3i = 0$

$$\Leftrightarrow (z + 1)^2(z - 2 - i)(z - 1 - i) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = 2 + i \\ z = 1 + i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, y = 0 \\ x = 2, y = 1 \\ x = 1, y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(-1; 0), (2; 1), (1; 1)$.

Câu 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4) = \sqrt{3} & (1) \\ y(y^4 - 10x^2y^2 + 5x^4) = -1 & (2) \end{cases}$

Giải

Lấy $(1) + i(2)$ ta được $x^5 + 5xy^4 - 10y^2x^3 + i(y^5 + 5x^4y - 10x^2y^3) = \sqrt{3} - i$

$$\Leftrightarrow (x + yi)^5 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{-\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow x + yi = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{-\pi + k2\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{-k2\pi}{5} \right), (k = 0, 1, \dots, 4)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\sqrt[5]{2} \cos \frac{-\pi + k2\pi}{5}; \sqrt[5]{2} \sin \frac{-\pi + k2\pi}{5} \right), (k = 0, 1, \dots, 4)$

Câu 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^6 - 15y^2x^4 + 15y^4x^2 - y^6 = \frac{1}{2} & (1) \\ 6yx^5 - 20y^3x^3 + 6y^5x = \frac{\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$

Giải

Lấy $(1) + i(2)$ ta được $x^6 - 15y^2x^4 + 15y^4x^2 - y^6 + i(6yx^5 - 20y^3x^3 + 6y^5x) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow (x + yi)^6 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x + yi = \cos \frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{6} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{6}, (k = 0, 1, \dots, 5)$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{6}; \sin \frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{6} \right), (k = 0, 1, \dots, 5)$

Câu 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^7 - 21y^2x^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x = \frac{1}{\sqrt{2}} & (1) \\ y^7 - 21x^2y^5 + 35x^4y^3 - 7x^6y = -\frac{1}{\sqrt{2}} & (2) \end{cases}$$

Giải

Lấy (1) + i(2) ta được

$$x^7 - 21y^2x^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x + i(-y^7 + 21x^2y^5 - 35x^4y^3 + 7x^6y) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow (x + yi)^7 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x + yi = \cos \frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{7} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{7}, (k = 0, 1, \dots, 6)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{7}; \sin \frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{7} \right), (k = 0, 1, \dots, 6).$

Sử dụng số phức để giải một số hệ phương trình khác.

Chủ yếu các hệ có dạng chứa biểu thức $x^2 + y^2$ hoặc biến đổi đưa về dạng đó

Câu 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 & (*) \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 & (**) \end{cases}$$

Giải

Cách 1. Không sử dụng số phức.

Điều kiện $x^2 + y^2 \neq 0$. Xét $x = 0$ khi đó $y \neq 0$, hệ được viết lại
$$\begin{cases} \frac{-1}{y} = 3 \\ y - \frac{3}{y} = 0 \end{cases}.$$

Suy ra hệ vô nghiệm. Do đó điều kiện $x \neq 0$ và $y \neq 0$, khi đó nhân phương trình (*) với x và phương trình (**) với y , ta được

$$\begin{cases} xy + \frac{3xy - y^2}{x^2 + y^2} = 3y \\ xy - \frac{x^2 + 3xy}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2xy - 1 = 3y \Rightarrow x = \frac{3y + 1}{2y}$$

Thay vào phương trình (2) ta được $y \left[\left(\frac{3y + 1}{2y} \right)^2 + y^2 \right] - \frac{3y + 1}{2y} - 3y = 0$

$$\Leftrightarrow y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4y} = 0 \Leftrightarrow y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 1 = 0 \\ 4y^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Suy ra nghiệm của hệ ban đầu là $(2; 1)$ và $(1; -1)$.

Cách 2. Sử dụng số phức.

Ta nhân hai vế của phương trình (*) của hệ với i và cộng hai phương trình lại ta được

$$\begin{aligned} x + yi + \frac{3x - yi - (x + 3y)i}{x^2 + y^2} &= 3 \Leftrightarrow x + yi + \frac{3(x - yi) - i(x - yi)}{x^2 + y^2} = 3 \\ \Leftrightarrow x + yi + \frac{(3 - i)(x - yi)}{x^2 + y^2} &= 3 \Leftrightarrow z + \frac{(3 - i)\bar{z}}{|z|^2} - 3 = 0, z = x + yi \\ \Leftrightarrow z + \frac{3 - i}{z} - 3 &= 0; \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 - i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + i \\ z = 1 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 1 \\ x = 1; y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(2; 1)$ và $(1; -1)$.

Câu 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + 4 = \frac{12x + 11y}{x^2 + y^2} & (*) \\ y - x + 3 = \frac{11x - 12y}{x^2 + y^2} & (**) \end{cases}$

Giải

Cách 1. Không sử dụng số phức

Điều kiện $x^2 + y^2 \neq 0$. Xét $x = 0$ khi đó $y \neq 0$, hệ được viết lại

$$\begin{cases} y + 4 = \frac{11}{y} & (*) \\ y + 3 = \frac{-12}{y} & (**) \end{cases}$$

Ta thấy phương trình (**) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm. Suy ra điều kiện $x \neq 0$ và $y \neq 0$, khi đó nhân phương trình (*) với x và phương trình (**) với y , ta được

$$\begin{cases} x^2 + xy + 4x = \frac{12x^2 + 11xy}{x^2 + y^2} \\ y^2 - xy + 3y = \frac{11xy - 12y^2}{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 3y = 12 & (1) \end{cases}$$

Nhân phương trình (*) với y và phương trình (**) với x , ta được

$$\begin{cases} xy + y^2 + 4y = \frac{12xy + 11y^2}{x^2 + y^2} \\ xy - x^2 + 3x = \frac{11x^2 - 12xy}{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 + 2xy + 4y + 3x = 11 & (2) \end{cases}$$

Từ (1), (2) ta được

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 3y = 12 \\ y^2 - x^2 + 2xy + 4y + 3x = 11 \end{cases}$$

Đặt $x = a - \frac{1}{4}$, $y = b - \frac{7}{4}$, ta được hệ

$$\begin{cases} -a^2 + b^2 + 2ab = \frac{119}{8} \\ a^2 + b^2 + 2ab = \frac{79}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{5}{2} \\ ab = \frac{99}{8} \end{cases}$$

Giải hệ tìm được $a = \pm \frac{9}{4}$ và $b = \pm \frac{11}{4}$. Suy ra nghiệm của hệ ban đầu là $(2; 1)$ và $(-\frac{5}{2}; -\frac{9}{2})$.

Cách 2. Sử dụng số phức.

Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0$. Nhân hai vế của phương trình (**) cho i và cộng với (*) ta được

$$(x + yi)(1 - i) + 4 + 3i = \frac{(x - yi)(12 + 11i)}{x^2 + y^2}$$

| Phương pháp sử dụng số phức

Đặt $z = x + iy$. Khi đó $z(1-i) + 4 + 3i = \frac{\bar{z}(12+11i)}{z \cdot \bar{z}} \Leftrightarrow z^2(1-i) + (4+3i)z - (12+11i) = 0$ (2)

Phương trình (2) có 2 nghiệm $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2}i$.

Suy ra của hệ phương trình là $(2;1)$ và $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right)$.

Câu 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - x + 1 = x^2 - 2xy - y^2 \\ y^3 - 3x^2y + y - 1 = y^2 - 2xy - x^2 \end{cases}$$

Giải

Nhận thấy rằng phương trình bên dưới sẽ phải được nhân thêm i để có thể ảo hóa, lý do là vì nó chứa $(y^3 - 3x^2y)$, đây là thành phần ảo trong khai triển mũ ba của số phức z .

Khi đó hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - x + 1 - x^2 + 2xy + y^2 = 0 \\ i(y^3 - 3x^2y + y - 1 - y^2 + 2xy + x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 - x + 1 - x^2 + 2xy + y^2 - i(y^3 - 3x^2y + y - 1 - y^2 + 2xy + x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow [x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i] - (x^2 - y^2 + 2xyi) - i(x^2 - y^2) + 2xy + 1 - x - (y - 1)i = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 - z^2 - i(x^2 - y^2 + 2xyi) - (x + yi) + i + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 - (1+i)z^2 - z + 1 + i = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - iz - 1 - i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \\ z = 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 0 \\ x = -1; y = 0 \\ x = 1; y = 1 \end{cases}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!

Câu 8: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - \frac{2}{y^2} - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2}x - 1) - \frac{xy^2}{x^2y^2 + 1} = 0 \\ 4x + \frac{y^2}{x^2y^2 + 1} = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Giải

Phân tích. Dựa vào đặc điểm của hiệu $\left(2x^2 - \frac{2}{y^2}\right)$ và các phân số ở cả hai phương trình, ta thấy rằng nếu chia cả tử và mẫu của từng phân số cho y^2 thì hệ phương trình đã cho nói chung chỉ chứa hai ẩn $\left(x; \frac{1}{y}\right)$. Ta biến đổi hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} 2x^2 - \frac{2}{y^2} - (2 + \sqrt{2})x - \frac{2x}{2x^2 + \frac{2}{y^2}} = -\sqrt{2} - 1 \\ 4x + \frac{2}{2x^2 + \frac{2}{y^2}} = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{2}x \\ v = \frac{\sqrt{2}}{y} \end{cases} \text{ hệ phương trình tương đương } \begin{cases} u^2 - v^2 - (\sqrt{2} + 1)u - \frac{\sqrt{2}u}{u^2 + v^2} = -\sqrt{2} - 1 \\ 2u + \frac{\sqrt{2}}{u^2 + v^2} = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

Đến đây, ta nhận thấy có một chút thiếu sót rất ngẫu nhiên trùng hợp giữa các thành phần trong hệ với nhau. Cụ thể là ta có $(u^2 - v^2), 2u$ mà không phải là $2uv$, ta có $\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{1}{u^2 + v^2}$ mà không phải là $\frac{v}{u^2 + v^2}$. Do đó, nếu chỉ cần nhân thêm một lượng v vào phương trình dưới thì sẽ bù đắp được tất cả những thiếu sót có ở cả hai thành phần. Phương trình tương đương

$$\begin{cases} u^2 - v^2 - (\sqrt{2} + 1)u - \frac{\sqrt{2}u}{u^2 + v^2} = -\sqrt{2} - 1 \\ 2uv + \frac{\sqrt{2}v}{u^2 + v^2} = (\sqrt{2} + 1)v \end{cases}$$

Bây giờ ta có thể nhận ra các thành phần cần thiết để tạo ra một phương trình số phức đã xuất hiện đầy đủ. Công việc giải phương trình số phức còn lại không còn là vấn đề.

Lời giải

Điều kiện $y \neq 0$.

$$\text{Hệ phương trình tương đương } \begin{cases} 2x^2 - \frac{2}{y^2} - (2 + \sqrt{2})x - \frac{2x}{2x^2 + \frac{2}{y^2}} = -\sqrt{2} - 1 \\ 4x + \frac{2}{2x^2 + \frac{2}{y^2}} = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{2}x \\ v = \frac{\sqrt{2}}{y} (v \neq 0) \end{cases}, \text{ khi đó ta thu được hệ phương trình}$$

$$\begin{cases} u^2 - v^2 - (\sqrt{2} + 1)u - \frac{\sqrt{2}u}{u^2 + v^2} = -\sqrt{2} - 1 \\ 2u + \frac{\sqrt{2}}{u^2 + v^2} = \sqrt{2} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 - (\sqrt{2} + 1)u - \frac{\sqrt{2}u}{u^2 + v^2} = -\sqrt{2} - 1 \\ 2uvi + \frac{\sqrt{2}vi}{u^2 + v^2} = (\sqrt{2} + 1)vi \end{cases}$$

Cộng 2 phương trình cho nhau ta được

$$(u^2 + 2uvi - v^2) - \frac{\sqrt{2}(u - vi)}{u^2 + v^2} - (\sqrt{2} + 1)(u + vi) + \sqrt{2} + 1 = 0 (*)$$

Đặt $z = u + vi$ khi đó phương trình (*) trở thành

$$\begin{aligned} z^2 - \frac{\sqrt{2}}{z} - (\sqrt{2} + 1)z + \sqrt{2} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow z^3 - (\sqrt{2} + 1)z^2 + (\sqrt{2} + 1)z - \sqrt{2} &= 0 \Leftrightarrow (z - \sqrt{2})(z^2 - z + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2} \\ z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + vi = \sqrt{2} \\ u + vi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ u + vi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = \sqrt{2} \\ v = 0(l) \end{cases} \\ \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} u = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ v = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases}; \begin{cases} u = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ v = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$

Câu 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \frac{2\sqrt{x}}{x+y} = 1+y \\ \frac{1}{x+y} + \frac{1}{2\sqrt{y}} = \sqrt{x} \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x+y > 0 \end{cases}$. Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} x - y + \frac{2\sqrt{x}}{x+y} = 1 \\ 2\sqrt{xy} - \frac{2\sqrt{y}}{x+y} = 1 \end{cases}$

Cộng 2 vế phương trình ta được $x - y + 2\sqrt{xy} + \frac{2(\sqrt{x} - \sqrt{yi})}{x+y} = 1 + i$. Đặt $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$ ta được

$$z^2 + \frac{2}{z} = 1 + i \Leftrightarrow z^3 - (1+i)z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1-i)[z^2 + (1+i)z - 1 + i] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1+i \\ z^2 + (1+i)z - 1 + i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1+i \\ z = \frac{-1+\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} - \frac{-1+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}i \\ z = \frac{-1-\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} + \frac{-1+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}i \end{cases}$$

Mặt khác $\sqrt{x}, \sqrt{y} \geq 0$ không âm, nên phần thực và phần ảo của z phải không âm nên ta được

$$z = 1+i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Câu 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x-1)(x^2+y^2) + 2y = 0 \\ (2y-3)(x^2+y^2) + 2x = 0 \end{cases}$

Giải

Ta thấy xuất hiện đại lượng quen thuộc $(x^2 + y^2)$ vậy vẫn theo cách làm cũ ta bắt đầu thôi!

Với $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ là một nghiệm của hệ phương trình!

Với $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ hệ phương trình đã cho tương đương.

$$\begin{cases} \frac{2x}{x^2+y^2} + 2y - 3 = 0 \\ \frac{2y}{x^2+y^2} + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2xi}{x^2+y^2} + 2yi - 3i = 0 \\ \frac{2y}{x^2+y^2} + 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

Cộng 2 vế với nhau ta được $\frac{2(xi+y)}{x^2+y^2} + 2(x+yi) = 1+3i$.

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ ta được $\frac{2i}{z} + 2z = 1 + 3i \Leftrightarrow 2z^2 - (1+3i)z + 2i = 0$.

Ta có $\Delta = (1+3i)^2 - 16i = 8 - 10i = \left(\sqrt{\sqrt{41}-4} - \sqrt{\sqrt{41}+4}i\right)^2$.

Khi đó ta được $\begin{cases} z = \frac{1 + \sqrt{\sqrt{41}-4} + (3 - \sqrt{41} + 4)}{4} \\ z = \frac{1 - \sqrt{\sqrt{41}-4} + (3 + \sqrt{41} + 4)}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{\sqrt{41}-4}}{4} \\ y = \frac{3 - \sqrt{\sqrt{41}+4}}{4} \\ x = \frac{1 - \sqrt{\sqrt{41}-4}}{4} \\ y = \frac{3 + \sqrt{\sqrt{41}+4}}{4} \end{cases} - \text{thỏa mãn}$

Câu 11: Giải hệ phương trình trên tập số phức $\begin{cases} x(x-y)(x-z) = 3(1) \\ y(y-x)(y-z) = 3(2) \\ z(z-x)(z-y) = 3(3) \end{cases}$

Romania MO 2002

Giải

Từ hệ ta thấy được rằng $x, y, z \neq 0$ và đôi một khác nhau!

Từ (1), (2) ta có $x(x-y)(x-z) = y(y-x)(y-z) \Rightarrow x(x-z) = -y(y-z)$

Hay $x^2 + y^2 = xz + yz$. Tương tự hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x^2 + y^2 = xz + yz \\ y^2 + z^2 = yx + zx(4) \\ z^2 + x^2 = zy + xy \end{cases}$

Cộng vế với vế ta được $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$

Kết hợp với (4) ta có $x^2 = yz, y^2 = zx, z^2 = xy$ và x, y, z đôi một khác nhau nên

$$x = \sqrt[3]{a}, y = \varepsilon \sqrt[3]{a}, z = \varepsilon^2 \sqrt[3]{a}$$

Với $\varepsilon^3 = 1, 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. Mà $x(x-y)(x-z) = 3$ nên $a(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2) = 3$

Ta có $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2) = 1 - \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 = 3$ nên $a = 1$

| Phương pháp sử dụng số phức

Vậy các số phức cần tìm là hoán vị của bộ ba $(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$.

Câu 12: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(1 - \frac{12}{3x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{y}\left(1 + \frac{12}{3x+y}\right) = 6 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq 0; y \geq 0; y + 3x \neq 0$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{3x} \geq 0 \\ b = \sqrt{y} \geq 0 \end{cases}$.

Do $x = 0, y = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên ta xét $x, y \neq 0$.

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{12}{a^2+b^2}\right) = 2 \\ b\left(1 + \frac{12}{a^2+b^2}\right) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{12a}{a^2+b^2} = 2\sqrt{3} \\ b + \frac{12b}{a^2+b^2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{12a}{a^2+b^2} = 2\sqrt{3} \\ bi + \frac{12bi}{a^2+b^2} = 6i \end{cases}$$

Cộng 2 phương trình lại suy ra $a + bi - 12 \cdot \frac{a-bi}{a^2+b^2} = 2\sqrt{3} + 6i (*)$

Đặt $z = a + bi (a, b > 0)$ nên $\frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{1}{z}$. Khi đó phương trình $(*)$ tương đương

$$z - \frac{12}{z} = 2\sqrt{3} + 6i \Leftrightarrow z^2 - 2(\sqrt{3} + 3i)z - 12 = 0$$

Ta có $\Delta' = 6 + 6\sqrt{3}i$, ta có $\sqrt{|\Delta'|} = 3 + i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{3} + 3 + (3 + \sqrt{3})i \\ z = \sqrt{3} - 3 + (3 - \sqrt{3})i \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện ta được $\begin{cases} a = \sqrt{3} + 3 \\ b = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$

Từ đây suy ra nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (4 + 2\sqrt{3}; 3 + \sqrt{3})$

Nhận xét. Ta có thể sử dụng công thức sau để tìm $\sqrt{|\Delta'|}$

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + k2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k2\pi}{n} \right)$$

Cụ thể ta có $6 + 6\sqrt{3}i = 12 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 12 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ nên sẽ có 2 căn bậc 2 là

$$\pm \sqrt{12} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \pm \sqrt{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \pm (3 + \sqrt{3}i) \Rightarrow \sqrt{|\Delta'|} = 3 + \sqrt{3}i$$

Câu 13: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x^2+y^2} = x-5y-2 \\ (x-4)\sqrt{x^2+y^2} = 5x+y \end{cases}$$

Giải

Bài này không còn xuất hiện đại lượng $(x^2 + y^2)$ nhưng lại xuất hiện $\sqrt{x^2 + y^2}$, giờ nếu ta cùng bình phương 2 vế của cả 2 phương trình trong hệ thì sẽ xuất hiện $(x^2 + y^2)$ nhưng độ khủng khiếp sẽ tăng lên nhiều. Để ý nếu đặt $z = x + yi$ thì $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ta thử lấy phương trình 2 cộng với $i.PT(1)$ ta được

$$\begin{aligned} & i((y-1)\sqrt{x^2+y^2} + 2 - 5y + x) + (x-4)\sqrt{x^2+y^2} - 5x - y = 0 \\ \Leftrightarrow & i(y-1)\sqrt{x^2+y^2} + (x-4)\sqrt{x^2+y^2} + 2i = i(-x+5y) + 5x + y \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2+y^2}(x-4+i(y-1)) + 2i = i(-x+5y) + 5x + y \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2+y^2}(x+yi-4-i) + 2i = (5-i)(x+yi) \end{aligned}$$

Đặt $z = x + yi$ phương trình trở thành $|z|(z-4-i) + 2i = (5-i)z$. Vấn đề nảy sinh khi ta giải phương trình này. Ta sẽ đưa phương trình về dạng như sau

$$|z|(z-4-i) + 2i = (5-i)z \Leftrightarrow z(|z|-5+i) = 4|z| + (|z|-2)i$$

Đến đây lấy module 2 vế ta được

$$|z|\sqrt{(|z|-5)^2+1} = \sqrt{16|z|^2 + (|z|-2)^2}$$

Đặt $t = |z| (t \geq 0)$ ta được $t\sqrt{(t-5)^2+1} = \sqrt{(4t)^2 + (t-2)^2} \Leftrightarrow (t-1)(t^3-9t^2+4) = 0$

Đến đây ta giải được 3 nghiệm của phương trình, phần còn lại xin nhường cho bạn đọc!

Câu 14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-9)\sqrt{4x^2+y^2} + 2x - y\sqrt{2} + 36 = 0 & (1) \\ y\sqrt{4x^2+y^2} + 4\sqrt{2}x + 2y - 36 = 0 & (2) \end{cases}$
--

Giải

Đặt $y = 2a$. Phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} & (x-9)\sqrt{4x^2+(2a)^2} + 2x - 2a\sqrt{2} + 36 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-9)\sqrt{4x^2+4a^2} + 2x - 2a\sqrt{2} + 36 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-9)\sqrt{x^2+a^2} + x - a\sqrt{2} + 18 = 0 \end{aligned}$$

Phương trình (2) trở thành

$$\begin{aligned} & 2a\sqrt{4x^2+4a^2} + 4\sqrt{2}x + 4a - 36 = 0 \\ \Leftrightarrow & 4a\sqrt{x^2+a^2} + 4\sqrt{2}x + 4a - 36 = 0 \\ \Leftrightarrow & a\sqrt{x^2+a^2} + x\sqrt{2} + a - 9 = 0 \end{aligned}$$

Như vậy ta có hệ phương trình mới như sau

$$\begin{cases} (x-9)\sqrt{x^2+a^2} + x - a\sqrt{2} + 18 = 0 & (1) \\ a\sqrt{x^2+a^2} + x\sqrt{2} + a - 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Nhân i cho phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned} & (x+ai-9)\sqrt{x^2+a^2} + (x+ai) - a\sqrt{2} + xi\sqrt{2} + 18 + 9i = 0 \\ \Leftrightarrow & (z-9)|z| + xi\sqrt{2} - a\sqrt{2} + 18 - 9i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (z-9)|z| + xi\sqrt{2} - a\sqrt{2} + 18 - 9i = 0 \\
 &\Leftrightarrow (z-9)|z| + z + i\sqrt{2}(x+ai) + 18 - 9i = 0 \\
 &\Leftrightarrow (z-9)|z| + z + zi\sqrt{2} + 18 - 9i = 0 \\
 &\Leftrightarrow z|z| - 9|z| + z + zi\sqrt{2} + 18 - 9i = 0 \\
 &\Leftrightarrow z(|z| + 1 + i\sqrt{2}) - 9|z| + 18 - 9i = 0 \\
 &\Leftrightarrow |z| \left(\sqrt{(|z|+1)^2 + 2} \right) = 9\sqrt{(|z|-2)^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Đến đây tôi xin được đề độc giả tự giải

Câu 15: Giải hệ phương trình sau trên tập số phức với x, y, z đôi một khác nhau

$$\begin{cases}
 x = y^3 + z^3 \\
 y = z^3 + x^3 \\
 z = x^3 + y^3
 \end{cases}$$

Thầy Nguyễn Tài Chung

Giải

Đặt $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx, \sigma_3 = xyz$. Khi đó ta được

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 + z^3 &= 3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
 &= 3\sigma_3 + \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3
 \end{aligned}$$

Hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases}
 x = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - x^3 \\
 y = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - y^3 \\
 z = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - z^3
 \end{cases}$$

Hay x, y, z là nghiệm của phương trình

$$t = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - t^3 \Leftrightarrow t^3 + t - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) = 0 \quad (1)$$

Mặt khác, theo định lí Viet thì x, y, z cũng là nghiệm của phương trình

$$t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 = 0 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta suy ra
$$\begin{cases}
 -\sigma_1 = 0 \\
 \sigma_2 = 1 \\
 -\sigma_3 = -(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)
 \end{cases}
 \Leftrightarrow
 \begin{cases}
 \sigma_1 = 0 \\
 \sigma_2 = 1 \\
 \sigma_3 = 0
 \end{cases}$$

Như vậy x, y, z là nghiệm của phương trình $t^3 + t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = i \\ t = -i \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm là $(0; i; -i)$ và các hoán vị.

Câu 16: Giải hệ phương trình sau trên tập số phức với x, y, z đôi một khác nhau

$$\begin{cases} a^4 = bcd + 1 \\ b^4 = cda + 1 \\ c^4 = dab + 1 \\ d^4 = abc + 1 \end{cases}$$

Thầy Nguyễn Tài Chung

Giải

Đặt $\sigma_4 = abcd$. Lần lượt nhân phương trình thứ nhất, thứ hai, thứ ba, thứ tư với a, b, c, d ta được

$$\begin{cases} a^5 = abcd + a \\ b^5 = abcd + b \\ c^5 = abcd + c \\ d^5 = abcd + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^5 = \sigma_4 + a \\ b^5 = \sigma_4 + b \\ c^5 = \sigma_4 + c \\ d^5 = \sigma_4 + d \end{cases}.$$

Như vậy a, b, c, d là nghiệm của phương trình $t^5 = \sigma_4 + t \Leftrightarrow t^5 - t - \sigma_4 = 0$ (1)

Tuy nhiên phương trình (1) có đủ 5 nghiệm phức là a, b, c, d và r .

Khi đó áp dụng định lí Viet ta được $\sigma_4 = r\sigma_4 \Leftrightarrow \sigma_4(r-1) = 0$ (2)

- Nếu $r = 1$ thì do 1 là nghiệm của phương trình (1) nên $1^5 - 1 - \sigma_4 = 0 \Leftrightarrow \sigma_4 = 0$.
- Nếu $r \neq 1$ thì từ (2) suy ra $\sigma_4 = 0$.

Như vậy, ta luôn có $\sigma_4 = 0$. Vì thế nên (1) tương đương

$$t^5 - t = 0 \Leftrightarrow t(t^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow t \in \{0; 1; -1; i; -i\}$$

Do $\sigma_4 = 0$ nên trong 4 số a, b, c, d phải có một số bằng 0

Hơn nữa bộ $(a; b; c; d) = (0; 1; i; -i)$ không thỏa mãn hệ.

Với $a, b, c, d \in \{0; 1; -1; i; -i\}$ thì $a^4, b^4, c^4, d^4 \in \{0; 1\}$, do đó từ hệ đã cho suy ra $abc, bcd, cda, dab \in \{0; -1\}$ dẫn tới trong 4 số a, b, c, d phải có đủ 3 số $0, i, -i$

Suy ra các nghiệm của hệ là $(0; -1; i; i)$ và 23 hoán vị khác của nó.

Câu 17: Giải hệ phương trình sau trên tập số phức với x, y, z đôi một khác nhau

$$\begin{cases} x^3 + x^2 = \frac{y^2 + z^2}{yz - 1} \\ y^3 + y^2 = \frac{z^2 + x^2}{zx - 1} \\ z^3 + z^2 = \frac{x^2 + y^2}{xy - 1} \end{cases}$$

Thầy Nguyễn Tài Chung

Giải

Điều kiện $xy \neq 1, yz \neq 1, zx \neq 1$.

Nếu $x = 0$ thay vào hệ ta được $\begin{cases} y^2 + z^2 = 0 \\ y^3 + y^2 = -z^2 \\ z^3 + z^2 = -y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 0 \\ y^3 = 0 \\ z^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Như vậy ta được điều kiện $x, y, z \neq 0$

Đặt $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx, \sigma_3 = xyz$.

| Phương pháp sử dụng số phức

Khi đó $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành $x^3 + x^2 = \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - x^2}{\frac{\sigma_3}{x} - 1}$

$$\Leftrightarrow \sigma_3 x^2 - x^3 + \sigma_3 x - x^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - \sigma_3 x^2 - \sigma_3 x + \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0$$

Điều này có nghĩa là x là nghiệm của phương trình $t^3 - \sigma_3 t^2 - \sigma_3 t + \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0$ (1)

Tương tự, ta cũng suy ra được y, z là nghiệm của (1). Mặt khác, theo định lí Viet suy ra x, y, z cũng là nghiệm của phương trình $t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 = 0$ (2)

$$\text{Từ (1),(2) ta suy ra } \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_3 \\ \sigma_2 = -\sigma_3 \\ \sigma_3 = -\sigma_1^2 + 2\sigma_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_3 = \sigma_1 \\ \sigma_2 = -\sigma_1 \\ \sigma_1 = -\sigma_1^2 - 2\sigma_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_3 = \sigma_1 \\ \sigma_2 = -\sigma_1 \\ \sigma_1^2 + 3\sigma_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_3 = \sigma_1 \\ \sigma_2 = -\sigma_1 \\ \sigma_1 \in \{0; -3\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) = (0; 0; 0) \\ (\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) = (-3; 3; -3) \end{cases} (L)$$

Như vậy x, y, z là nghiệm của phương trình

$$t^3 + 3t^2 + 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t+1)^3 = -2 \Leftrightarrow \left(-\frac{t+1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = 1 \quad (3)$$

Phương trình (3) nghĩa là $-\frac{t+1}{\sqrt[3]{2}}$ căn bậc 3 của $1 = \cos 0 + i \sin 0$ hay

$$\begin{cases} -\frac{t+1}{\sqrt[3]{2}} = \cos 0 + i \sin 0 \\ -\frac{t+1}{\sqrt[3]{2}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \\ -\frac{t+1}{\sqrt[3]{2}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+1 = -\sqrt[3]{2} \\ t+1 = -\sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ t+1 = -\sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$$

Vậy nghiệm $(x; y; z)$ là $\left(-\sqrt[3]{2} - 1; -\sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1; -\sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1\right)$ và các hoán vị.

Bài tập tự luyện

Câu 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (6-x)(x^2+y^2)=6x+8y \\ (3-y)(x^2+y^2)=8x-6y \end{cases}$$

Câu 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(1-\frac{12}{3x+y}\right)=2 \\ \sqrt{y}\left(1+\frac{12}{3x+y}\right)=6 \end{cases}$$

Câu 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\frac{x+3y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$$

Câu 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x+\frac{9x+\sqrt{10}y}{x^2+y^2}=3\sqrt{2} \\ y+\frac{\sqrt{10x-y^2}}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$$

Chương

Phương pháp hàm số

Khi giải phương trình, hệ phương trình bằng các phương pháp như liên hợp, đặt ẩn phụ khá quen thuộc đối với các bạn rồi, tuy nhiên đối mặt với một bài toán dạng này các bạn ít nhiều còn lúng túng, chưa tìm được lời giải hoặc xác định được đường lối nhưng lại không đưa ra được kết quả cuối cùng! Trong chủ đề chúng ta sẽ hiểu một ứng dụng của hàm số trong việc giải phương trình Đây là một phương pháp rất mạnh để giải quyết các bài toán phương trình có nghiệm duy nhất hoặc 2 nghiệm.

Lý thuyết cần nhớ

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu 1 chiều trên miền D thì phương trình $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm
- Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu 1 chiều trên miền D và tồn tại $u, v \in D$ thì khi đó phương trình $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$
- Nếu $f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$ và $f'(x)$ có nhiều nhất n nghiệm (n là số nguyên dương) trên $(a; b)$ thì $f(x)$ có nhiều nhất $(n + 1)$ nghiệm trên $(a; b)$
- Nếu hàm số $f(x), g(x)$ cùng nghịch biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì hàm số $h(x) = g(x) \cdot f(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên tập D còn hàm số $v(x) = f(x) + g(x)$ là hàm số nghịch biến và liên tục trên tập xác định D .
- Nếu hàm số $f(x), g(x)$ cùng đồng biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì $h(x) = g(x) \cdot f(x)$ và $v(x) = f(x) + g(x)$ là các hàm số đồng biến và liên tục trên D .

Phương pháp chứng minh hàm đơn điệu.

Câu 1. Giải phương trình $\sqrt{5x^3 - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} + x = 4$

Giải

Phân tích. Quan sát về trái của phương trình thấy khi x tăng thì giá trị của biểu thức trong căn cũng tăng. Từ đó có thể dự đoán về trái là hàm đồng biến mặt khác ta không khó để nhận được $x = 1$ là nghiệm của phương trình đầu, nên ta sẽ sử dụng phương pháp hàm số để giải quyết bài toán như sau.

Điều kiện $5x^3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{5x^3 - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} + x - 4$ trên $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}; +\infty\right)$ có

$$f'(x) = \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3-1}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} + 1 > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}; +\infty\right)$$

Do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}; +\infty\right)$ và ta nhận thấy rằng $f(1) = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm

duy nhất của phương trình đầu.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Câu 2. Giải phương trình $3(\sqrt{2x^2+1}-1) = x(1+3x+8\sqrt{2x^2+1})$

Giải

Để ý rằng $\sqrt{2x^2+1} \geq 1, \forall x \Rightarrow \sqrt{2x^2+1}-1 \geq 0, \forall x$

và $8\sqrt{2x^2+1}+3x > 8\sqrt{x^2}+3x = 8|x|+3x > 0, \forall x$

Nên để phương trình có nghiệm thì điều kiện là $x \geq 0$.

Phương trình tương đương $3x^2+x+8x\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{2x^2+1}+3=0$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2+x+8x\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{2x^2+1}+3$ trên $[0; +\infty)$ có

$$f'(x) = 6x+1+8\left(\sqrt{2x^2+1}+\frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}}\right)-\frac{6x}{\sqrt{2x^2+1}} = 6x+1+\frac{32x^2-6x+8}{\sqrt{2x^2+1}}.$$

Do $32x^2-6x+8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f'(x) > 0, \forall x \geq 0$.

Suy ra hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$ và có $f(0) = 0$ nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đầu.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 3. Giải phương trình $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình tương đương

$$\left[\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+2}\right]+\left[\sqrt{(x+6)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}\right]=4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}(\sqrt{2x-1}-3)+\sqrt{x+6}(\sqrt{2x-1}-3)=4$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6})=4(*)$$

Do $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6} > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$ và vế phải dương nên để phương trình (*) có nghiệm thì cần điều kiện

kéo theo là $\sqrt{2x-1}-3 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} > 3 \Leftrightarrow x > 5$.

- Xét hàm số dương $f(x) = \sqrt{2x-1}-3$ trên nửa khoảng $(5; +\infty)$ có

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0, \forall x > 5 \text{ nên } f(x) \text{ là hàm số dương đồng biến } (5; +\infty) \quad (1)$$

- Xét hàm số dương $g(x) = \sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}$ trên nửa khoảng $(5; +\infty)$ có

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2\sqrt{x+6}} > 0, \forall x > 5 \text{ nên } g(x) \text{ đồng biến trên } (5; +\infty) \quad (2)$$

| Phương pháp hàm số

Từ (1), (2) $\Rightarrow h(x) = f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6})$ đồng biến trên $(5; +\infty)$ và có $h(7) = 4$ nên $x = 7$ là nghiệm duy nhất của phương trình đầu.

Câu 4. Giải phương trình $9x^4 - 32x^2 + 5 + 18\sqrt{4-3x} = 0$

Giải

Xét $x \in (-\infty; 0]$ ta có $\sqrt{4-3x} > 2$, do đó $f(x) = 9x^4 - 32x^2 + 5 + 18\sqrt{4-3x}$

$$\geq 9x^4 - 32x^2 + 36 = 9\left(x^2 - \frac{16}{9}\right)^2 + \frac{68}{9} > 0$$

Vậy phương trình vô nghiệm trên $(-\infty; 0]$.

Xét $x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$, ta có $f'(x) = 36x^3 - 64x - \frac{27}{\sqrt{4-3x}}$.

Dễ thấy $36x^3 - 64x = x(36x^2 - 64) < 0, \forall x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ nên $f'(x) < 0, \forall x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$. Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $\left[0; \frac{4}{3}\right]$, do đó phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm trên khoảng $\left[0; \frac{4}{3}\right]$.

Lại có $f(1) = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Câu 5. Giải phương trình $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = 12(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$

Giải

Ta không khó để nhận ra rằng với điều kiện $0 \leq x \leq 4$ thì vế trái hàm số đồng biến, vế phải là hàm nghịch biến. Vậy khi đó chuyển về sang ta sẽ được một hàm số đơn điệu 1 chiều. Vậy ta có lời giải như sau. Xét hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} - 12(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$ xác định và liên tục trên $[0; 4]$, có

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}} + 12\left(\frac{1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}}\right) > 0, \forall x \in (0; 4)$$

Nên $f(x)$ đồng biến trên $[0; 4]$. Mặt khác ta thấy $f(4) = 0$ nên $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình đầu

Câu 6. Giải phương trình $(4x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) = 4x+8$

Giải

Phân tích. Đây là một bài toán không quá phức tạp, nhưng nếu chúng ta không có kỹ năng cũng như định hướng từ trước thì có lẽ việc đánh giá nó sẽ vô cùng khó, sau đây là 2 lời giải để các bạn thấy rõ sự khó khăn của nó khi đi sai hướng.

Cách 1. Hàm số - Nguyễn Minh Tuấn

Đặt $f(x) = (4x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) - 4x - 8$ liên tục trên $[-3; +\infty)$

Ta có $f'(x) = 4(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) + (4x-1)\left[\frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{(\sqrt[3]{3x+5})^2}\right] - 4$

Với $x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ thì $(4x-1) < 0, (\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) > 0 \Rightarrow VT < 0$.

Mặt khác $(8x+4) > 0 \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ nên phương trình vô nghiệm trên $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{(\sqrt[3]{3x+5})^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{4(\sqrt{x+3})^3} - \frac{2}{(\sqrt[3]{3x+5})^5} < 0 \forall x \geq -1$$

Với $x \in \left[-1; \frac{1}{4}\right]$ thì $4x-1 < 0$, $g(x) \leq g(-1) < 1$. Khi đó ta có

$$f'(x) > 4(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) + 4x - 5 > 4(\sqrt{1+3} + \sqrt[3]{3+5}) - 5 + 4 > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[-1; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f(-1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow -18 < f(x) \leq -9 < 0.$$

Vậy phương trình vô nghiệm trên $\left[-1; \frac{1}{4}\right]$.

$$\text{Với } x \geq \frac{1}{4} \text{ thì } 4x-1 \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 4(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) - 4 > 10 > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[\frac{1}{4}; +\infty\right) \Rightarrow \text{phương trình } f(x) = 0 \text{ có tối đa 1 nghiệm.}$$

Lại có $f(1) = 0$ nên phương trình có 1 nghiệm là $x = 1$.

$$\text{Với } x \in \left[-3; -\frac{3}{2}\right] \text{ thì } \begin{cases} 4x-1 < 0 \\ 2\sqrt{x+3} < 2,5 \\ (\sqrt[3]{3x+5})^2 < 2,5 \end{cases} \text{ . Khi đó ta được}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &< 4(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) + \frac{4(4x-1)}{5} - 4 \\ &\leq 4(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) - 9,6 \leq 4(\sqrt{-1,5+3} + \sqrt[3]{3 \cdot (-1,5)+5} - 9,6) < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ nghịch biến trên } \left[-3; -\frac{3}{2}\right], \text{ do đó phương trình } f(x) = 0 \text{ có tối đa 1 nghiệm thuộc } \left[-3; -\frac{3}{2}\right].$$

Lại có $f(-2) = 0$ nên $x = -2$ là 1 nghiệm của phương trình đầu.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = -2$ và $x = 1$.

Cách 2. Hàm số.

Do $x = \frac{1}{4}$ không là nghiệm của phương trình nên xét $x \neq \frac{1}{4}$ thì phương trình tương đương.

$$(4x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) = 4x+8 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5} = \frac{4x+8}{4x-1}$$

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5} - \frac{4x+8}{4x-1} \text{ liên tục trên } \left[-3; \frac{1}{4}\right) \text{ và } \left(\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

$$\text{Có } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{(\sqrt[3]{3x+5})^2} + \frac{36}{(4x-1)^2} > 0.$$

$$\text{Suy ra } f(x) \text{ đồng biến trên } \left[-3; \frac{1}{4}\right) \text{ và } \left(\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm trên mỗi khoảng trên.

Từ đó chỉ ra 2 nghiệm là $x = -2$ và $x = 1$.

Câu 7. Giải phương trình $\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} - (x-5)\sqrt{x-8} - 3x + 31 = 0$

Giải

| Phương pháp hàm số

Điều kiện $x \geq 8$. Đặt $t = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow x = t^3 + 1 \geq 8 \Rightarrow t \geq \sqrt[3]{7}$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} t^2 - 2t - (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7} - 3t^3 + 28 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3t^3 - t^2 + 2t - 28 + (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7} &= 0 \end{aligned}$$

Nhận thấy $t = \sqrt[3]{7}$ không là nghiệm nên chỉ xét $t \neq \sqrt[3]{7}$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 - t^2 + 2t - 28 + (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7}$ trên $(\sqrt[3]{7}; +\infty)$ có

$$f'(t) = \underbrace{(9t^2 - 2t + 2)}_{> 0, \forall t} + 3t^2 \sqrt[3]{t^3 - 7} + \frac{t^2(t^3 - 4)}{\sqrt[3]{(t^3 - 7)^2}} > 0, \forall t \in (\sqrt[3]{7}; +\infty)$$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $(\sqrt[3]{7}; +\infty)$

Ta lại có $f(2) = 0 \Rightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 9$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 9$.

Câu 8. Giải phương trình $3x^7 - \sqrt{5-4x} = 3 - x^3$.

Giải

Điều kiện $x \leq \frac{5}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với. $3x^7 + x^3 - \sqrt{5-4x} - 3 = 0$

Xét hàm số. $f(x) = 3x^7 + x^3 - \sqrt{5-4x} - 3 = 0$, $x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$, ta có

$f'(x) = 21x^6 + 3x^2 + \frac{2}{\sqrt{5-4x}} > 0$, $\forall x < \frac{5}{4}$ đồng thời $f(x)$ liên tục trên $\left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$ và $f(1) = 0$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 9. Giải phương trình $3\sqrt[4]{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x^3 = 6$.

Giải

Điều kiện $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = 3\sqrt[4]{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x^3 - 6$, $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

Ta có $f'(x) = \frac{-6}{\sqrt[4]{(3-2x)^3}} - \frac{5}{(\sqrt{2x-1})^3} - 6x^2 < 0$, $\forall x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Lại có $f(1) = 0$

Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 10. Giải phương trình $x^2 = \sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} + 12$.

Giải

Điều kiện $-5 \leq x \leq 5$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - \sqrt{5+x} - \sqrt{5-x} - 12$, $x \in [-5; 5]$, ta có

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5+x}} - \frac{1}{\sqrt{5-x}} \right) = 2x + \frac{x}{\sqrt{25-x^2}(\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x})}$$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Từ đó ta có bảng biến thiên.

x	-5	0	5	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$13 - \sqrt{10}$	$\searrow$ $-12 - 2\sqrt{5}$ $\nearrow$		$13 - \sqrt{10}$

Nhìn vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(x) = 0$ chỉ có 2 nghiệm.

Mà $f(-4) = f(4) = 0$. Nên phương trình có 2 nghiệm là $x = -4$; $x = 4$.

Câu 11. Giải phương trình $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0$

Giải

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4}$, ta có

$$f'(x) = 4x - 11 - \frac{4}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 11 = \frac{4}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}} \Rightarrow x > \frac{11}{4}.$$

Lại có $f''(x) = 4 + \frac{32}{3\sqrt[3]{(4x-4)^5}} > 0$, $\forall x > \frac{11}{4}$ và $f'(3) = 0$ suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy

nhất $x = 3$.

Lập bảng biến thiên ta chỉ ra được $\min_{\left(\frac{11}{4}; +\infty\right)} f(x) = f(3) = 0$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Câu 12. Giải phương trình $\sqrt{5x^3-4} + 2\sqrt[3]{7x^2-1} = \frac{6(x^2+6)}{x^2+1}$

Giải

Điều kiện $x \geq \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{5x^3-4} + 2\sqrt[3]{7x^2-1}$, $\forall x \geq \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$, ta có

$$f'(x) = \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3-4}} + \frac{28x}{3\sqrt[3]{(7x^2-1)^2}} > 0, \quad \forall x > \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$$

Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\left[\sqrt[3]{\frac{4}{5}}; +\infty\right)$. Xét hàm số $g(x) = \frac{6(x^2+6)}{x^2+1}$, $\forall x \geq \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$, ta có

$g'(x) = \frac{-60x}{(x^2+1)^2} < 0$, $\forall x \in \left[\sqrt[3]{\frac{4}{5}}; +\infty\right)$, suy ra $g(x)$ là hàm nghịch biến trên $\forall x \in \left[\sqrt[3]{\frac{4}{5}}; +\infty\right)$. Mặt khác

ta có $f(2) = g(2)$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 13. Giải phương trình sau trên tập $(-3; 3)$: $\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[5]{x+5} + \sqrt[5]{x-5}$

Giải

| Phương pháp hàm số

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{3+x} - \sqrt[5]{5+x} = \sqrt[3]{3-x} - \sqrt[5]{5-x} \Leftrightarrow f(x) = f(-x)$$

$$\text{Với. } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(3+x)^2}} - \frac{1}{5\sqrt[5]{(5+x)^4}}$$

$$\text{Do } -3 < x < 3 \Rightarrow 5\sqrt[5]{(5+x)^4} > 5\sqrt[3]{(5+x)^2} > 5\sqrt[3]{(3+x)^2} > 3\sqrt[3]{(3+x)^2}$$

Suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in (-3; 3) \Rightarrow f$ đồng biến trên khoảng $(-3; 3)$

Nên, phương trình $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 14. Giải phương trình $2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} + 3\sqrt[3]{-x+\sqrt{x^2+1}} = 5$

Giải

$$\text{Đặt. } a = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow -x + \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{a}, a > 0$$

$$\text{Phương trình đã cho thành. } 2\sqrt{a} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}} = 5, f(a) = 2\sqrt{a} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}} \Rightarrow f'(a) = 0 \Rightarrow a = 1$$

Xét dấu của $f'(a)$ suy ra $a = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Câu 15. Giải phương trình $\frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = 3$.

Giải

Điều kiện $x \geq 0$.

Biến đổi phương trình tương đương với $2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) + \sqrt{x^2+1} - x = 3$ (*)

- Nếu $x > 1$ thì $VT(*) > 2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) > 3 = VP(*)$
- Nếu $0 \leq x \leq 1$. Dễ thấy $x = 0$ là một nghiệm của phương trình (*).

Xét hàm số $f(x) = 2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) + \sqrt{x^2+1} - x, x \geq 0$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \in (0; 1]$$

Do đó, hàm $f(x)$ đồng biến trên $(0; 1]$.

Suy ra $f(x) > f(0) = 2 + 1 = 3$, hay phương trình (*) vô nghiệm.

Tóm lại, $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình ban đầu.

Câu 16. Giải phương trình $x^3 - 3x + (4x^2 - 2\sqrt{3}x + 2)\sqrt{1+x^2} = 0$

Giải

$$VT \Leftrightarrow x^3 - 3x + \left[3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + x^2 + 1\right]\sqrt{x^2+1} \Rightarrow VT \geq x^3 - 3x + (x^2+1)\sqrt{x^2+1}$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = x^3 - 3x + (x^2+1)\sqrt{x^2+1}$$

$$\text{Có } f'(x) = 3\left(x^2 - x + x\sqrt{x^2+1}\right); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên } \Rightarrow \min f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.$$

Hay $f(x) \geq 0; \forall x = VP \Rightarrow VT \geq VP$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0$ và $f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ là nghiệm của phương trình đầu.

Câu 17. Giải phương trình

$$(9x^2 + 24x + 17)\sqrt{3x + 3} - (x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2x - 1} = x^3 - 5x - 4$$

Giải

Điều kiện $x \geq \sqrt{2} - 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(9x^2 + 24x + 17)\sqrt{3x + 3} - (x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2x - 1} = x^3 - 5x - 4$$

Đặt $a = \sqrt{3x + 3}; b = \sqrt{x^2 + 2x - 1}; (a, b \geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành

$$(a^4 + 2a^2 + 2)a - (b^4 + 2b^2 + 2)b + \frac{a(a-b)}{3} = 0 \quad (1)$$

Ta xét hàm số $f(x) = x(x^4 + 2x^2 + 2)$ thì $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 2 > 0, \forall x > 0$.

Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, cho nên ta luôn có $(f(a) - f(b))(a - b) \geq 0 \quad (2)$.

Mặt khác, từ (1) ta có $f(a) - f(b) + \frac{a(a-b)}{3} = 0 \Rightarrow f(a) - f(b) = -\frac{a(a-b)}{3}$.

Vậy nên (2) sẽ trở thành $\frac{-a(a-b)}{3} \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = b \\ a = 0 \end{cases}$.

Nhận thấy $a = 0 \Rightarrow x = -1$ không phải là nghiệm của phương trình, nên ta có

$$a = b \Leftrightarrow \sqrt{3x + 3} = \sqrt{x^2 + 2x - 1} \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

Vậy $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 18. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{x + 1}{1 - x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x\sqrt{x^2 - 1} \neq 0 \end{cases}$. Ta có $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{x + 1}{1 - x\sqrt{x^2 - 1}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1}(1 - x\sqrt{x^2 - 1}) = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x\sqrt{x^4 - 1} = x + 1 \quad (*)$$

Ta lại có $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - 1 = x(\sqrt{x^4 - 1} + 1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = x(\sqrt{x^4 - 1} + 1) \Rightarrow x > 0$

Kết hợp điều kiện cho ta. $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq x_0 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \end{cases}$

Từ phương trình $(*)$, xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x\sqrt{x^4 - 1} - x - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \sqrt{x^4 - 1} - \frac{2x^4}{\sqrt{x^4 - 1}} - 1 = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{x^4 - 1} + 1)} - \sqrt{x^4 - 1} - \frac{2x^4}{\sqrt{x^4 - 1}} < 0, \forall x > 1. \\ &\Rightarrow f(x) \leq f(1) = \sqrt{2} - 2 < 0 \end{aligned}$$

| Phương pháp hàm số

Suy ra phương trình (*) vô nghiệm, hay phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 19. Giải phương trình $2\sqrt{1-2x} + \sqrt[10]{20x+1} = 3$.

Giải

Đặt $a = \sqrt{1-2x} \Rightarrow 2x = 1 - a^2$ ($a \geq 0$); $b = \sqrt[10]{20x+1} \Rightarrow 20x = b^{10} - 1$ ($b \geq 0$), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ b^{10} + 10a^2 - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b^{10} + 10\left(\frac{3-b}{2}\right)^2 - 11 = 0 \Rightarrow 2b^{10} + 5b^2 - 30b + 23 = 0 \quad (*)$$

Do $a, b \geq 0$ nên từ $2a + b = 3 \Rightarrow 0 \leq b \leq 3$

- Nếu $b = 0$ phương trình (*) vô nghiệm, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.
- Nếu $0 < b \leq 3$, từ (*) ta có $2 + \frac{5}{b^8} - \frac{30}{b^9} + \frac{23}{b^{10}} = 0$

Xét hàm số. $f(b) = 2 + \frac{5}{b^8} - \frac{30}{b^9} + \frac{23}{b^{10}}$, ($0 < b \leq 3$) ta có

$$f'(b) = -\frac{40}{b^9} + \frac{270}{b^{10}} - \frac{230}{b^{11}} = -\frac{10}{b^{11}} (23 - 27b + 4b^2)$$

Lập bảng biến thiên ta thấy $f(b) \geq f(1) = 0$.

Hay phương trình (*) có nghiệm duy nhất $b = 1$.

Thử lại cho ta phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 20. Giải phương trình $\frac{x+1}{\sqrt{3x-2}} + \frac{\sqrt[3]{3x+2}}{4} = \sqrt{3x-2}$.

Giải

Điều kiện $x > \frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với. $\sqrt[3]{3x+2} \cdot \sqrt{3x-2} = 8x - 12$ (*).

Với $x > \frac{2}{3}$ thì $\sqrt[3]{3x+2} \cdot \sqrt{3x-2} > 0 \Rightarrow 8x - 12 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$.

Đặt $\sqrt{3x-2} = a$ ($a > \sqrt{\frac{5}{2}}$). Phương trình đã cho trở thành.

$$a\sqrt[3]{a^2+4} = \frac{8(a^2+2)}{3} - 12 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} + \frac{4}{a^3}} + \frac{20}{a^2} = 8$$

Hàm số $f(a) = 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} + \frac{4}{a^3}} + \frac{20}{a^2} - 8$, nghịch biến trên khoảng $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; +\infty\right)$ và $f(2) = 0$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 21. Giải phương trình $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 32(x-1)^2\sqrt{2x-2}$

Giải

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với. $x + \sqrt{x^2-1} = 2(4x-4)^5$

Đặt. $4x-4 = a$ ($a \geq 0$). Phương trình đã cho trở thành

$$2a^5 - \frac{a+4}{4} - \sqrt{\left(\frac{a+4}{4}\right)^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 8a^5 = \sqrt{a^2+8a+a+4} \quad (*)$$

- Rõ ràng $a = 0$ không là nghiệm của phương trình (*)

- Với $a \neq 0$, phương trình tương đương với $8 = \frac{4}{a^5} + \frac{1}{a^4} + \sqrt{\frac{1}{a^8} + \frac{8}{a^9}}$

Hàm số $f(a) = \frac{4}{a^5} + \frac{1}{a^4} + \sqrt{\frac{1}{a^8} + \frac{8}{a^9}} - 8$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và $f(1) = 0$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 22. Giải phương trình $\frac{x+1}{\sqrt{3x-2}} + \frac{\sqrt[3]{3x+2}}{4} = \sqrt{3x-2}$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{3x+2}\sqrt{3x-2} = 8x-12$

Điều kiện có nghiệm của phương trình là $x \geq \frac{3}{2}$

Đặt $\sqrt{3x-2} = a \left(a > \sqrt{\frac{5}{2}} \right)$. Phương trình trở thành

$$a^3\sqrt{a^2+4} = \frac{8(a^2+2)}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} + \frac{4}{a^3}} + \frac{20}{a^2} = 8$$

Xét hàm số $f(a) = 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} + \frac{4}{a^3}} + \frac{20}{a^2}$ là hàm số nghịch biến trên $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; +\infty\right)$.

Từ đó chỉ ra $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình!

Câu 23. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[5]{x+5} + \sqrt[5]{x-5} \quad (-3 \leq x \leq 3)$

Giải

Phương trình tương đương. $\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[5]{x+5} = \sqrt[3]{3-x} - \sqrt[5]{5-x} \Leftrightarrow f(x) = f(-x)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} - \frac{1}{5\sqrt[5]{(x+5)^4}}$$

$$\text{Do } -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow 5\sqrt[5]{(x+5)^4} > 5\sqrt[3]{(x+5)^2} > 5\sqrt[3]{(x+3)^2} > 3\sqrt[3]{(x+3)^2}$$

Suy ra $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ tăng trên $(-3; 3)$

Vậy phương trình tương đương $x = -x \Leftrightarrow x = 0$

Câu 24. Giải phương trình $15x^2 + 10\sqrt{(x+1)^3} + 26 = 6\sqrt{(x+1)^5} + 30\sqrt{x+1}$

Giải

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 (t \geq 0)$. Phương trình tương đương

$$f(t) = 6t^5 - 15t^4 - 10t^3 + 30t^2 + 30t - 41 = 0$$

Ta thấy $\begin{cases} f'(t) = 30(t^2 - t - 1)^2 > 0, \forall t \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 0$. là nghiệm duy nhất của phương trình

Câu 25. Giải phương trình $\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(1-x)^3} + 14 = \sqrt{(x+4)^3} + \sqrt{(4-x)^3}$

Giải

ĐKXD. $0 \leq x \leq 4$. Xét hàm số. $f(x) = \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(1-x)^3} - \sqrt{(x+4)^3} - \sqrt{(4-x)^3} - 14$

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x} + \sqrt{4-x} - \sqrt{x+4}) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}} \right) = 0 (*)$$

Bây giờ ta sẽ đi chứng minh phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$ vô nghiệm!

Ta có $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} + \sqrt{1-x} - \sqrt{4-x} = \frac{-3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}} - \frac{3}{\sqrt{1-x} + \sqrt{4-x}} < 0$ vậy phương trình (*) có

nghiệm duy nhất $x=0 \Rightarrow f(x) \geq f(0)=0$

Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình!

Câu 26. Giải phương trình $2x-1-\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{(2-x)(x^2-x+1)}}=0$

Giải

Đặt $f(x)=2x-1-\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{(2-x)(x^2-x+1)}}$ liên tục trên $(-1;2)$

Có $f'(x)=2+\frac{3x^2-6x+3}{2\sqrt{(2-x)(x^2-x+1)}}+\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}>0; \forall x \in (-1;2)$

Vậy $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Câu 27. Giải phương trình $\frac{39x}{2}-21+5\sqrt{x^3-2x^2+16}+5\sqrt{x+2}=0$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x^3-2x^2+16 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$

Đặt $f(x)=\frac{39x}{2}-21+5\sqrt{x^3-2x^2+16}+5\sqrt{x+2}$ liên tục trên $[-2;+\infty)$.

Có $f'(x)=\frac{39}{2}+\frac{5(3x^2-4x)}{2\sqrt{x^3-2x^2+16}}+\frac{5}{2\sqrt{x+2}}$

- Nếu $x \in (-2;0] \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right)$ thì $5(3x^2-4x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

- Nếu $x \in \left[0;\frac{4}{3}\right]$ thì $2\sqrt{x^3-2x^2+16} \geq \frac{40\sqrt{3}}{9} > \frac{15}{2}$

$$\Rightarrow f'(x) > \frac{39}{2} + \frac{2(3x^2-4x)}{3} + \frac{5}{2\sqrt{x+2}} = \frac{(24x^2-32x+234)\sqrt{x+2}+30}{12\sqrt{x+2}} > 0$$

Vậy $f'(x) > 0; \forall x \in (-2;+\infty) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(-2;+\infty)$.

Suy ra $x=\frac{49-5\sqrt{105}}{8}$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Câu 28. Giải phương trình $\sqrt{x^4+20}-\sqrt{x^4+9}=x^3-7$.

Giải

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình

$$11=(x^3-7)(\sqrt{x^4+20}+\sqrt{x^4+9})$$

Từ phương trình này, ta suy ra được điều kiện $x^3-7 > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{7}$.

Khi đó phương trình tương đương $\sqrt{x^4+20}+\sqrt{x^4+9}=\frac{11}{x^3-7}$ (1)

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^4+20}+\sqrt{x^4+9}$, $x>\sqrt[3]{7}$.

Ta có $f'(x)=2x^3\left(\frac{1}{\sqrt{x^4+20}}+\frac{1}{\sqrt{x^4+9}}\right)>0$, $\forall x>\sqrt[3]{7}$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến với $x>\sqrt[3]{7}$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{11}{x^3-7}$, $\forall x>\sqrt[3]{7}$. Ta có $g'(x)=-\frac{33x^2}{(x^3-7)^2}<0$, $\forall x>\sqrt[3]{7}$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục và nghịch biến với $x>\sqrt[3]{7}$.

Do đó phương trình $f(x)=g(x)$ nếu có nghiệm thì có tối đa một nghiệm.

Mà $f(2)=g(2)$ nên $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Chú ý. Sau đây chúng ta sẽ cùng trải nghiệm những bài toán đánh giá vô cùng khó của phương pháp này, ý tưởng sẽ như một vài bài ở trước, đó là chỉ ra hàm số vô nghiệm trên một khoảng và đồng biến trên một khoảng khác mà khoảng đó chứa nghiệm của phương trình Các bài toán chỉ mang tính tham khảo rèn luyện tư duy!

Câu 29. Giải phương trình $x^4+x^2+10x-19+(x^3-7x+13)\sqrt{x^2+x-1}=0$

Giải

Đặt $f(x)=x^4+x^2+10x-19+(x^3-7x+13)\sqrt{x^2+x-1}$

Hàm số liên tục trên $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ và $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

Có $f'(x)=4x^3+2x+10+\frac{8x^4+7x^3-34x^2+5x+27}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

Với $x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ta cần chứng minh $g(x)=8x^4+7x^3-34x^2+5x+27>0$

- Nếu $x\in[0;1]$ thì theo AM – GM ta có $\begin{cases} 8x^4+8\geq 2\sqrt{8.8.x^4}=16x^2 \\ 7x^3+7\geq 14\sqrt{x^3}>14x^2 \end{cases} \Rightarrow g(x)>-4x^2+5x+12>0.$
- Nếu $x>1\Rightarrow g(x)>8(x-1)^4+39(x-1)^3+35\left(x-\frac{8}{7}\right)^2+\frac{86}{7}>0$

Vậy $f'(x)>0\forall x\in\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$. Với $x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ta cần chứng minh rằng.

$$u(x)=2(4x^3+2x+10)\sqrt{x^2+x-1}+8x^4+7x^3-34x^2+5x+27<0$$

- Nếu $x\in\left[-2; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ thì $\begin{cases} 8x^4+7x^3-20x^2<0 \\ -14x^2+5x+27<0 \\ 4x^3+2x+10<0 \end{cases} \Rightarrow u(x)<0$
- Nếu $x\leq-2$.

Ta thấy rằng $-12x^2+5x+27<0$ nên chỉ cần chứng minh.

$$A=2(4x^3+2x+10)\sqrt{x^2+x-1}+8x^4+7x^3-22x^2<0$$

Để ý thấy $20\sqrt{x^2+x-1}-10x^2 = \frac{10((-x^4+4x^2)+4x-4)}{x^2+\sqrt{x^2+x-1}} < 0$ nên lại chuyển về chứng minh.

$$2(4x^3+2x)\sqrt{x^2+x-1} < -8x^4-7x^3+12x^2$$

$$\Leftrightarrow x \left[2(4x^2+2)\sqrt{x^2+x-1}+8x^3+7x^2-12x \right] < 0$$

$$\Leftrightarrow 2(4x^2+2)\sqrt{x^2+x-1}+8x^3+7x^2-12x > 0$$

$$\Leftrightarrow -48x^5+143x^4+232x^3-192x^2+16x-16 > 0$$

Đặt $f_1(x) = -48x^5+143x^4+232x^3-192x^2+16x-16$

Có $f_1'(x) = -24x^4+572x^3+696x^2-384x+16 = -24x^4+16+x(572x^2+696x-384) < 0 \forall x \leq -2$

Suy ra $f_1(x)$ nghịch biến $\Rightarrow f_1(x) \geq f_1(-2) = 1152 > 0$. Suy ra $A < 0$

Vậy $f'(x) < 0 \forall x \leq -2$

Kết luận phương trình có tối đa 2 nghiệm trên tập xác định là $x=1; x=-2$.

Câu 30. Giải phương trình $x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-6-12\sqrt{6-5x}=0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Do $\sqrt{6-5x} > 0$ nên điều kiện có nghiệm của phương trình sẽ là.

$$x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-6 > 0 \Rightarrow x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x > 6 > -210$$

$$\Rightarrow (x+5)(x^4+2x^3+2x^2-9x+42) > 0$$

$$\Rightarrow x \geq -5 \left(\text{do } x^4+2x^3+2x^2-9x+42 = (x+1)^2 + (x-4,5)^2 + 21,75 > 0 \right)$$

- **Trường hợp 1.** Nếu $x \in [-5; -4]$.

Khi đó đặt $VT = f(x)$ thì ta được

$$f(x) < x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-66 = x^3(x+4)(x+3)+x^2-3x-66 < 0$$

- **Trường hợp 2.** Nếu $x \in [-4; -2]$ thì $\sqrt{6-5x} \geq 4$. Khi đó ta có

$$f(x) \leq x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-54$$

$$= x^5+7x^4+12x^3-20+x^2-3x-34$$

$$= (x-1)(x^4+8x^3+20x^2+20x+20)+x^2-3x-34 < 0$$

$$\left(\text{vì } \begin{cases} x^4+8x^3+20x^2+20x+20 = (x^2+4x+1)^2 + 2(x+3)^2 + 1 > 0 \\ x^2-3x-34 < 0 \forall x \in [-4; -2] \end{cases} \right)$$

- **Trường hợp 3.** Nếu $x \in [-2; 0]$ thì $\sqrt{6-5x} > 2$ khi đó

$$f(x) < x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-30 < 0$$

$$\left(\text{vì } \begin{cases} x^5+7x^4+12x^3 = x^3(x+3)(x+4) \leq 0 \\ x^2-3x-30 = (x+2)(x-5) - 20 < 0 \end{cases} \right)$$

- **Trường hợp 4.** Nếu $x \in \left[0; \frac{6}{5}\right]$ ta có

$$f'(x) = 5x^4+28x^3+36x^2+2x-3 + \frac{30}{\sqrt{6-5x}} > 0, \forall x \in \left[0; \frac{6}{5}\right)$$

$$\forall -3 + \frac{30}{\sqrt{6-5x}} = \frac{30-3\sqrt{6-5x}}{\sqrt{6-5x}} = \frac{45x+846}{(30+3\sqrt{6-5x})\sqrt{6-5x}} > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[0; \frac{6}{5}\right].$$

Do vậy nên phương trình đầu sẽ có nghiệm duy nhất $x=1$.

Câu 31. Giải phương trình $x^4 - 6x^2 + 2x - 9 + (x^3 + 2x + 1)\sqrt{x^2 - x - 1} = 0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

$$\text{Đặt } f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x - 9 + (x^3 + 2x + 1)\sqrt{x^2 - x - 1}$$

$$\text{Có } f'(x) = 4x^3 - 12x + 2 + \frac{8x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4x - 5}{2\sqrt{x^2 - x - 1}}$$

- **Trường hợp 1.** $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Ta cần chứng minh $f'(x) > 0$.

$$\text{Có } \underbrace{(8x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4x - 5)'}_{g(x)} = 32x^3 - 21x^2 + 4x - 4 < 0 \Rightarrow 8x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4x - 5 > 1 > 0$$

$$\text{Ta có đánh giá } \sqrt{x^2 - x - 1} < -x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{4} > 0 \text{ luôn đúng với } x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$\text{Khi đó } f'(x) > \frac{8x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 24x - 8}{1 - 2x} > 0, \text{ vì } \begin{cases} 28x^2 - 24x - 8 > 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ 1 - 2x > 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ 8x^4 - 10x^3 > 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } f(x) \text{ đồng biến trên } \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow f(x) < f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0.$$

- **Trường hợp 2.** $x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Để ý thấy } g'(x) = 32x^3 - 21x^2 + 4x - 4 = 32(x-1)^3 + 75(x-1)^2 + 58(x-1) + 11 > 0 \Rightarrow g(x) > 0.$$

$$\text{Vậy ta đi chứng minh } \sqrt{x^2 - x - 1} < x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{4} > 0 \text{ luôn đúng.}$$

$$\Rightarrow f'(x) > \frac{16x^4 - 11x^3 - 22x^2 + 12x - 7}{2x - 1} = \frac{h(x)}{2x - 1}$$

$$\text{Để ý rằng } h'(x) = 64x^3 - 33x^2 - 44x + 12 = 64\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + 255\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 289\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{351}{4} > 0$$

$$\Rightarrow h(x) > h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 17 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$$

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Câu 32. Giải phương trình $3\sqrt{x+4} + 3\sqrt{5x+4} + 4x^2 - 18x - 12 = 0$

Giải

Đặt $f(x) = 3\sqrt{x+4} + 3\sqrt{5x+4} + 4x^2 - 18x - 12$

Nếu $x \in [1;3]$ khi đó $\begin{cases} 3\sqrt{x+4} < 8 \\ 3\sqrt{5x+4} < 14 \end{cases} \Rightarrow f(x) < 4x^2 - 18x + 10 < 0 \forall x \in [1;3]$

Vậy phương trình vô nghiệm trên $[1;3]$.

Ta có $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x+4}} + \frac{15}{2\sqrt{5x+4}} + 8x - 18$

Nếu $x \geq 3$ thì hiển nhiên $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[3;+\infty)$.

Nếu $x \in \left[-\frac{4}{5}; -\frac{1}{2}\right]$ thì $\begin{cases} 3\sqrt{x+4} > 5 \\ 3\sqrt{5x+4} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 4x^2 - 18x - 7 > 0 \forall x \in \left[-\frac{4}{5}; -\frac{1}{2}\right]$

Nếu $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ khi đó $\begin{cases} 2\sqrt{x+4} > 3,5 \\ 2\sqrt{5x+4} > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) < 8x - \frac{135}{14} < 0$.

Vậy hàm nghịch biến trên $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Vậy phương trình sẽ có 1 nghiệm trên $[3;+\infty)$ và 1 nghiệm trên $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Lúc này chỉ ra 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ là xong!

Ngoài cách làm ở trên ta cũng có thể làm theo cách liên hợp rồi 1 nghiệm ra còn một nghiệm dùng hàm số để giải quyết. Ta cùng làm thử cả 2 cách xem sao.

Cách 1.

Ta có

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{x+4} + 3\sqrt{5x+4} + 4x^2 - 18x - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3(\sqrt{x+4} - x + 1) + 3(\sqrt{5x+4} - x - 1) + 4(x^2 - 3x - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-3(x^2 - 3x - 3)}{\sqrt{x+4} + x - 1} + \frac{-3(x^2 - 3x - 3)}{\sqrt{5x+4} + x + 1} + 4(x^2 - 3x - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 3x - 3 = 0 \\ f(x) = \frac{-3}{\sqrt{x+4} + x - 1} - \frac{3}{\sqrt{5x+4} + x + 1} + 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Có } f'(x) = \frac{6\sqrt{x+4} + 3}{2\sqrt{x+4}(\sqrt{x+4} + x - 1)^2} + \frac{6\sqrt{5x+4} + 15}{2\sqrt{5x+4}(\sqrt{5x+4} + x + 1)^2} > 0, \forall x > -\frac{5}{4}.$$

Nên $f(x)$ đồng biến trên $\left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$. Lại có $f(0) = 0$ nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$f(x) = 0.$$

Cách 2.

Ta có

$$\begin{aligned}
 & 3\sqrt{x+4} + 3\sqrt{5x+4} + 4x^2 - 18x - 12 = 0 \\
 & \Leftrightarrow 3(\sqrt{x+4} - 2) + 3(\sqrt{5x+4} - 2) + 4x^2 - 18x = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+4}+2} + \frac{15}{\sqrt{5x+4}+2} + 4x - 18 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nếu $x \in [-0; 8; 0]$ thì. $\begin{cases} \sqrt{x+4} > 1,5 \\ \sqrt{5x+4} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) < 4x - \frac{135}{14} < 0 \forall x \in [-0; 8; 0]$

Nếu $x \geq 0$ ta có $f'(x) = \frac{-3}{2(\sqrt{x+4}+2)^2 \sqrt{x+4}} - \frac{75}{2(\sqrt{5x+4}+2)^2 \sqrt{5x+4}} + 4$

Để thấy với $x \geq 0$ thì $\begin{cases} 2(\sqrt{x+4}+2)^2 \sqrt{x+4} \geq 64 \\ 2(\sqrt{5x+4}+2)^2 \sqrt{5x+4} \geq 64 \end{cases}$.

Khi đó $f'(x) \geq \frac{89}{32} > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Vậy đến đây bài toán đã được giải quyết!

Câu 33. Giải phương trình $x^2 + 8x - 16 - (x-3)\sqrt{3x+1} + (2-x)\sqrt{7x+2} = 0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Đặt $f(x) = x^2 + 8x - 16 - (x-3)\sqrt{3x+1} + (2-x)\sqrt{7x+2} \Rightarrow f'(x) = 2x + 8 - \frac{9x-7}{2\sqrt{3x+1}} - \frac{21x-10}{2\sqrt{7x+2}}$

- **Trường hợp 1.** $x \in \left[-\frac{2}{7}; \frac{10}{21}\right]$. Khi đó thì $\begin{cases} 21x-10 \leq 0 \\ 9x-7 < 0 \\ 2x+8 > 0 \end{cases}$. Cho nên $f'(x) > 0$.
- **Trường hợp 2.** $x \in \left[\frac{10}{21}; \frac{7}{9}\right]$. Khi đó $\begin{cases} 21x-10 > 0 \\ 9x-7 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 2x + 8 - \frac{21x-10}{2\sqrt{7x+2}} - \frac{9x-7}{2\sqrt{3x+1}}$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned}
 2x + 8 - \frac{21x-10}{2\sqrt{7x+2}} &= \frac{2(2x+8)\sqrt{7x+2} - 21x + 10}{2\sqrt{7x+2}} > \frac{40 - 21x + 10}{2\sqrt{7x+2}} > 0 \forall x \in \left[\frac{10}{21}; \frac{7}{9}\right] \\
 &\Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in \left[\frac{10}{21}; \frac{7}{9}\right]
 \end{aligned}$$

- **Trường hợp 3.** $x \geq \frac{7}{9}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
 1. \quad x + 4 - \frac{9x-7}{2\sqrt{3x+1}} &= \frac{2(x+4)\sqrt{3x+1} - 9x + 7}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{\frac{12x^3 + 19x^2 + 224x + 64}{2(x+4)\sqrt{3x+1}} + 7}{2\sqrt{3x+1}} > 0 \\
 2. \quad x + 4 - \frac{21x-10}{2\sqrt{7x+2}} &= \frac{2(x+4)\sqrt{7x+2} - 21x + 10}{2\sqrt{7x+2}} = \frac{\frac{28x^3 - 209x^2 + 512x + 128}{2(x+4)\sqrt{7x+2}} + 10}{2\sqrt{7x+2}} > 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \geq \frac{7}{9}$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\left[-\frac{2}{7}; +\infty\right)$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Câu 34. Giải phương trình $\left(2 - \frac{3}{x}\right)(2\sqrt{x-1} - 1) = \frac{9x^2 - 8x + 4}{3x + 2\sqrt{2x-1}}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – THPT Trần Hưng Đạo – Đắknông

Giải

Đặt $f(x) = \left(2 - \frac{3}{x}\right)(2\sqrt{x-1} - 1) - \frac{9x^2 - 8x + 4}{3x + 2\sqrt{2x-1}}$.

Ta có $f'(x) = \frac{2x^2 + 3x - 6 - 3\sqrt{x-1}}{x^2\sqrt{x-1}} - \frac{(27x^2 - 12)\sqrt{2x-1} + 54x^2 - 52x + 8}{(3x + 2\sqrt{2x-1})^2\sqrt{2x-1}}$

Nhìn đã thấy choáng rồi! Việc chứng minh không phải đơn giản chút nào! Nhưng hãy để ý rằng.

$$9x^2 - 8x + 4 = (3x + 2\sqrt{2x-1})(3x - 2\sqrt{2x-1})$$

Khi đó phương trình sẽ đơn giản hơn rất nhiều. Ta có

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{3}{x}\right)(2\sqrt{x-1} - 1) &= \frac{9x^2 - 8x + 4}{3x + 2\sqrt{2x-1}} \\ \Leftrightarrow \left(2 - \frac{3}{x}\right)(2\sqrt{x-1} - 1) &= \frac{(3x - 2\sqrt{2x-1})(3x + 2\sqrt{2x-1})}{3x + 2\sqrt{2x-1}} \\ \Leftrightarrow \left(2 - \frac{3}{x}\right)(2\sqrt{x-1} - 1) &= 3x - 2\sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow (2x - 3)(2\sqrt{x-1} - 1) &= 3x^2 - 2x\sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow 2(2x - 3)\sqrt{x-1} + 2x\sqrt{2x-1} - 3x^2 - 2x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Bây giờ đặt $f(x) = 2(2x - 3)\sqrt{x-1} + 2x\sqrt{2x-1} - 3x^2 - 2x - 3$.

Ta có

1. $f'(x) = \frac{6x-7}{\sqrt{x-1}} + \frac{6x-2}{\sqrt{2x-1}} - 6x - 2$

2. $\frac{6x-7}{\sqrt{x-1}} - 3x - 1 = \frac{(6\sqrt{x-1} - 3x - 1)\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1}} = \frac{(-9x^2 + 30x - 37)\sqrt{x-1}}{6\sqrt{x-1} + 3x + 1} - 1 < 0, \forall x > 1$

3. $\frac{6x-2}{\sqrt{2x-1}} - 3x - 1 = \frac{6x-2 - (3x+1)\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}} = \frac{-18x^3 + 33x^2 - 15x - 5x + 5}{(6x-2 + (3x+1)\sqrt{2x-1})\sqrt{2x-1}} < 0, \forall x > 1$

Suy ra $f'(x) < 0, \forall x > 1 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $[1; +\infty)$.

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đầu.

Câu 35. Giải phương trình $2x^4 - 4x + 1 - (x^3 - x - 1)\sqrt{3x^3 + 1} = 0$

Giải

Trường hợp 1. Nếu $\begin{cases} x^3 - x - 1 > 0 \\ x \in \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \frac{9}{5}\right] \end{cases}$. Khi đó $\sqrt{3x^3 + 1} \leq \frac{34\sqrt{10}}{25} < \frac{9}{2}$. Suy ra được

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^4 - 4x + 1 - (x^3 - x - 1)\sqrt{3x^3 + 1} \\
 &> 2x^4 - 4x + 1 - \frac{9}{2}(x^3 - x - 1) = \frac{4x^4 - 9x^3 + x + 11}{2} \\
 &= \frac{4\left(x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{9}{10}\right)^2 + \frac{171}{80}x^2 - \frac{71}{10}x + \frac{194}{25}}{2} > 0
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình vô nghiệm khi $\begin{cases} x^3 - x - 1 > 0 \\ x \leq \frac{9}{5} \end{cases}$.

Trường hợp 2. Nếu $\begin{cases} x^3 - x - 1 < 0 \\ x \in \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \frac{9}{5}\right] \end{cases}$. Ta có đánh giá. $\sqrt{3x^3 + 1} > \frac{3}{2}x + \frac{9}{25}(1)$.

• Nếu $x \in \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; -\frac{6}{25}\right]$ thì (1) luôn đúng.

• Nếu $x \in \left[-\frac{6}{25}; \frac{9}{5}\right]$ thì (1) $\Leftrightarrow 3x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{27}{25}x + \frac{544}{625} > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$

$$g'(x) = 9x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{27}{25} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{20}$$

$$g\left(-\frac{6}{25}\right) \approx 0,95 > 0; g\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{22831}{2500} > 0; g\left(\frac{5 + \sqrt{73}}{20}\right) \approx 0,0388 > 0; g\left(\frac{5 - \sqrt{73}}{20}\right) \approx 0,97 > 0$$

Vậy (1) luôn đúng.

Khi đó $f(x) > 2x^4 - 4x + 1 - (x^3 - x - 1)\left(\frac{3}{2}x + \frac{9}{25}\right)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{25x^4 - 18x^3 + 75x^2 - 107x + 68}{25} = \frac{25x^2\left(x - \frac{9}{25}\right)^2 + \frac{19}{25}x^2 + 71\left(x - \frac{107}{142}\right)^2 + \frac{7863}{284}}{25} > 0
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình vô nghiệm trên $\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \frac{9}{5}\right]$.

Trường hợp 3. Nếu $x \geq \frac{9}{5}$.

$$Ta \text{ có } f'(x) = 8x^3 - 4 - \frac{27x^5 - 15x^3 - 3x^2 - 2}{2\sqrt{3x^3 + 1}} = \frac{2(8x^3 - 4)\sqrt{3x^3 + 1} - (27x^5 - 15x^3 - 3x^2 - 2)}{2\sqrt{3x^3 + 1}}$$

Để ý thấy.

$$1. \quad 8x^3 - 4 > 0 \forall x \geq \frac{9}{5}$$

$$2. \quad 27x^5 - 15x^3 - 3x^2 - 2 = 27(x-1)^5 + 135(x-1)^4 + 255(x-1)^3 + 222(x-1)^2 + 84(x-1) + 7 > 0$$

Ta có đánh giá. $\sqrt{3x^3 + 1} < x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{2} (*)$

Bây giờ sẽ đi chứng minh (*) luôn đúng.

$$Ta \text{ có } \sqrt{3x^3 + 1} < x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^4 - \frac{17}{5}x^3 + \frac{76}{25}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{5}{4} > 0 \Leftrightarrow x^2 \left(x - \frac{17}{10} \right)^2 + \frac{3}{20}(x-2)^2 + \frac{13}{20} > 0$$

Vậy (*) luôn đúng.

Khi đó $f'(x) < (-55x^5 - 16x^4 + 195x^3) + (-25x^2 + 8x - 50) < 0$.

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{9}{5}; +\infty \right)$.

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Câu 36. Giải phương trình $x + 1 + 10\sqrt[3]{4 + \sqrt[3]{3-x}} = 9\sqrt[3]{3-x} - \sqrt{x^3 + 3x^2 + 2x + 4}$

Giải

Điều kiện $x^3 + 3x^2 + 2x + 4 \geq 0$

Phương trình tương đương

$$-\sqrt{x^3 + 3x^2 + 2x + 4} - x + 10\sqrt[3]{3-x} = (1 + \sqrt[3]{3-x}) + 10\sqrt[3]{3 + (1 + \sqrt[3]{3-x})} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + 10\sqrt[3]{3-t} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{10}{3\sqrt[3]{(3-t)^2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình (*) tương đương

$$\begin{aligned} -\sqrt{x^3 + 3x^2 + 2x + 4} + f(-x) &= f(1 + \sqrt[3]{3-x}) \\ \Leftrightarrow f(-x) - f(1 + \sqrt[3]{3-x}) - \sqrt{x^3 + 3x^2 + 2x + 4} &= 0 (**) \end{aligned}$$

Vì $x^3 + 3x^2 + 2x + 4 = (x+1)^3 + 3 - x \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{3-x} \geq -x-1$

Hay $-x \leq 1 + \sqrt[3]{3-x} \Rightarrow f(-x) \leq f(1 + \sqrt[3]{3-x})$.

Do đó $VT(**) \leq 0 = VP(**)$. Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x + 4 = 0 \\ -x = 1 + \sqrt[3]{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow (x+1)^3 = x-3 \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt[3]{\frac{18-\sqrt{321}}{9}} - \sqrt[3]{\frac{18+\sqrt{321}}{9}}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1 - \sqrt[3]{\frac{18-\sqrt{321}}{9}} - \sqrt[3]{\frac{18+\sqrt{321}}{9}}$

Câu 37. Giải phương trình $x^2 + x - 1 + \sqrt{x}(\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x^2-1}) - \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{2x^2-2x+2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2-x)$

Giải

Điều kiện $x > 1$, phương trình tương đương

$$\begin{aligned} x^2 - 1 - 2\sqrt{x}\sqrt{x^2-1} + x + \sqrt{x^2-x} - \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{2x^2-2x+2}} - \frac{1}{2}\ln(x^2-x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x})^2 - \left[\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{2x^2-2x+2}} - \sqrt{x^2-x} + \frac{1}{2}\ln(x^2-x) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2-x} > 0$, khi đó ta có

$$\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{2x^2-2x+2}} - \sqrt{x^2-x} + \frac{1}{2}\ln(x^2-x) = f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{2t^2+2}} - t + \ln t$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{2t^2+2}} - t + \ln t$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có

$$f'(t) = \frac{2-2t}{(2t^2+2)\sqrt{2t^2+2}} + \frac{1}{t} - 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Từ đó ta dễ dàng chỉ ra được $f(t) \leq f(1) = 0 \Rightarrow VT \geq 0$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} t=1 \\ \sqrt{x^2-1} = \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Câu 38. Giải phương trình $2x^2 \sin x + x \cos x + \sqrt[3]{2x+1} = x^3 - x^5 + x + 1$

Đề thi chọn tuyển tham dự VMO Hà Nội

Giải

Ta thấy phương trình không có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$ nên ta chỉ xét $x \neq -\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 \sin x + x \cos x + \sqrt[3]{2x+1} + x^5 - x^3 - x - 1$, $x \neq -\frac{1}{2}$.

Ta có $f'(x) = 3x \sin x + (2x^2 + 1) \cos x + \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + 5x^4 - 3x^2 - 1$

Ta sẽ chứng minh đánh giá mạnh hơn là

$$3x \sin x + (2x^2 + 1) \cos x + 5x^4 - 3x^2 - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Ta thấy biểu thức này không thay đổi khi thay x bởi $-x$ nên ta chỉ cần xét $x \geq 0$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, $\forall x \geq 0$.

Xét hàm số $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$, ta có

$$g'(x) = -\sin x + x, \quad g''(x) = -\cos x + 1 \geq 0, \forall x \Rightarrow g'(x) = -\sin x + x \geq g'(0) = 0.$$

Do đó, $g(x)$ là hàm đồng biến trên $[0; +\infty)$ suy ra

$$g(x) \geq g(0) = 0 \Rightarrow \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \forall x \geq 0.$$

Tương tự, ta cũng có $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

Từ hai đánh giá này, ta có

$$3x \sin x + (2x^2 + 1) \cos x + 5x^4 - 3x^2 - 1 \geq 3x \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + (2x^2 + 1) \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + 5x^4 - 3x^2 - 1.$$

Hơn nữa, ta cũng có

$$\begin{aligned} & 3x \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + (2x^2 + 1) \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + 5x^4 - 3x^2 - 1 \\ &= 3x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{3}{2}x^2 - x^4 + 1 + 5x^4 - 3x^2 - 1 = \frac{7x^4 + 3x^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

Nên $3x \sin x + (2x^2 + 1) \cos x + 5x^4 - 3x^2 - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó (*) đúng hay $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến nên phương trình đã cho có không quá một nghiệm.

Mặt khác $f(0) = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Câu 39. Giải phương trình $2010^x (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 1$

Đề thi chọn tuyển trường THPT Sào Nam, tỉnh Quảng Nam

Giải

Phương trình đã cho tương đương với $2010^x = \sqrt{x^2 + 1} + x$

Ta sẽ chứng minh phương trình này có nghiệm duy nhất là $x = 0$. Thật vậy

Xét hàm số $f(x) = 2010^x - (\sqrt{x^2 + 1} + x)$, ta có $f'(x) = 2010^x \cdot \ln 2010 - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1 \right)$

- Nếu $x \geq 0$ thì $f'(x) \geq \ln 2010 - \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} + 1 \right) > 0$ nên hàm đồng biến.

Mà $f(0) = 0$ nên phương trình này có đúng một nghiệm $x = 0$ với $x \geq 0$.

- Nếu $x \leq -1$, ta có

$$f''(x) = 2010^x \cdot (\ln 2010)^2 - \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}, f''(x) = 2010^x \cdot (\ln 2010)^3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^5}} > 0.$$

Suy ra $f''(x)$ là hàm đồng biến nên $f''(x) \leq f''(-1) = \frac{(\ln 2010)^2}{2010} - \frac{1}{2\sqrt{2}} < 0$

Nên $f'(x)$ là hàm nghịch biến, suy ra $f(x) < \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2010^x - (\sqrt{x^2 + 1} + x)] = 0$ nên phương trình $f(0) = 0$ không có nghiệm với $x \leq -1$.

- Nếu $-1 < x \leq -\frac{1}{2}$ thì $\sqrt{x^2 + 1} + x \geq \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, 2010^x \leq \frac{1}{\sqrt{2010}} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ nên trong trường hợp này phương trình vô nghiệm
- Nếu $-\frac{1}{2} < x < 0$ thì $f'(x) = 2010^x \cdot \ln 2010 - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1 \right) > 0$ nên đây là hàm đồng biến, suy ra $f(x) < f(0) = 0$.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Câu 40. Tìm số nghiệm của phương trình

$$(4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x)^4 - 2(4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x)^2 + \cos^2 2x = 0$$

Đề thi chọn đội tuyển chuyên Nguyễn Du

Giải

Đặt $t = 4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x$. Ta có

$$t^4 - 2t^2 + \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)^2 = \sin^2 2x \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 1 = \sin 2x \\ t^2 - 1 = -\sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = (\sin x + \cos x)^2 \\ t^2 = (\sin x - \cos x)^2 \end{cases}$$

Ta được bốn phương trình sau

$$t = \sin x + \cos x, t = -(\sin x + \cos x), t = \sin x - \cos x, t = -\sin x + \cos x$$

Ta thấy hàm số $t(x) = 4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x$ là hàm lẻ nên chỉ cần xét các phương trình

$$t(x) = \sin x + \cos x, t(x) = \cos x - \sin x.$$

Ta có $t(x) = \sin x + \cos x \Leftrightarrow 4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x = \sin x + \cos x$.

Xét hàm số $g(x) = 4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x - (\sin x + \cos x)$ có

$g'(x) = 4022 \cdot 2011x^{2010} + 4018 \cdot 2009x^{2008} + 2 - (\cos x - \sin x) > 0, \forall x$ nên là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hơn nữa $g(0) = -1, g(1) > 0 \Rightarrow g(0)g(1) < 0$, đồng thời hàm số $g(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $(0;1)$, tức phương trình

$$t(x) = \sin x + \cos x$$

có đúng một nghiệm thực.

Tương tự, phương trình $t(x) = \cos x - \sin x$ cũng có đúng một nghiệm thực thuộc $(0;1)$.

Do đó, mỗi phương trình $t(x) = \cos x + \sin x$ và $t(x) = -\cos x + \sin x$ cũng có một nghiệm thực.

Vậy phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm thực.

Câu 40. Chứng minh phương trình sau có đúng một nghiệm

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^{2011} - 2\left(\sqrt{x+1}\right)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

Đề dự bị thi HSG tỉnh Nghệ An

Giải

Điều kiện $x \geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\left(\sqrt{x+1}\right)^{2011} - 2\left(\sqrt{x+1}\right)^3 = (x+1)^3 + 1$

Đặt $t = \sqrt{x+1} \geq 0$. Ta cần chứng minh phương trình $t^{2011} - 2t^3 = t^6 + 1$ có đúng một nghiệm dương.

Xét hàm số $f(t) = t^{2011} - t^6 - 2t^3 - 1, t \geq 0$. Ta có $f(0) = -1, \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ và $f(t)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ nên phương trình $f(t) = 0$ có ít nhất một nghiệm dương.

Ta có $t^{2011} - 2t^3 = t^6 + 1 \Leftrightarrow t^{2011} = (t^3 + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 0$, mà với $t \geq 0$ ta có

$$t^{2011} = (t^3 + 1)^2 \geq 1 \Rightarrow t \geq 1.$$

Khi đó $f'(t) = 2011t^{2010} - 6t^5 - 6t^2 = 1999t^{2010} + 6(t^{2010} - t^5) + 6(t^{2010} - t^2) > 0$ nên đây là hàm đồng biến, tức là nó có không quá một nghiệm

Kết hợp các điều này lại, ta thấy rằng phương trình $t^{2011} - 2t^3 = t^6 + 1$ có đúng một nghiệm dương, tức là phương trình đã cho có đúng một nghiệm.

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 41. Giải phương trình $x^7 + x^5 + x^3 + x = 2\sqrt[3]{2\left(\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}\right)}$

Giải

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương $(x^4 + 1)(x^3 + x) = 2\sqrt[3]{2(x^4 + 1)\left(\frac{x^2 + 1}{x^7}\right)}$

$$\Leftrightarrow (x^4 + 1)(x^2 + 1) = 2\sqrt[3]{2(x^4 + 1)\left(\frac{x^2 + 1}{x^{10}}\right)}$$

Đặt $\begin{cases} a = x^4 + 1 \\ b = x^2 + 1 \end{cases}$, phương trình trở thành $a \cdot b = 2\sqrt[3]{2 \cdot a \cdot \frac{b}{(a-1)^2 \cdot x^2}} \Leftrightarrow a^3 b^3 = \frac{16ab}{x^2(a-1)^2}$

$$\Leftrightarrow ab = \frac{4}{x(a-1)} \quad (\text{vì } a.b \neq 0)$$

Từ đó ta được $x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 - 4 = 0$

Xét hàm số $f(x) = x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 - 4 \Rightarrow f'(x) = 11x^{10} + 9x^8 + 7x^6 + 5x^4 \geq 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Câu 42. Giải phương trình $15x^2 + 10\sqrt{(x+1)^3} + 26 = 6\sqrt{(x+1)^5} + 30\sqrt{x+1}$

Giải

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1, (t \geq 0)$

Phương trình theo t có dạng $15(t^2 - 1)^2 + 10t^3 + 26 = 6t^5 + 30t$

$$\Leftrightarrow f(t) = 6t^5 - 15t^4 - 10t^3 + 30t^2 + 30t - 41 = 0, (t \geq 0)$$

Ta có $\begin{cases} f'(t) = 30(t^2 - t - 1)^2 \geq 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

Suy ra phương trình theo t có nghiệm duy nhất $t = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Phương pháp hàm đặc trưng

Hàm đặc trưng tỏ ra rất hiệu quả trong việc giải các phương trình hay hệ phương trình Trước một bài toán, thường có nhiều cách xử lý khác nhau, nhưng mình nhận thấy nếu như áp dụng được phương pháp sử dụng hàm đặc trưng thì nhiều khi bài toán sẽ được giải quyết đơn giản, ngắn gọn hơn khá nhiều. Trong bài viết này mình sẽ hướng dẫn các bạn một số kỹ thuật sử dụng và các bài toán có liên quan tới chủ đề này !

Câu 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x^2+1} = \sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{x+1}$

Giải

Phân tích. Nếu lập phương hai vế thì phương trình rất phức tạp nhưng hãy để ý tới biểu thức sau $2x^2 + 1 = (2x^2) + 1, x + 2 = (x + 1) + 1$. Khi đó phương trình được viết dưới dạng

$$\sqrt[3]{(x+1)+1} + \sqrt[3]{(x+1)} = \sqrt[3]{(2x^2)+1} + \sqrt[3]{(2x^2)}$$

Ta để ý 2 vế đều có dạng $f(t) = \sqrt[3]{t+1} + \sqrt[3]{t}$ tức người ta gọi đây chính là hàm đặc trưng.

Khi đó phương trình viết dạng $f(x+1) = f(2x^2)$, bây giờ theo như tính chất của hàm số thì ta chỉ cần chứng minh được $f(t) = \sqrt[3]{t+1} + \sqrt[3]{t}$ là hàm đồng biến là bài toán coi như xong!

Ta có $f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(t+1)^2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó phương trình $f(x+1) = f(2x^2) \Leftrightarrow x+1 = 2x^2 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = -\frac{1}{2}, x = 1$.

Nhận xét. Mấu chốt của các bài toán này chính là làm xuất hiện được hàm số đặc trưng, từ đó chứng minh hàm số đó đơn điệu. Tuy nhiên sẽ có một số bài toán ta cần cần tìm thêm điều kiện của biến t

thì mới có thể chứng minh hàm đơn điệu được, chúng ta sẽ tìm hiểu các bài toán đó sau. Sau đây chúng ta sẽ tiếp tục xử lý các bài toán dạng này!

Câu 2. Giải phương trình $2x^3 - x^2 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = 3x + 1 + \sqrt[3]{x^2 + 2}$

Giải

Phân tích. Để ý thấy bậc của phương trình là bậc cao nhất của phương trình là bậc 3 nên ta sẽ có ý tưởng đưa về xét hàm đặc trưng có dạng $f(t) = mt^3 + nt$.

Ta biến đổi phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x + 1 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} &= x^2 + 2 + \sqrt[3]{x^2 + 2} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1}\right)^3 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} &= \left(\sqrt[3]{x^2 + 2}\right)^3 + \sqrt[3]{x^2 + 2} \Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1}\right) = f\left(\sqrt[3]{x^2 + 2}\right) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó phương trình $f\left(\sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1}\right) = f\left(\sqrt[3]{x^2 + 2}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = \sqrt[3]{x^2 + 2}$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy các nghiệm cần tìm của phương trình là $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Câu 3. Giải phương trình $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x - 5}$

Giải

Ta sẽ đưa bài toán về xét hàm số $f(t) = at^3 + bt$.

Vấn đề còn lại là tìm hai hệ số a, b. Trước tiên ta viết về phải về hình thức.

$$a\left(\sqrt[3]{3x - 5}\right)^3 + b\sqrt[3]{3x - 5} = \sqrt[3]{3x - 5} \Rightarrow b = 1.$$

Lúc đó vế trái được viết dưới dạng $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = a(mx + n)^3 + (mx + n)$

Bây giờ ta chỉ cần tìm ba hệ số a, m, n sao cho.

$$a(mx + n)^3 + (mx + n) = a\left(\sqrt[3]{3x - 5}\right)^3 + \sqrt[3]{3x - 5}.$$

$$\text{Vì } 8x^3 = (2x)^3 \Rightarrow am^3 = 8 \Rightarrow \begin{cases} a = 1; m = 2 \\ a = 8; m = 1 \end{cases}$$

Nếu $a = 1; m = 2$ Khi đó ta có $(2x + n)^3 + (2x + n) = 3x - 5 + \sqrt[3]{3x - 5}$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12nx^2 + (6n^2 - 1)x + n^3 + n + 5 = \sqrt[3]{3x - 5} \quad (1)$$

Kết hợp (1) với phương trình đã cho ta có

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12nx^2 + (6n^2 - 1)x + n^3 + n + 5 = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ở hai vế của phương trình ta được } \begin{cases} 12n = -36 \\ 6n^2 - 1 = 53 \\ n^3 + n + 5 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow n = -3$$

Vậy hàm số đặc trưng là $f(t) = t^3 + t$, vậy lời giải chi tiết là

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình

$$(2x-3)^3 + (2x-3) = \left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3 + \sqrt[3]{3x-5} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ (2) ta có

$$\begin{aligned} f(2x-3) &= f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right) \Leftrightarrow 2x-3 = \sqrt[3]{3x-5} \\ \Leftrightarrow (2x-3)^2 &= 3x-5 \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(8x^2 - 20x + 11) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm. $x = 2$; $x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4}$.

Câu 4. Giải phương trình $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11}$

Giải

Cũng như ví dụ trên ta cũng sẽ nghĩ đến việc xét hàm số đặc trưng $f(t) = at^3 + bt$.

Ta viết về phải về hình thức

$$a\left(\sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11}\right)^3 + b\left(\sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11}\right) = \sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11}$$

Từ phương trình này ta suy ra $b = 1$. Lúc này ta viết phương trình về hình thức biến đổi.

$$a(mx+n)^3 + (mx+n) = a\left(\sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11}\right)^3 + \sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11} \quad (1)$$

$$\text{Do hệ số của } x^3 \text{ là 1 nên ta có } am^3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ m = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 8 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ m = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -8 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $(a; m) = (1; 1)$ ta có

$$2x^3 + (3n-9)x^2 + (3n^2+20)x + n^3 + n - 11 = \sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11}.$$

Khi đó kết hợp với phương trình đã cho ta cần tìm n sao cho.

$$2x^3 + (3x-9)x^2 + (3n^2+20)x + n^3 + n - 11 = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

Điều này không thể thực hiện được vì hệ số của x^3 ở hai vế đã khác nhau.

Tương tự cho trường hợp cặp số $(a; m) = \left\{\left(8; \frac{1}{2}\right); (1; -1); \left(-8; -\frac{1}{2}\right)\right\}$ ta cũng không tìm được n . Vậy ta cần tìm n như thế nào đây? Câu trả lời nằm ở phương trình (1) ta có

$$(1) \Leftrightarrow (am^3 + a)x^3 + (3anm^2 - 9a)x^2 + (3n^2am + m + 19a)x + am^3 + n - 11a = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$

Kết hợp với phương trình đã cho ta có

$$(am^3 + a)x^2 + (3anm^2 - 9a)x^2 + (3n^2am + m + 19a)x + am^3 + n - 11a = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

$$\text{Đồng nhất hệ số hai vế phương trình này ta có } \begin{cases} am^3 + a = 1 \\ 3anm^2 - 9a = -6 \\ 3n^2am + m + 19a = 12 \\ an^3 + n - 11a = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ n = -1 \end{cases}$$

Khi đó ta sẽ xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t^3 + t$ và phương trình đã cho sẽ được biến đổi thành.

$$\frac{1}{2}(x-1)^3 + (x-1) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\right)^3 + \sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}.$$

Khi đó phương trình đã cho được biến đổi như sau.

$$\frac{1}{2}(x-1)^3 + (x-1) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\right)^3 + \sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t^3 + t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = \frac{3}{2}t^2 + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ (*) ta có

$$f(x-1) = f\left(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\right) \Leftrightarrow (x-1)^3 = -x^3+9x^2-19x+11$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Do đó phương trình có ba nghiệm. $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$.

Câu 5. Giải phương trình $(x+3)\sqrt{x+1} + (x-3)\sqrt{1-x} + 2x = 0$ ($x \in \mathbb{R}$)

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$ (*)

Ta có $(x+3)\sqrt{x+1} + (x-3)\sqrt{1-x} + 2x = 0$

$$\Leftrightarrow [(x+1)+2]\sqrt{x+1} + 2x = [(1-x)+2]\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^3 + (\sqrt{x+1})^2 + 2\sqrt{x+1} = (\sqrt{1-x})^3 + (\sqrt{1-x})^2 + 2\sqrt{1-x} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ với $t \in [0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0, \forall t \in [0; +\infty)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $[0; +\infty)$.

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 6. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2}$ (1) ($x \in \mathbb{R}$)

Giải

Điều kiện $D = \mathbb{R}$.

Đặt $u = \sqrt[3]{x+1}$ và $v = \sqrt[3]{2x^2}$ khi đó phương trình trở thành $\sqrt[3]{u^3+1} + u = \sqrt[3]{v^3+1} + v$ (1a)

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[3]{t^3+1} + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

$f'(t) = \frac{t^2}{\sqrt[3]{(t^3+1)^2}} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1a) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Với $u = v$ ta có $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2} \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm. $T = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.

Câu 7. Giải phương trình $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$ ($x \in \mathbb{R}$)

Giải

Điều kiện $D = \mathbb{R}$.

Đặt $y = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$, ta có hệ $\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ y^3 = 7x^2 + 9x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ 7x^2 + 9x - 4 = y^3 \end{cases}$

Cộng vế với vế của hai phương trình với nhau ta được phương trình

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = y^3 + y \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow y = x+1$

Với $y = x+1$ ta có phương trình

$$\begin{aligned} x+1 &= \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} \Leftrightarrow (x+1)^3 = 7x^2 + 9x - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-5)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; 5 \right\}$.

Câu 8. Giải phương trình $\left(\sqrt{4x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 16} - 2x^2 + 3x\right)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}\right) = 8$ ($x \in \mathbb{R}$)

Giải

$$\text{Điều kiện. } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 4x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 1 \\ (2x^2 - 3x)^2 + 16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1 (*)$$

Đặt $u = x^2 - \frac{3x}{2}, v = \sqrt{x-1} \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} (\sqrt{4u^2 + 16} - 2u)(\sqrt{v^2 + 4} + v) &= 8 \Leftrightarrow (\sqrt{u^2 + 4} - u)(\sqrt{v^2 + 4} - v) = 4 \\ \Leftrightarrow \sqrt{u^2 + 4} - u &= \frac{4}{\sqrt{v^2 + 4} + v} \Leftrightarrow \sqrt{u^2 + 4} - u = \sqrt{v^2 + 4} + v \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + 4} + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} + 1 = \frac{\sqrt{t^2 + 4} + t}{\sqrt{t^2 + 4}} > \frac{\sqrt{t^2 + 4} + t}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{|t| + t}{\sqrt{t^2 + 4}} \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên

$\mathbb{R}$. Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Ta có $x = v^2 + 1$. Do đó

$$\begin{aligned} u = v &\Leftrightarrow (v^2 + 1)^2 - \frac{3}{2}(v^2 + 1) = v \Leftrightarrow 2v^4 + v^2 - 2v - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (v-1)(2v^3 + 2v^2 + 3v + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 \\ 2v^3 + 2v^2 + 3v + 1 = 0 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Với $v \geq 0$ ta có $2v^3 + 2v^2 + 3v + 1 \geq 0 + 0 + 0 + 1 > 0$ do đó (2) vô nghiệm.

Với $v = 1$ ta có $x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 9. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \frac{x^2 + x}{(x^2 + x + 1)(3x^2 + 3x + 1)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Giải

$$\begin{aligned} \text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \\ 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} &= \frac{x^2 + x}{(x^2 + x + 1)(3x^2 + 3x + 1)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{3x^2 + 3x + 1} \right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1} &= \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3x^2 + 3x + 1} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t} - \frac{1}{2}t$ với $t \in (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x^2 + x + 1) = f(3x^2 + 3x + 1) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 3x^2 + 3x + 1$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \{-1; 0\}$.

Câu 10. Giải phương trình $x - \sqrt{3x - 2} = \sqrt{9x^2 - 6x - x\sqrt{x^2 + 2}}$ (1) ($x \in \mathbb{R}$).

Giải

Điều kiện. $x \geq \frac{2}{3}$ (*). Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x + x\sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{3x - 2} + \sqrt{(3x - 2)3x} \\ &\Leftrightarrow x + x\sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{3x - 2} + \sqrt{3x - 2}\sqrt{(\sqrt{3x - 2})^2 + 2} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 2}$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt{3x - 2}) \Leftrightarrow x = \sqrt{3x - 2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \{1; 2\}$.

Câu 11. Giải phương trình $4|2x - 1|(x^2 - x + 1) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ (1) ($x \in \mathbb{R}$).

Giải

Điều kiện $D = \mathbb{R}$. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow |2x-1| \left[(2x-1)^2 + 3 \right] = (x-2)^3 + 3x - 6 \\ &\Leftrightarrow |2x-1|^3 + 3|2x-1| = (x-2)^3 + 3(x-2) \quad (*)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow f(|2x-1|) = f(x-2) \Leftrightarrow |2x-1| = x-2$ Vô nghiệm

Câu 12. Giải phương trình $x^2 + x + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{2+\sqrt{2+x}} + \sqrt[4]{x+2}$

Giải

Điều kiện $x \geq -1$

Cộng $x+1$ vào hai vế của phương trình ta được

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + \sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)+2} = (\sqrt{x+2})^2 + \sqrt{\sqrt{x+2}} + \sqrt{\sqrt{x+2}+2} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + \sqrt{t} + \sqrt{t+2}$ với $t > 0$ ta có $f(t)$ đồng biến

Mặt khác phương trình $(*)$ có dạng $f(x+1) = f(\sqrt{x+2}) \Rightarrow x+1 = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ hoặc } \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} (L)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 13. Giải phương trình $x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}) = \sqrt{2}(1 + \sqrt{1+x^2})$

Giải

Phân tích. Chúng ta để ý thấy biểu thức bên vế trái có chứa x nhìn rất khó chịu, nên ta sẽ chia cả 2 vế cho x để xem có điều gì đặc biệt không.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $x > 0$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sqrt{\frac{x+1}{2}} + \sqrt{\frac{x+3}{2}} = \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{2}} + \sqrt{\frac{x+1}{2} + 1} = \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t + \sqrt{1+t^2}$ là hàm đồng biến do đó

$$f\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 14. Giải phương trình $-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x-x^3}$

Giải

Ta thấy rằng $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho x^3 ta được

$$-2 + \frac{10}{x} - \frac{17}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2} - 1}$$

Đặt $t = \frac{1}{x}$ suy ra $8t^3 - 17t^2 + 10t - 2 = 2\sqrt[3]{5t^2 - 1}$

$$\Leftrightarrow (2t-1)^3 + 2(2t-1) = (5t^2-1) + 2\sqrt[3]{5t^2-1} \quad (*)$$

Xét hàm $f(u) = u^3 + 2u$ là hàm đồng biến $\forall u \in \mathbb{R}$

Phương trình $(*)$ có dạng $f(2t-1) = f(\sqrt[3]{5t^2-1}) \Rightarrow 2t-1 = \sqrt[3]{5t^2-1}$

$$\Leftrightarrow (2t-1)^3 = 5t^2 - 1 \Leftrightarrow 8t^3 - 17t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{17 \pm \sqrt{97}}{8} \Rightarrow x = \frac{8}{17 \pm \sqrt{97}}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{8}{17 \pm \sqrt{97}}$.

Câu 15. Giải phương trình $x + 10\sqrt[3]{12 + \sqrt[3]{x-3}} + 9 = \sqrt[3]{3-x}$

Giải

Đặt $t = \sqrt[3]{3-x} \Leftrightarrow x = 3 - t^3$. Lúc đó phương trình đã cho trở thành

$$t^3 + t - 12 = 10\sqrt[3]{12 + 9t} \Leftrightarrow t^3 + 10t = (\sqrt[3]{12 + 9t})^3 + \sqrt[3]{12 + 9t} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(u) = u^3 + 10u$, $u \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(u) = 3u^2 + 10 > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với kết quả này thì từ (1) ta có $f(t) = f(\sqrt[3]{12 + 9t}) \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{12 + 9t} \Leftrightarrow t^3 - 9t - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow t^3 - (\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{9})^2 - 3\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9})(t^2 + \sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{9}^2 + \sqrt[3]{3}t - \sqrt[3]{9}t - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow \sqrt[3]{3-x} = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow x = 3 - (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})^3$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3 - (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})^3$.

Câu 16. Giải phương trình $x^3 + 3x + 1 = x^2\sqrt[3]{x^3 + 4x^2}$

Giải

Do $x = 0$ không là nghiệm nên phương trình tương đương

$$1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \sqrt[3]{1 + \frac{4}{x}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + 1\right)^3 + \left(\frac{1}{x} + 1\right) = \left(\frac{4}{x} + 1\right) + \sqrt[3]{\frac{4}{x} + 1} \quad (*)$$

Hàm $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và phương trình $(*)$ có dạng $f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = f\left(\sqrt[3]{\frac{4}{x} + 1}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + 1 = \sqrt[3]{\frac{4}{x} + 1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + 1\right)^3 = \frac{4}{x} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{-3 \pm \sqrt{13}}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\frac{2}{3 \pm \sqrt{13}}$.

Câu 17. Giải phương trình $x + \sqrt[4]{x^2 + x + 1}\sqrt[3]{x^2 + x + 2} = \sqrt[4]{x^2 - x + 1}\sqrt[3]{x^2 - x + 2}$

Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2} + \frac{7}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2} + \frac{7}{4}$$

| Phương pháp hàm số

Do hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t + \sqrt[4]{t + \frac{3}{4}}\sqrt[3]{t + \frac{7}{4}}$ là hàm đồng biến trên $[0; +\infty)$ nên

$$\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 18. Giải phương trình $(5x-6)^2 - \frac{1}{\sqrt{5x-7}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Giải

Điều kiện $x > \frac{7}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với.

$$(5x-6)^2 - \frac{1}{\sqrt{(5x-6)-1}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(u) = u^2 - \frac{1}{\sqrt{u-1}}$, $u > 1$. Ta có $f'(u) = 2u + \frac{1}{2\sqrt{(u-1)^3}} > 0$, $\forall u > 1$.

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trong khoảng $(1; +\infty)$ nên.

Với $x > \frac{7}{5}$, ta có $\begin{cases} x > 1; 5x-6 > 1 \\ f(5x-6) = f(x) \end{cases} \Rightarrow 5x-6 = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Thử lại ta thấy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{3}{2}$.

Câu 19. Giải phương trình $\frac{x^3+6x^2+15x+13}{x^2+4x+7} = \sqrt{x+9} - \frac{1}{x+12}$.

Giải

Điều kiện $x \geq -9$. Phương trình đã cho tương đương với.

$$(x+2) - \frac{1}{x^2+4x+7} = \sqrt{x+9} - \frac{1}{x+12} \Leftrightarrow (x+2) - \frac{1}{(x+2)^2+3} = \sqrt{x+9} - \frac{1}{(x+9)+3} \quad (*)$$

Xét hàm số. $f(u) = u - \frac{1}{u^2+3}$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$$f'(u) = 1 + \frac{2u}{(u^2+3)^2} = \frac{(u^2+3)^2 + 2u}{(u^2+3)^2} = \frac{u^4 + 5u^2 + 8 + (u+1)^2}{(u^2+3)^2} > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên $f(x+2) = f(\sqrt{x+9}) \Leftrightarrow x+2 = \sqrt{x+9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{29}-3}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{\sqrt{29}-3}{2}$.

Câu 20. Giải phương trình $26x^3 + 30x^2 = 4 - \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{3x^2-6x}}$.

Giải

Điều kiện $x > 2$. Đặt $\sqrt{3x} = a$; $\sqrt{x-2} = b$ ($a, b > 0$).

Phương trình đã cho trở thành

$$a^6 + 3a^4 - b^6 - 3b^4 + \frac{a-b}{ab} = 0 \Leftrightarrow a^6 + 3a^4 - \frac{1}{a} = b^6 + 3b^4 - \frac{1}{b} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(u) = u^6 + 3u^4 - \frac{1}{u}$, $u > 0$, ta có $f'(u) = 6u^5 + 12u^3 + \frac{1}{u^2} > 0$, $\forall u > 0$

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = f(b) \\ a, b \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a = b$

Với $a = b$, thay trở lại ta có $\sqrt{3x} = \sqrt{x-2}$ (VN).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 21. Giải phương trình $\sqrt[4]{3(x+5)} - \sqrt[4]{x+13} = \sqrt[4]{11-x} - \sqrt[4]{3(3-x)}$.

Giải

Điều kiện $-5 \leq x \leq 3$. Phương trình đã cho tương đương với.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{3(x+5)} + \sqrt[4]{3(3-x)} &= \sqrt[4]{11-x} + \sqrt[4]{x+13} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{(3x+2)+13} + \sqrt[4]{11-(3x+2)} &= \sqrt[4]{11-x} + \sqrt[4]{x+13} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(u) = \sqrt[4]{11-u} + \sqrt[4]{u+13}$, $u \in [-13; 11]$, ta có hàm số $f(u)$ liên tục trên đoạn $[-13; 11]$, đồng

thời $f'(u) = \frac{1}{4\sqrt[3]{u+13}} - \frac{1}{4\sqrt[3]{11-u}} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = -1$.

Suy ra $f(u)$ đồng biến trên $[-13; -1]$ và nghịch biến trên $(-1; 11]$. Do đó ta có

- Nếu $x \in [-5; -1) \Rightarrow \begin{cases} -13 \leq 3x+2 < -1 \\ 3x+2 < x \end{cases}$ nên $f(3x+2) < f(x)$ hay phương trình $(*)$ không có nghiệm $x \in [-5; -1)$
- Nếu $x \in (-1; 3] \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x+2 < 11 \\ 3x+2 > x \end{cases}$ nên $f(3x+2) < f(x)$ hay phương trình $(*)$ không có nghiệm $x \in (-1; 3]$.

Với $x = -1 \Rightarrow f(x) = f(3x+2)$. Hay phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Câu 22. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} - \frac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{-x^2-x+4}} = x^2-1$.

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = -1 \end{cases}$. Phương trình đã cho tương đương với.

$$\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{1+\sqrt{4-(x^2-x+2)}} - \frac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{4-(x^2+x)}} = x^2-1 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(u) = \frac{u}{1+\sqrt{4-u^2}}$, $0 \leq u \leq 2$, ta có

$$f'(u) = \frac{\sqrt{4-u^2} + 4}{\sqrt{4-u^2}(1-\sqrt{4-u^2})} > 0, \forall u \in [0; 2)$$

Đồng thời $f(u)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$, suy ra $f(u)$ đồng biến trên đoạn $[0; 2]$.

Ta lại có $x = -1$ không là nghiệm của phương trình

| Phương pháp hàm số

Với $x \in \left[0; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$, ta có $\sqrt{x^2-x+2}, \sqrt{x^2+x} \in [0;2]$ và.

- Nếu $0 \leq x < 1 \Rightarrow \sqrt{x^2-x+2} > \sqrt{x^2+x} \Rightarrow f(\sqrt{x^2-x+2}) > f(\sqrt{x^2+x})$, suy ra

$VT(*) = f(\sqrt{x^2-x+2}) > f(\sqrt{x^2+x}) > 0$, đồng thời $VP(*) = x^2 - 1 < 0$ hay phương trình (*) không có nghiệm $x \in [0;1)$

- Nếu $1 < x < \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2-x+2} < \sqrt{x^2+x} \Rightarrow f(\sqrt{x^2-x+2}) < f(\sqrt{x^2+x})$,

Suy ra $VT(*) = f(\sqrt{x^2-x+2}) - f(\sqrt{x^2+x}) < 0$, đồng thời $VP(*) = x^2 - 1 > 0$ hay phương trình (*)

không có nghiệm $x \in \left(1; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$.

Với $x = 1$ ta có $f(\sqrt{x^2-x+2}) = f(\sqrt{x^2+x})$.

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 23. Giải phương trình $(x + \sqrt{x^2 + 4})(x + \sqrt{x^2 - 6x + 10} - 3) = 2$

Giải

Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x + \sqrt{x^2 + 4})(x + \sqrt{x^2 - 6x + 10} - 3) = 2 \\ \Leftrightarrow & \left(-\frac{x}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = (x-3) + \sqrt{(x-3)^2 + 1} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ ta có $f'(t) = \frac{t + \sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và phương trình (*) có dạng

$$f\left(-\frac{x}{2}\right) = f(x-3) \Rightarrow -\frac{x}{2} = x-3 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 2$.

Câu 24. Giải phương trình $24x^2 - 60x + 36 - \frac{1}{\sqrt{5x-7}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$

Giải

Điều kiện $x > \frac{7}{5}$.

Phương trình tương đương $(5x-6)^2 - \frac{1}{\sqrt{(5x-6)-1}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow f(5x-6) = f(x)$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ trên $(1; +\infty)$ có $f'(t) = 2t + \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t-1}} > 0, \forall t > 1$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên nửa khoảng $(1; +\infty)$.

Khi đó phương trình $f(5x-6) = f(x) \Leftrightarrow 5x-6 = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Câu 25. Giải phương trình $(x+1)^2(4+\sqrt{x^2+2x+4})+x(x+1)(8+2\sqrt{4x^2+3})=\frac{3}{2}+\frac{1}{2x}$

Giải

Điều kiện $x \neq 0$. Do $x = -1$ không là nghiệm nên với $x \neq -1$ ta có

$$\begin{aligned} (x+1)^2(4+\sqrt{x^2+2x+4})+x(x+1)(8+2\sqrt{4x^2+3}) &= \frac{1}{(x+1)} \cdot \frac{3x+1}{2x} \\ \Leftrightarrow (x+1)\left[4+\sqrt{(x+1)^2+3}\right]+2x\left[4+\sqrt{(2x)^2+3}\right] &= \frac{3x+1}{2x^2+2x} \\ \Leftrightarrow (x+1)\left[4+\sqrt{(x+1)^2+3}\right] &= (-2x)\left[4+\sqrt{(-2x)^2+3}\right]+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x} \\ \Leftrightarrow (x+1)\left[4+\sqrt{(x+1)^2+3}\right]-\frac{1}{x+1} &= (-2x)\left[4+\sqrt{(-2x)^2+3}\right]-\frac{1}{(-2x)} \\ \Leftrightarrow f(x+1) &= f(-2x) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(4+\sqrt{t^2+3}\right)-\frac{1}{t}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ có

$$f'(t)=4+\sqrt{t^2+3}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}+\frac{1}{t^2}>0, \forall t \neq 0$$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến. Suy ra $f(x+1)=f(-2x) \Leftrightarrow x+1=-2x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

Câu 26. Giải phương trình $2x^3-x-\frac{1}{8}=\sqrt[3]{\frac{9}{8x^2}+\frac{1}{x}}-1$

Giải

Điều kiện $x \neq 0$. Nhân hai vế phương trình cho x , ta được

$$\begin{aligned} 2x^3-x-\frac{1}{8}x &= \sqrt[3]{\frac{9x}{8}+x^2-x^3} \Leftrightarrow x^3+x=-x^3+x^2+\frac{9x}{8}+\sqrt[3]{-x^3+x^2+\frac{9x}{8}} \\ \Leftrightarrow x^3+x &= \left(\sqrt[3]{-x^3+x^2+\frac{9x}{8}}\right)^3+\sqrt[3]{-x^3+x^2+\frac{9x}{8}} \Leftrightarrow f(x)=f\left(\sqrt[3]{-x^3+x^2+\frac{9x}{8}}\right) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có $f(x)=f\left(\sqrt[3]{-x^3+x^2+\frac{9x}{8}}\right) \Leftrightarrow x=-x^3+x^2+\frac{9x}{8}$

$$\Leftrightarrow 2x^3-x^2-\frac{9}{8}x=0 \Leftrightarrow x(16x^2-8x-9)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=\frac{1 \pm \sqrt{10}}{4}.$$

Câu 27. Giải phương trình $\sqrt{5+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{5-4x-x^2}=\frac{x}{2}+\sqrt{x+6}$

Giải

Điều kiện $-5 \leq x \leq 1$.

Đặt $y=\sqrt{5+x}+\sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow y^2=6+2\sqrt{(x+5)(1-x)} \Leftrightarrow \sqrt{5-4x-x^2}=\frac{y^2-6}{2}$

Phương trình đầu tương đương

$$y+\frac{y^2-6}{2}=\frac{x}{2}+\sqrt{x+6} \Leftrightarrow y+\frac{y^2}{2}-3=\sqrt{x+6}+\frac{(\sqrt{x+6})^2}{2}-3 \Leftrightarrow f(y)=f(\sqrt{x+6})$$

| Phương pháp hàm số

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{t^2}{2} - 3$ trên $[0; +\infty)$ có $f'(t) = 1 + t > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$ và có $f(y) = f(\sqrt{x+6}) \Leftrightarrow y = \sqrt{x+6}$

Khi đó phương trình $\sqrt{5+x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{x+6} \Leftrightarrow 2\sqrt{5-4x-x^2} = x \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{41}-8}{5}$.

Câu 28. Giải phương trình $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+4} + 2\sqrt{12-x-x^2} = 4x-2 + \sqrt{4x+5}$

Giải

Điều kiện $-4 \leq x \leq 3$.

Đặt $y = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+4} \geq 0 \Rightarrow y^2 = 7 + 2\sqrt{12-x-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{12-x-x^2} = y^2 - 7$

Phương trình tương đương

$$y + y^2 - 7 = 4x - 2 + \sqrt{4x+5} \Leftrightarrow y + y^2 - 7 = \sqrt{4x+5} + (\sqrt{4x+5})^2 - 7 \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{4x+5})$$

Xét hàm số $f(t) = t + t^2 - 7$ trên $[0; +\infty)$ có $f'(t) = 1 + 2t > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$ và có $f(y) = f(\sqrt{4x+5}) \Leftrightarrow y = \sqrt{4x+5}$

Khi đó phương trình $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+4} = \sqrt{4x+5} \Leftrightarrow \sqrt{12-x-x^2} = 2x-1 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{229}}{10}$.

Câu 29. Giải phương trình $5(x^2 - x - 6)\sqrt{5x-19} = (x+2)(x+5+4\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}+2)$

Giải

Điều kiện $x \geq 3$.

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 5(x+2)(x-3)\sqrt{5x-19} &= (x+2)\left[(\sqrt{x-3})^2 + 4\sqrt{x-3} + 2^2 + 4\right](\sqrt{x-3}+2) \\ \Leftrightarrow (5x-15)\sqrt{5x-19} &= \left[(\sqrt{x-3}+2)^2 + 4\right](\sqrt{x-3}+2) \quad (do: x+2 > 0, \forall x \geq 3) \\ \Leftrightarrow \left[(\sqrt{5x-19})^2 + 4\right]\sqrt{5x-19} &= (\sqrt{x-3}+2)^3 + 4(\sqrt{x-3}+2) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{5x-19})^3 + 4\sqrt{5x-19} &= (\sqrt{x-3}+2)^3 + 4(\sqrt{x-3}+2) \Leftrightarrow f(\sqrt{5x-19}) = f(\sqrt{x-3}+2) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 4t$ có $f'(t) = 3t^2 + 4 > 0, \forall t$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó có $f(\sqrt{5x-19}) = f(\sqrt{x-3}+2) \Leftrightarrow \sqrt{5x-19} = \sqrt{x-3}+2$

$$\Leftrightarrow 5x-19 = x+1+4\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = x-5 \Leftrightarrow x = 7.$$

Bài toán được giải quyết.

Câu 30. Giải phương trình $\frac{4(1+\sqrt{1+4x})}{x+1+\sqrt{x^2+3x+2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)^2$

Giải

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \frac{4+4\sqrt{1+4x}}{x+1+\sqrt{(x+1)(x+2)}} &= \frac{1}{x} - \frac{x}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)^2} \\ \Leftrightarrow 4x+4x\sqrt{1+4x} &= \frac{x+1+\sqrt{(x+1)(x+2)}}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x+1}} \Leftrightarrow f(4x) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{1+t}$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = 1 + \sqrt{1+t} + \frac{t}{2\sqrt{1+t}} > 0$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$

Khi đó phương trình $f(4x) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) \Leftrightarrow 4x = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$

Câu 31. Giải phương trình $\frac{(2x-1)^2(4x^2-4x+3)}{4} = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} + 2\sqrt{4x-4x^2+3} + 4$

Giải

Điều kiện $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} (\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x}) + (\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x})^2 &= \frac{(2x-1)^2}{2} + \left[\frac{(2x-1)^2}{2} \right]^2 \\ \Leftrightarrow f(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x}) &= f\left(\frac{(2x-1)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + t^2$ trên $[0; +\infty)$ có $f'(t) = 1 + 2t > 0$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Suy ra $f(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x}) = f\left(\frac{(2x-1)^2}{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \frac{(2x-1)^2}{2} \quad (i)$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{2x+1} \geq 0 \\ v = \sqrt{3-2x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u^2 - v^2 = 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ \frac{1}{2}(u^2 - v^2) = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Kết hợp với phương trình (i) được hệ } \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u + v = \frac{(u^2 - v^2)^2}{8} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ 8 = (u - v)^2(u + v) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ (u^2 + v^2 - 2uv)(u + v) = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (u + v)^2 - 2uv = 4 \\ (2 - uv)(u + v) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 4 \\ (2 - P)S = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $\begin{cases} S = u + v \geq 0 \\ P = uv \geq 0 \end{cases} (S^2 \geq 4P)$ và giải hệ này được $\begin{cases} P = 0 \\ S = 2 \end{cases}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} = 2 \\ \sqrt{3-2x} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{2x+1} = 0 \\ \sqrt{3-2x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

So với điều kiện nghiệm phương trình là $x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{2}$.

Câu 32. Giải phương trình $7x^2 - 13x + 8 = 2x^2 \sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}$

Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Do $x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế phương trình cho $x^3 \neq 0$, ta được

$$\frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3}$$

| Phương pháp hàm số

Đặt $y = \frac{1}{x}$, $y \neq 0$ thì phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 8y^3 - 13y^2 + 7y &= 2\sqrt[3]{y^2 + 3y - 3} \\ \Leftrightarrow (2y-1)^3 + 2(2y-1) &= \left(\sqrt[3]{y^2 + 3y - 3}\right)^3 + 2\sqrt[3]{y^2 + 3y - 3} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $f(2y-1) = f\left(\sqrt[3]{y^2 + 3y - 3}\right) \Leftrightarrow 2y-1 = \sqrt[3]{y^2 + 3y - 3}$

Từ đó tìm được các nghiệm là $x = 1$, $x = \frac{-5 + \sqrt{89}}{4}$, $x = -\frac{5 + \sqrt{89}}{4}$.

Câu 33. Giải phương trình $4x^2 + 18x + \frac{14}{x} + 27 = \sqrt[3]{\frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}}$.

Giải

Điều kiện $x \neq 0$.

Nhân 2 vế phương trình cho x , được $4x^3 + 18x^2 + 27x + 14 = \sqrt[3]{4x + 5}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x+3)^3 + (2x+3) = \left(\sqrt[3]{4x+5}\right)^3 + \sqrt[3]{4x+5} \Leftrightarrow f(2x+3) = f\left(\sqrt[3]{4x+5}\right)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t^3 + t$ có $f'(t) = \frac{3}{2}t^2 + 1 > 0, \forall t$, nên $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $f(2x+3) = f\left(\sqrt[3]{4x+5}\right) \Leftrightarrow 2x+3 = \sqrt[3]{4x+5} \Leftrightarrow (2x+3)^3 = 4x+5$

$$\Leftrightarrow (x+1)(8x^2 + 28x + 22) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Câu 34. Giải phương trình $9x^2 - 28x + 21 = \sqrt{x-1}$.

Giải

- Với $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right)$ thì $(4-3x)^2 + (4-3x) = (\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow f(4-3x) = f(\sqrt{x-1})$

Xét $f(t) = t^2 + t$ trên $\left[1; \frac{3}{2}\right)$ có $f'(t) = 2t + 1 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra } f(4-3x) = f(\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 4-3x \Leftrightarrow x = \frac{25 - \sqrt{13}}{8}$$

- Với $x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ thì $(3x-5)^2 + (3x-5) = (\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow f(3x-5) = f(\sqrt{x-1})$

Xét $f(t) = t^2 + t$ trên $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ có $f'(t) = 2t + 1 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó phương trình } f(3x-5) = f(\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow 3x-5 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ 9x^2 - 31x + 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 35. Giải phương trình $(1 + \sqrt{x+1})\left(\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + x - 1\right) = x\sqrt{x}$

Giải

Điều kiện $x > 0$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + 1} - \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + 1} - \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+1} - t$ ta có $f'(t) = \frac{t - \sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{1}{(t + \sqrt{t^2+1})\sqrt{t^2+1}} < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ nghịch biến và ta có $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Câu 36. Giải phương trình $x = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+x}}$

Giải

Đặt $x = 2t$, thay vào ta được

$$2t = \sqrt[3]{1+2t} + \sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+2t}} \Leftrightarrow 2t + \sqrt[3]{1+2t} = 2\sqrt[3]{1+2t} + \sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+2t}} \Leftrightarrow f(t) = f(\sqrt[3]{1+2t})$$

Với $f(k) = 2k + \sqrt[3]{1+2k}$ là hàm đồng biến với mọi k .

$$\Rightarrow t = \sqrt[3]{1+2t} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^3 = 1+x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-2; 1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}\}$.

Chú ý. Phương pháp này có thể giải quyết được một loạt các phương trình như dưới đây mà các phương pháp khác (như đặt ẩn phụ) chưa chắc giải quyết được

$$1) nx = \sqrt{1+x} + \sqrt{1+\sqrt{1+x}} + \dots + \sqrt{1+\sqrt{1+\dots+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}$$

2) Luyện tập thêm.

Giải các phương trình sau.

$$a) x + \sqrt{1+x} + \sqrt{1+\sqrt{1+x}} = 3\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$$

$$b) x = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{1+x}} + \sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{1+x}}}$$

Câu 37. Giải phương trình $x^3 - 2 = 3\sqrt[3]{3x+2}$

Giải

Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình

$$x^3 + 3x = 3x + 2 + \sqrt[3]{3x+2} \Leftrightarrow x^3 + 3x = \left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^3 + 3\sqrt[3]{3x+2} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ (1) ta có

$$f(x) = f\left(\sqrt[3]{3x+2}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x+2} \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm. $x = -1; x = 2$

Câu 38. Giải phương trình $2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 2(3x-1)\sqrt{3x-1}$

Giải

Điều kiện. $x \geq \frac{1}{3}$. Phương trình đã cho được biến đổi như sau.

$$2x^3 + x^2 = 2\left(\sqrt[3]{3x-1}\right)^3 + \left(\sqrt{3x-1}\right)^2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t^2, \quad t > 0$. Ta có $f'(t) = 6t^2 + 2t > 0, \quad \forall t > 0$

| Phương pháp hàm số

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và luôn đồng biến trong khoảng $(0; +\infty)$. Do đó từ (1) ta có

$$f(x) = f(\sqrt{3x-1}) \Leftrightarrow x = \sqrt{3x-1} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Câu 39. Giải phương trình $\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x^2+4x+5}\sqrt[4]{x^2+4x+1} = \sqrt[3]{x+12}\sqrt[4]{x^2+11x+24}$

Giải

Điều kiện $x \geq -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[4]{(x^2+4x+1)(x^2+4x+4)}\sqrt[3]{x^2+4x+5} = \sqrt[4]{(x+3)(x+7)}\sqrt[3]{x+12}$$

Đặt $t = x^2 + 4x + 1$, phương trình trở thành $\sqrt[4]{(t+3)(t+7)}\sqrt[3]{t+6} = \sqrt[4]{(x+3)(x+7)}\sqrt[3]{x+6}$

Xét hàm số $f(k) = \sqrt[4]{(k+3)(k+7)}\sqrt[3]{k+6}$; $k \in [-2; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(k) = \frac{(k+5)\sqrt[3]{k+6}}{2\sqrt[4]{[(k+3)(k+7)]^3}} + \frac{\sqrt[4]{(k+3)(k+7)}}{3\sqrt[3]{(k+6)^2}} > 0.$$

Suy ra $f(k)$ là hàm đồng biến trên $[-2; +\infty)$.

$$\text{Nên ta có } f(t) = f(x) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = x \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

So với điều kiện, ta nhận $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình

Vậy $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 40. Giải phương trình $\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x^2+4x+7}\sqrt[4]{x^2+4x+8} = \sqrt[3]{x+6}\sqrt[4]{x^2+10x+21}$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+10x+21 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \in (-\infty; 7] \cup [-3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$$

Phương trình đã cho tương đương với.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2}\sqrt[3]{(x+2)^2+3}\sqrt[4]{(x+2)^2+4} &= \sqrt[3]{(x+3)+3}\sqrt[4]{(x+3)(x+7)} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+2})\left(\sqrt[3]{(x+2)^2+3}\right)\left(\sqrt[4]{(x+2)^2+4}\right) &= \left(\sqrt{\sqrt{x+3}}\right)\left(\sqrt[3]{(\sqrt{x+3})^2+3}\right)\left(\sqrt[4]{(x+3)+4}\right) \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số. $f(t) = t\sqrt[3]{t^4+3}\sqrt[4]{t^4+4}$ ($t \geq 0$)

$$\text{Ta có } f'(t) = \sqrt[3]{t^4+3}\sqrt[4]{t^4+4} + \frac{4t^4\sqrt[4]{t^4+4}}{3\sqrt[3]{(t^4+3)^2}} + \frac{4t^4\sqrt[3]{t^4+3}}{4\sqrt[4]{(t^4+4)^3}} > 0, \quad \forall t \geq 0$$

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) = f(\sqrt[4]{x+3}) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt[4]{x+3} \Leftrightarrow (x+2)^2 = x+3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình

Vậy $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 41. Giải phương trình $\sqrt[4]{3(x+5)} - \sqrt[4]{x+13} = \sqrt[4]{11-x} - \sqrt[3]{3(3-x)}$.

Giải

Điều kiện $-5 \leq x \leq 3$.

Phương trình đã cho được viết lại thành $\sqrt[4]{15+3x} + \sqrt[4]{9-3x} = \sqrt[4]{15+(x-2)} + \sqrt[4]{9-(x-2)}$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[4]{15+t} + \sqrt[4]{9-t}$ trên đoạn $t \in [-15; 9]$, ta có

$$f'(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(\sqrt[4]{15+t})^3} - \frac{1}{(\sqrt[4]{9-t})^3} \right) \Rightarrow f'(t) \geq 0, \quad \forall t \in (-15; -3].$$

Và $f'(t) \leq 0, \quad \forall t \in [-3; 9]$

Ta nhận thấy, với $x \in [-1; 3] \Rightarrow 3x; x-2 \in [-3; 9]$. Và $x \in [-5; -1] \Rightarrow 3x; x-2 \in [-15; -3]$.

Từ đó, suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[-15; -3]$ và nghịch biến trên $[-3; 9]$ nên

$$f(3x) = f(x-2) \Leftrightarrow 3x = x-2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy, $x = -1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 42. Giải phương trình $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$

Giải

Ta có $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1 \Leftrightarrow 6x+1 + \sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{6x+1}) = f(2x)$

Trong đó $f(t) = t^3 + t$. Dễ thấy $f(t)$ là một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$f(\sqrt[3]{6x+1}) = f(2x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1} = 2x \Leftrightarrow 8x^3 = 6x+1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Nếu $|x| > 1$ thì $|VT(1)| = |x(4\cos^2 - 3)| > 1 > \frac{1}{2}$.

Nếu $|x| \leq 1$ thì đặt $x = \cos \varphi, \quad \varphi \in [0; \pi]$.

Phương trình trở thành. $4\cos^4 \varphi - 3\cos \varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{3k\pi}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = \cos \frac{\pi}{9}; \quad x = \cos \frac{5\pi}{9}; \quad x = \cos \frac{7\pi}{9}$.

Câu 43. Giải phương trình $4x = \sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{x+30}}}}$

Giải

Đặt $\frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{x+30}}} = y$

Đặt $\frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{x+30}} = z$

Đặt $\frac{1}{4}\sqrt{x+30} = t$.

| Phương pháp hàm số

$$\text{Ta có.} \begin{cases} 4x = \sqrt{30+y} \\ 4y = \sqrt{30+z} \\ 4z = \sqrt{30+t} \\ 4t = \sqrt{30+x} \end{cases}.$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{30+t}$ có $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{30+t}} > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-30; +\infty)$.

Từ đó suy ra $x = y = z = t = \frac{1 + \sqrt{1921}}{32}$.

Câu 44. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{\sqrt{x^4 + 2x^2\sqrt{x-2} + x - 93} - 2 + x^4 + 2x^2\sqrt{x-2} + x - 93}$$

Giải

Biến đổi VP $= \sqrt{\sqrt{(x^2 + \sqrt{x-2})^2 - 91} - 2 + (x^2 + \sqrt{x-2})^2 - 91}$.

Đặt $t = \sqrt{(x^2 + \sqrt{x-2})^2 - 91}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{t^2 + 91} = \sqrt{x-2} + x^2 \\ \sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{x-2} + t^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{t-2} + t^2 + \sqrt{t^2 + 91} = \sqrt{x-2} + x^2 + \sqrt{x^2 + 91}$$

Hàm số $f(t) = \sqrt{t-2} + t^2 + \sqrt{t^2 + 91}$ với $t \geq 2$ là hàm số đồng biến nên suy ra $t = x$.

Khi đó ta có $(x^2 + \sqrt{x-2})^2 = x^2 + 91 \Rightarrow (x^2 + \sqrt{x-2})^2 - 100 = x^2 - 9$

$$\Leftrightarrow (x^2 + \sqrt{x-2} - 10)(x^2 + \sqrt{x-2} + 10) = x^2 - 9$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-3)(x+3) + \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} \right] (x^2 + \sqrt{x-2} + 10) = (x-3)(x+3)$$

Xét phương trình $\left[(x+3) + \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} \right] (x^2 + \sqrt{x-2} + 10) = (x+3)$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x^2 + \sqrt{x-2}) + 9x + 27 + \frac{x^2 + \sqrt{x-2} + 10}{\sqrt{x-2} + 1} = 0$$

Phương trình này vô nghiệm vì $x \geq 2$.

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Câu 45. Giải phương trình $\left(\frac{1}{(1-x)^2} + 1 \right) \sqrt{\frac{1}{x} - x} - \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \sqrt{\frac{1}{1-x} + x - 1} = 0$.

Giải

Biến đổi phương trình đã cho trở thành $\frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\sqrt{\frac{1}{x} - x}} = \frac{\frac{1}{(1-x)^2} + 1}{\sqrt{\frac{1}{1-x} + x - 1}}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = \frac{\frac{1}{t^2} + 1}{\sqrt{\frac{1}{t} - t}}$, $0 < t < 1$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-\frac{2}{t^3}\sqrt{\frac{1}{t}-t} - \frac{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)\left(-\frac{1}{t^2}-1\right)}{2\sqrt{\frac{1}{t}-t}}}{\frac{1}{t}-t} = \frac{-4-(t^2-1)^2}{2t^4\left(\frac{1}{t}-t\right)\sqrt{\frac{1}{t}-t}} < 0, t \in (0;1).$$

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và nghịch biến với $0 < t < 1$.

$$\text{Do đó từ (1) ta có } f\left(\frac{1}{x^2}\right) = f\left(\frac{1}{1-x}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm duy nhất của phương trình là $x = \frac{1}{2}$.

$$\textbf{Câu 46.} \text{ Giải phương trình } (\sqrt{x+4}-1)\sqrt{x+2} \geq \frac{x^3+4x^2+3x-2(x+3)\sqrt[3]{2x+3}}{(\sqrt[3]{2x+3}-3)(\sqrt{x+4}+1)}$$

Giải

Biến đổi bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+4}-1)\sqrt{x+2} &\geq \frac{x^3+4x^2+3x-2(x+3)\sqrt[3]{2x+3}}{(\sqrt[3]{2x+3}-3)(\sqrt{x+4}+1)} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)\sqrt{x+2} &\geq \frac{x^3+4x^2+3x-2(x+3)\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{2x+3}} \\ \Leftrightarrow (x+3)\sqrt{x+2} &\geq \frac{x^3+4x^2-3x-18+6(x+3)-2(x+3)\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{2x+3}-3} \\ \Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{x+2}+2) &\geq \frac{x^3+4x^2-3x-18}{\sqrt[3]{2x+3}-3} \\ \Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{x+2}+2) &\geq \frac{(x+3)^2(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+2}-2)}{\sqrt[3]{2x+3}-3} \\ \Leftrightarrow 1 &\geq \frac{(x+3)(\sqrt{x+2}-2)}{\sqrt[3]{2x+3}-3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+3}+2x+3 \geq (x+3)\sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+3} + (\sqrt[3]{2x+3})^3 &\geq (\sqrt{x+2})^3 + (\sqrt{x+2}) \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{2x+3}) \geq f(\sqrt{x+2}) \end{aligned}$$

Xét $f(t) = t^3 + t$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$. Nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó bất phương trình tương đương $\sqrt[3]{2x+3} \geq \sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow 2x+3 \geq \sqrt{(x+2)^3} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3-2x^2+1 \geq 0 \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

$$\textbf{Bài tập tương tự.} \text{ Giải phương trình } \sqrt{x+1} = \frac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$$

$$\textbf{Câu 47.} \text{ Giải phương trình } \sqrt{x+1+\sqrt{x^2+x+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}} = \frac{1}{x} - x - 1$$

Giải

Điều kiện $x > 0$

Biến đổi phương trình tương đương

$$\sqrt{x+1+\sqrt{(x+1)^2-[(x+1)-1]}}+x+1=\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{x}-1\right)}}+\frac{1}{x} (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t)=\sqrt{t+\sqrt{t^2-(t-1)}}+t \Rightarrow f'(t)=1+\frac{1+\frac{2t-1}{2\sqrt{t^2-t+1}}}{2\sqrt{t^2-t+1}}>0, \forall t>0$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

$$\text{Khi đó phương trình } (*) \text{ tương đương } f(x+1) \leq f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2+x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Câu 48. Giải phương trình $^{2016}\sqrt{(3x+15)^{2015}} + ^{2016}\sqrt{(9-3x)^{2015}} = ^{2016}\sqrt{(11-x)^{2015}} + ^{2016}\sqrt{(13+x)^{2015}}$

Giải

Điều kiện xác định $x \in [-5;3]$.

$$\text{Xét hàm số } f(t) = ^{2016}\sqrt{(15+t)^{2015}} + ^{2016}\sqrt{(9-t)^{2015}}, \forall t \in [-15;9]$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{2015}{2016} \left[(t+15)^{\frac{-1}{2016}} - (9-t)^{\frac{-1}{2016}} \right], f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -3$$

Suy ra hàm số đồng biến trên $f(t)$ đồng biến trên $(-15;-3)$ và nghịch biến trên $(-3;9)$

Khi đó phương trình tương đương

$$^{2016}\sqrt{(3x+15)^{2015}} + ^{2016}\sqrt{(9-3x)^{2015}} = ^{2016}\sqrt{(15+(x-4))^{2015}} + ^{2016}\sqrt{(9-(x-4))^{2015}} (*)$$

- Với $x \in [-5;-1]$ phương trình $(*)$ tương đương $x = -2$ - thỏa mãn.
- Với $x \in (-1;3]$ phương trình $(*)$ tương đương $x = -2$ - loại

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -2$.

Các bài toán hệ phương trình

Nhìn chung nội dung của phương pháp này mình đã đề cập trong chuyên đề phương trình trước đó với các kỹ thuật hay dùng. Ở phần này các bài toán cũng không có gì khác biệt nhiều, bên cạnh đó có một số kỹ thuật khác thì các bạn sẽ được giới thiệu trong từng ví dụ cụ thể. Nào bây giờ chúng ta sẽ cùng bắt đầu đi vào các bài toán đầu tiên nhé !

Câu 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 13x - 4y + 8 = y^3 - x^3 + 3(y^2 - 2x^2) \\ x^2(x-2)(y+1) = 5(1-2y) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi được về phương trình

$$x^3 + 6x^2 + 13x + 8 = y^3 + 3y^2 + 4y \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 4(x+1) = y^3 + 3y^2 + 4y \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 + 4t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 6t + 4 = 3(t+1)^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó ta có hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) ta có $f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow y = x+1$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình

$$\begin{aligned} x^2(x-2)(x+2) + 5(2x+1) &= 0 \Leftrightarrow x^4 - (2x+5)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x - 5) &= 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{6} \Rightarrow y = 2 + \sqrt{6} \\ x = 1 - \sqrt{6} \Rightarrow y = 2 - \sqrt{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x, y) = \{(1 + \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6}); (1 - \sqrt{6}; 2 - \sqrt{6})\}$.

Câu 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2 + 3y^2)x^3 + (2x - 3y^4)y^4 = (y^4 + 2)y^6 \\ \sqrt{4x+5} + 2\sqrt{y^2+3} = 7 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq -\frac{5}{4}$.

Phương trình thứ nhất được biến đổi lại thành phương trình

$$x^5 + 3x^3y^2 + 2xy^4 = y^{10} + 3y^8 + 2y^6 \quad (1)$$

Xét $y = 0 \Rightarrow x = 0$ không thỏa hệ phương trình

Với $y \neq 0$ ta chia hai vế (1) cho y^5 ta được phương trình

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + 3\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{y}\right) = y^5 + 3y^3 + 2y \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^5 + 3t^3 + 2t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 5t^4 + 9t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó từ (2) $\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow x = y^2$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình

$$\begin{aligned} \sqrt{4x+5} + 2\sqrt{x+3} &= 7 \Leftrightarrow 4x+5 + 4x+12 + 4\sqrt{4x^2+17x+15} = 49 \\ \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+17x+15} &= 8-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2x \geq 0 \\ 4x^2+17x+15 = 64-32x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ 49x = 49 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có $x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

| Phương pháp hàm số

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x, y) = \{(1; 1); (1; -1)\}$.

Câu 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x+3} - \sqrt{2y+3} = 4(y-x) \\ x = \sqrt[5]{x(1-y^3)} + 15(y^2+1) - 29 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ y \geq -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình

$$\sqrt{2x+3} + 4x = \sqrt{2y+3} + 4y \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2t+3} + 4t, \forall t \geq -\frac{3}{2}$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + 4 > 0, \forall t > -\frac{3}{2}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$, do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình

$$\begin{aligned} x = \sqrt[5]{x(1-x^3)} + 15(x^2+1) - 1 &\Leftrightarrow x^5 + x^4 - 15x^2 - x + 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x^2-1)(x^2+3x+7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=-1 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=2 \Rightarrow y=2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \{(-1; -1); (1; 1); (2; 2)\}$.

Câu 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt{1-y} = 2 \\ x^2 - y^4 + 9y = x(9+y-y^3) \end{cases}$$

Giải

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x(x-y) + y^3(x-y) - 9(x-y) \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y^3-9=0 \end{cases}$

Với $x=y$ thế vào phương trình 1 ta được $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{1-x} = 2 (x \leq 1)$

Đặt $t^3 = x+1 \Rightarrow t + \sqrt{2-t^3} = 2 \Rightarrow -t^3 - t^2 + 4t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1+\sqrt{3} \\ t=-1-\sqrt{3} \end{cases}$

Đến đây ta tìm được 3 bộ nghiệm

$$(x, y) = \{(0; 0); (-11+6\sqrt{3}; -11+6\sqrt{3}); (-11-6\sqrt{3}; -11-6\sqrt{3})\}$$

Với $x = 9 - y^3$ thế vào phương trình 2 ta được $\sqrt[3]{10-y^3} + \sqrt{1-y} = 2$

Xét hàm số $f(y) = \sqrt[3]{10-y^3} + \sqrt{1-y} - 2 \Rightarrow f'(y) = \frac{-3y^2}{3\sqrt[3]{(10-y^3)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1-y}}$

Từ đây ta suy ra $f(y)$ nghịch biến trên tập xác định, từ đó dễ dàng chỉ ra phương trình vô nghiệm!

Thử lại ta thấy 3 bộ nghiệm ban đầu thỏa mãn hệ.

Câu 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x^2 + y^2 + x + y = 80 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 5 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1+2} + \sqrt{x+1+4} = \sqrt{y-5} + \sqrt{y-5+2} + \sqrt{y-5+4} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt{t+2} + \sqrt{t+4}, \forall t \geq 0$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t+2}} + \frac{1}{\sqrt{t+4}} \right) > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(y-5) \Leftrightarrow y = x+6$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có được phương trình

$$x^2 + 7x - 19 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7+5\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-7-5\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta có $x = \frac{-7+5\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{7+5\sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = \left(\frac{-7+5\sqrt{5}}{2}; \frac{7+5\sqrt{5}}{2} \right)$.

Câu 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2(x-2y) = 3 + 2(\sqrt{y+3} - \sqrt{x+2}) \\ \sqrt{x+1} + 6\sqrt{y-1} = 11 - 7x + 6y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 1 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất đã cho được biến đổi lại thành phương trình

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - y^2 - 4y &= 3 + 2\sqrt{y+3} - 2\sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{x+2} &= y^2 + 4y + 4 + 2\sqrt{y+3} \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + 2\sqrt{(x+1)+1} &= (y+2)^2 + 2\sqrt{(y+2)+1} \quad (1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2\sqrt{t+1}, t \geq 0$. Ta có $f'(t) = 2t + \frac{1}{\sqrt{t+1}} > 0, \forall t \geq 0$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$. Do đó từ

$$(1) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y+2) \Leftrightarrow y = x-1.$$

Mặt khác $y \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + 6\sqrt{x-2} &= 11 - x \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 2 + 6(\sqrt{x-2} - 1) + x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{6(x-3)}{\sqrt{x-2}+1} + x-3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{6}{\sqrt{x-2}+1} + 1 \right)}_P = 0 \Leftrightarrow x=3$$

Vì $x \geq 2 \Rightarrow P > 0$. Với $x=3 \Rightarrow y=2$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (3; 2)$.

Câu 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)(\sqrt{4y^2+1}+1)=8x^2y^3(1) \\ x^2y-x+2=0(2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Nếu $y \leq 0$ ta có
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)(\sqrt{4y^2+1}+1) > 0 \\ 8x^2y^3 \leq 0 \end{cases}$$
 nên hệ vô nghiệm.

Nếu $y > 0$ thì từ (2) ta có $y = \frac{x-2}{x^2} \Rightarrow x > 2$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có (1)} &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)(\sqrt{4y^2+1}+1) = 2x^2(\sqrt{4y^2+1}+1)(\sqrt{4y^2+1}-1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-3x^2y+2 = 2x^2y\sqrt{4y^2+1}-2x^2y \quad (*). \end{aligned}$$

Lại có từ (2) rút $2 = x - x^2y$, thế vào (*) ta có phương trình

$$\sqrt{x^2+1}+x = 2x^2y\sqrt{4y^2+1}+2x^2y \Leftrightarrow \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x} = 2y\sqrt{(2y)^2+1}+2y \quad (4).$$

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{t^2+1}+t, \forall t > 0$.

Ta có $f'(t) = \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó từ (4) $\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f(2y) \Rightarrow \frac{1}{x} = 2y \Leftrightarrow 2xy = 1$.

Kết hợp với (2) ta có hệ

$$\begin{cases} 2xy=1 \\ x^2y-x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x-x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=\frac{1}{2} \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=\frac{1}{8} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left(4; \frac{1}{8}\right)$.

Câu 8. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^7+2x^5+6x-9+\sqrt{5x+4}=3y \\ y^7+2y^5+6y-9+\sqrt{5y+4}=3x \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} x \geq -\frac{5}{4} \\ y \geq -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

Lấy hai phương trình trong hệ trừ về theo về ta có được phương trình

$$x^7+2x^5+6x+\sqrt{5x+4}-y^7-2y^5-6y-\sqrt{5y+4}=3y-3x$$

$$\Leftrightarrow x^7 + 2x^5 + 9x + \sqrt{5x+4} = y^7 + 2y^5 + 9y + \sqrt{5y+4} \quad (1).$$

Ta xét hàm số $f(t) = t^7 + 2t^5 + 9t + \sqrt{5t+4}, \forall t \geq -\frac{4}{5}$.

Ta có $f'(t) = 7t^6 + 10t^4 + \frac{5}{2\sqrt{5t+4}} + 9 > 0, t > -\frac{4}{5}$.

Do đó hàm số $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thế vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình

$$x^7 + 2x^5 + 3x + \sqrt{5x+4} - 9 = 0 \quad (2).$$

Xét hàm số $f(x) = x^7 + 2x^5 + 3x + \sqrt{5x+4} - 9, \forall x \geq -\frac{4}{5}$.

Ta có $f'(x) = 7x^6 + 10x^4 + \frac{5}{2\sqrt{5x+4}} + 3 > 0, \forall x > -\frac{4}{5}$.

Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\left[-\frac{4}{5}; +\infty\right)$ nên phương trình $f(x) = 0$ nếu có nghiệm thì

nghiệm đó là duy nhất. Mà $f(1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của $f(x) = 0$. Suy ra $y = 1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (1; 1)$.

Câu 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5(x^2 + 2) + y^2 + x(2\sqrt{4x^2 + 2} - 1) = (y + 3)(\sqrt{y^2 + 6y + 11} + 7) \\ x^2 + 2y^2 - x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Hệ phương trình đã cho được biến đổi lại thành hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x^2 + y^2 - x - 7y - 11 + 2x\sqrt{4x^2 + 2} - (y + 3)\sqrt{y^2 + 6y + 11} = 0 \quad (1) \\ x^2 + 2y^2 - x - y - 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) về theo vế ta sẽ có được phương trình

$$\begin{aligned} & 4x^2 - y^2 - 6y - 9 + 2x\sqrt{4x^2 + 2} - (y + 3)\sqrt{y^2 + 6y + 11} \\ & \Leftrightarrow 4x^2 + 2x\sqrt{4x^2 + 2} = (y + 3)^2 + (y + 3)\sqrt{y^2 + 6y + 11} \\ & \Leftrightarrow 2x\left(2x + \sqrt{(2x)^2 + 2}\right) = (y + 3)\left(y + 3 + \sqrt{(y + 3)^2 + 2}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t(t + \sqrt{t^2 + 2}), \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \left(t + \sqrt{t^2 + 2}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 2}}\right) = \frac{(\sqrt{t^2 + 2} + t)^2}{\sqrt{t^2 + 2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (3) ta có $f(2x) = f(y + 3) \Leftrightarrow y = 2x - 3$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta sẽ có phương trình

$$9x^2 - 27x + 19 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{5}}{6} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ x = \frac{9 - \sqrt{5}}{6} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm . $(x, y) = \left\{ \left(\frac{9 + \sqrt{5}}{6}; \frac{\sqrt{5}}{3} \right); \left(\frac{9 - \sqrt{5}}{6}; -\frac{\sqrt{5}}{3} \right) \right\}$.

Câu 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 17x - 32y = 6x^2 - 9y^2 - 17 \\ (y+2)\sqrt{x+4} + (x+9)\sqrt{2y-x+9} = x^2 + 9y + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Thi thử chuyên Vĩnh Phúc khối A,B năm 2015

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -4 \\ 2y - x + 9 \geq 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình

$$\begin{aligned} x^3 - 6x + 12x + 17x - 17 &= y^3 - 9y^2 + 32y \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 + 5(x-2) &= (y-3)^3 + 5(y-3) \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 5t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ

$$(1) \Leftrightarrow f(x-2) = f(y-3) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có được phương trình

$$\begin{aligned} (x+3)\sqrt{x+4} + (x+9)\sqrt{x+11} &= x^2 + 9x + 10 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 36x + 40 - 4(x+3)\sqrt{x+4} - 4(x+9)\sqrt{x+11} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x^2 + 3x - 40) + (x+3)(x+7 - 4\sqrt{x+4}) + (x+9)\sqrt{x+11}(\sqrt{x+11} - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x-5)(x+8) + (x+3)\left(\frac{(x+3)(x-5)}{x+7+4\sqrt{x+3}}\right) + \frac{(x+9)(x-5)\sqrt{x+11}}{\sqrt{x+11}+4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5)\left(\underbrace{2(x+8) + \frac{(x+3)^2}{x+7+4\sqrt{x+3}} + \frac{(x+9)\sqrt{x+11}}{\sqrt{x+11}+4}}_T\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow y=6 \text{ vì } T > 0, \forall x \geq -4. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (5; 6)$.

Câu 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + 3 = y(y-2) - (y+5)x \\ x-4 = 2(\sqrt{x-3} - \sqrt{y-10}) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 10 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được viết lại thành phương trình

$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 + xy + 5x + 2y + 3 &= 0 \Leftrightarrow 2x^2 - xy + 3x + 2xy - y^2 + 3y + 2x - y + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow x(2x - y + 3) + y(2x - y + 3) + 2x - y + 3 &= 0 \Leftrightarrow (x+y+1)(2x-y+3) = 0 \\ \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 3 \text{ vì } \begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 4 \end{cases} \Rightarrow x+y+1 > 0. \end{aligned}$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình

$$\begin{aligned}x-4 &= 2\sqrt{x-3}-2\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow (2x-7)-(x-3)=2\sqrt{x-3}-2\sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow 2x-7+2\sqrt{2x-7} &= x-3+2\sqrt{x-3} \quad (1).\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+2t, \forall t \geq 0$. Ta có $f'(t)=2t+2 > 0, \forall t \geq 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $[0;+\infty)$.

Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{2x-7})=f(\sqrt{x-3}) \Leftrightarrow \sqrt{2x-7}=\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=17$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x,y)=(4;17)$.

Câu 12. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3-10y^2+14y+52=(x+1)(3\sqrt{x+1}-6x+26) \\ 3x^2-8y^2=10x-7 \end{cases} \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình sau.

$$\begin{cases} y^3-10y^2+14y+6x^2-20x+26=3(x+1)\sqrt{3x+1} \quad (1) \\ 6x^2-20x=16y^2-14 \quad (2) \end{cases}$$

Thế $6x^2-20x=16y^2-14$ vào (1) ta có phương trình

$$\begin{aligned}y^3+6y^2+14y+12 &= 3(x+1)\sqrt{3x+1} \\ \Leftrightarrow y^3+6y^2+12y+8+2y+4 &= (3x+1+2)\sqrt{3x+1} \\ \Leftrightarrow (y+2)^3+2(y+2) &= (\sqrt{3x+1})^3+\sqrt{3x+1} \quad (3)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (3) $\Leftrightarrow f(y+2)=f(\sqrt{3x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=y+2$.

Kết hợp với (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{3x+1}=y+2 \\ 3x^2-10x=8y^2-7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ 3x=y^2+4y+3 \\ 3x^2-10x=8y^2-7 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x=\frac{y^2+4y+3}{3} \\ 3\left(\frac{y^2+4y+3}{3}\right)^2-10\left(\frac{y^2+4y+3}{3}\right)=8y^2-7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x=\frac{y^2+4y+3}{3} \\ y(y^3+8y^2-12y-16)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x=\frac{y^2+4y+3}{3} \\ y(y-2)(y^2+10y+8)=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x=\frac{y^2+4y+3}{3} \\ y=0 \vee y=2 \vee y=-5 \pm \sqrt{7} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x = \frac{y^2 + 4y + 3}{3} \\ y = 0 \vee y = 2 \vee y = -5 + \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x = 5 \\ y = 2 \\ x = 5 - 2\sqrt{7} \\ y = -5 + \sqrt{7} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \{(1; 0); (5; 2); (5 - 2\sqrt{7}; -5 + \sqrt{7})\}$.

Câu 13. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (5 - 2x)\sqrt{x + 2y} = (6 - x - 2y)\sqrt{x - 1} \\ (x^3 - 2y - 3)\left(x + \sqrt{8x(3 - x) + 4y^2 + 5}\right) = 21 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = y - x \end{cases}, a \geq 0, b > 0$. Từ cách đặt ta có $\begin{cases} x = \frac{a + b}{2} \\ y = \frac{a - b}{2} \end{cases}$.

Lúc đó hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình sau.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{24}{2b^3 + 11} \\ (a - b)\left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} + 3\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{13 - 2b^3}{2b^3 + 11} \\ (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{13 - 2(1 - a^3)}{2b^3 + 11} \\ b^3 = 1 - a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{2a^3 + 11} = \frac{\sqrt{b}}{2b^3 + 11} (*) \\ b^3 = 1 - a^3 \end{cases}.$$

Do $\begin{cases} a \geq 0, b > 0 \\ a^3 + b^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0, b > 0 \\ a^3 < 1, b^3 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0, b > 0 \\ a < 1, b \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq a < 1 \\ 0 < b \leq 1 \end{cases}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t^3 + 11}, \forall t \in [0; 1]$. Ta có $f'(t) = \frac{11(1 - t^3)}{2t^3 + 11} \leq 0, \forall t \in [0; 1]$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên $[0; 1]$.

Do đó ta có $(*) \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.

Từ đó ta sẽ có hệ phương trình

$$\begin{cases} a = b \\ a^3 + b^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y - x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Câu 14. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Xét phương trình thứ hai trong hệ ta có $x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 (*)$.

Nếu ta xem (*) là phương trình bậc hai theo x thì phương trình có nghiệm khi và chỉ khi .

$$\Delta = (y-7)^2 - 4(y^2 - 6y + 14) = -3y^2 + 10y - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}.$$

Nếu ta xem (*) là phương trình bậc hai theo biến y ta có phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta = (x-6)^2 - 4(x^2 - 7x + 14) = -3x^2 + 16x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{10}{3}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left[2; \frac{10}{3}\right], y \in \left[1; \frac{7}{3}\right].$$

Từ phương trình thứ nhất trong hệ dẫn đến xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 3t + 4, \forall t \geq 1$.

Ta có $f'(t) = 4t - 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

$$\text{Từ đó dẫn đến } f(x) \geq f(2) = 6, \forall x \in \left[2; \frac{10}{3}\right], f(y) \geq f(1) = 3, \forall y \in \left[1; \frac{7}{3}\right].$$

$$\text{Do đó } f(x) \cdot f(y) \geq 18. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Thế lại vào phương trình thứ hai ta thấy không thỏa mãn. Do đó hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 3x = 4(y^3 - 2y^2 + 3y) \\ 3x^2 + y^2 = 2(y\sqrt{x(3x+y)} + x\sqrt{3y(y-x)}) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Nhận xét hệ luôn có nghiệm $(x, y) = (0; 0)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + 3t, \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 3t^2 - 4t + 3 = 3\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó ta có các nhận xét sau.

Với $x > 0$. Ta có $f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow 4f(y) > 0 \Leftrightarrow f(y) > 0 \Leftrightarrow y > 0$.

Với $x < 0$. Ta có $f(x) < f(0) = 0 \Leftrightarrow 4f(y) < 0 \Leftrightarrow f(y) < 0 \Leftrightarrow y < 0$.

Mặt khác nếu $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 > 0 \\ y\sqrt{x(x+3y)} + x\sqrt{3y(y-x)} < 0 \end{cases}$. Do đó hệ vô nghiệm.

Vậy $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. Đặt $y = tx, t > 0$. Phương trình thứ hai trong hệ trở thành.

$$\begin{aligned} 3x^2 + t^2x^2 &= 2(tx\sqrt{x(x+3tx)} + x\sqrt{3tx(tx-x)}) \\ \Leftrightarrow t^2 + 3 &= 2\left(t\sqrt{t+3} + \sqrt{3t^2-3t}\right) \Leftrightarrow t\sqrt{t+3} + \sqrt{3t^2-3t} = \frac{t^2+3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ta xét hệ sau } \begin{cases} t\sqrt{t+3} + \sqrt{3t^2-3t} = \frac{t^2+3}{2} \quad (1) \\ t\sqrt{t+3} - \sqrt{3t^2-3t} = \frac{t(t^2+3)}{t\sqrt{t+3} + \sqrt{3t^2-3t}} = \frac{t(t^2+3)}{\frac{t^2+3}{2}} = 2t \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) + (2) về theo về ta có được phương trình

$$4t\sqrt{t+3} = t^2 + 4t + 3 \Leftrightarrow 16t^2(t+3) = (t^2 + 4t + 3)^2$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 8t^3 - 26t^2 + 24t + 9 = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t - 3)(t^2 - 10t - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \\ t = 5 - 2\sqrt{7} \\ t = 5 + 2\sqrt{7} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện $t > 0$ ta có $\begin{cases} t = 1 \\ t = 5 + 2\sqrt{7} \end{cases}$.

Với $t = 1 \Leftrightarrow y = x$. Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có.

$$x^3 - 2x^2 + 3x = 4(x^3 - 2x^2 + 3x) \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 3) = 0.$$

Phương trình cuối cùng vô nghiệm với $x > 0$.

Với $t = 5 + 2\sqrt{7} \Leftrightarrow y = (5 + 2\sqrt{7})x$. Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có.

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 3x &= 4(5 + 2\sqrt{7})((53 + 20\sqrt{7})x^3 - 2(5 + 2\sqrt{7})x + 3x) \\ &\Leftrightarrow x \left[(4(5 + 2\sqrt{7})(53 + 20\sqrt{7}) - 1)x^2 - 2(4(5 + 2\sqrt{7})^2 + 1)x + 12(5 + 2\sqrt{7}) - 3 \right] = 0 \end{aligned}$$

Phương trình cuối cùng vô nghiệm với $x > 0$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = (0; 0)$.

Câu 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3x - x^4 = 63 \\ xy^2 + 2x^2y + x^3 = 27\sqrt{3} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Hệ phương trình đã cho được viết lại dưới dạng $\begin{cases} x(y^3 - x^3) = 63 & (1) \\ x(x + y)^2 = 27\sqrt{3} & (2) \end{cases}$.

Từ (2) $\Rightarrow x > 0$. Mặt khác từ (1) $\Leftrightarrow y^3 = \frac{63}{x} + x^3 \Rightarrow y > 0$.

Từ (2) $\Leftrightarrow y = \frac{3\sqrt[4]{27}}{\sqrt{x}} - x$.

Thế vào (1) ta được phương trình $x \left(\left(\frac{3\sqrt[4]{27}}{\sqrt{x}} - x \right)^3 - x^3 \right) = 63$ (3).

Đặt $t = \sqrt{x}, t > 0$. Khi đó (3) trở thành phương trình $t^9 - (3\sqrt[4]{27} - t^3)^3 + 63t = 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^9 - (3\sqrt[4]{3} - t^3)^3 + 63t, \forall t > 0$.

Ta có $f'(t) = 9t^8 + 9t^2(3\sqrt[4]{3} - t^3)^2 + 63 > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mặt khác $f(\sqrt[4]{2}) = 0$.

Do đó phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t = \sqrt[4]{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt[4]{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = (\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

Câu 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x^2 - 7x + 14) = 5y^2 - 23y + 32 \\ x^2 + 8y^2 = y^3 + 28y - 23 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Cộng vế theo vế hai phương trình trong hệ ta có được phương trình

$$\begin{aligned} & x^3 - 6x^2 + 14x - y^3 - 3y^2 - 5y - 9 \\ & \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 2x - 4 = y^3 - 3y^2 + 3y + 2y - 2 \\ & \Leftrightarrow (x-2)^3 + 2(x-2) = (y-1)^3 + 2(y-1) \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó từ

$$(1) \Leftrightarrow f(x-2) = f(y-1) \Leftrightarrow x-2 = y-1 \Leftrightarrow x = y+1.$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình

$$\begin{aligned} & (y+1)^2 + 8y^2 = y^3 + 28y - 23 \Leftrightarrow y^3 - 9y^2 + 26y - 24 = 0 \\ & \Leftrightarrow (y-2)(y-3)(y-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-2=0 \\ y-3=0 \\ y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \Rightarrow x=3 \\ y=3 \Rightarrow x=4 \\ y=4 \Rightarrow x=5 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = \{(3; 2); (4; 3); (5; 4)\}$.

Câu 18. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^3 + xy + \frac{3}{2} = y^3 \quad (1) \\ (xy + 2)^2 + \frac{1}{x^2} = 2y + \frac{4}{x} \quad (2) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (2): $(xy + 2)^2 + \frac{1}{x^2} = 2y + \frac{4}{x}$

$$\Leftrightarrow x^2 y^2 + 4xy + 4 + \frac{1}{x^2} - 2y = \frac{4}{x} \Leftrightarrow \left(xy - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(xy - \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

Vậy $xy - \frac{1}{x} = -2$ thế vào phương trình (1) $\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{x} - 2\right)^3 \cdot \frac{1}{x^3}$

Đặt $a = \frac{1}{x} \Rightarrow (a^2 - 1)^3 + a - \frac{1}{2} = (a - 2)^3 \cdot a^3 \Rightarrow 6a^5 - 15a^4 + 8a^3 + 3a^2 + a - \frac{3}{2} = 0$

Đặt $f(a) = 6a^5 - 15a^4 + 8a^3 + 3a^2 + a - \frac{3}{2} \Rightarrow f'(a) = 30a^4 - 60a^3 + 24a^2 + 6a + 1$

Ta có $f'(a) = 30(a - a^2)^2 + 6(a - a^2) + 1 > 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất trên $\mathbb{R} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}$

Câu 19. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[4]{3(2x^2 + 3y^2) + 49(x - y) + 134} = \frac{8}{\sqrt[3]{x - y + 6}} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \\ x(x + 2y) + y(2y + 1) - x - 2 = 0 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 3(2x^2 + 3y^2) + 49(x - y) + 134 \geq 0 \\ x - y + 6 \neq 0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có $x^2 + 2xy + 2y^2 - x + y - 2 = 0$, ta có

- $2x^2 + 3y^2 = x^2 + y^2 - 2xy + x - y + 2$.
- $(x + y)^2 + y^2 = x - y + 2 \Rightarrow x - y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x - y \geq -2$.

| Phương pháp hàm số

Thế $2x^2 + 3y^2 = x^2 + y^2 - 2xy + x - y + 2$ vào phương trình thứ nhất trong hệ và biến đổi ta thu được phương trình

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{3(x-y)^2 + 52(x-y) + 140} &= \frac{8}{\sqrt[3]{x-y+6}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{3(x-y)^2 + 52(x-y) + 140} \cdot \sqrt[3]{x-y+6} &= 8 \quad (1)\end{aligned}$$

Đặt $t = x - y, t \geq -2$.

Khi đó ta có (1) trở thành $\sqrt[4]{3t^2 + 52t + 140} \cdot \sqrt[3]{t+6} - 8 = 0$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[4]{3t^2 + 52t + 140} \cdot \sqrt[3]{t+6} - 8, \forall t \geq -2$.

Ta có
$$f'(t) = \frac{(6t+52) \cdot \sqrt[3]{t+6}}{\sqrt[4]{(3t^2+52t+140)^3}} + \frac{\sqrt[4]{3t^2+52t+140}}{3\sqrt[3]{t+6}} > 0, \forall t \geq -2.$$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[-2; +\infty)$.

Do đó $f(t) = 0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mà $f(2) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t) = 0$.

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ ta có hệ.

$$\begin{aligned}\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+2xy+2y^2-x+y-2=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ 5x^2-12x+4=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x=2 \vee x=\frac{2}{5} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{8}{5} \end{cases}.\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left\{ (2; 0); \left(\frac{2}{5}; -\frac{8}{5} \right) \right\}$.

Câu 20. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)(25-4xy) = \frac{105}{4} + 4x^2 + 17y^2 \quad (1) \\ 4x^2 + 4y^2 + 4x - 4y = 7 \quad (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Từ (2) ta có $(2x+1)^2 + (2y-1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq 2x+1 \leq 3 \\ -3 \leq 2y-1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 2 \end{cases}.$

Mặt khác từ (2) ta cũng có $4x - 4y = 7 - 4x^2 - 4y^2$ (*).

Phương trình (1) được biến đổi trở thành phương trình

$$\begin{aligned}(x+y)(25-4xy) &= \frac{105}{4} + 4x^2 - 4y^2 + 21y^2 \\ \Leftrightarrow (x+y)(25-4xy-(4x-4y)) &= \frac{105}{4} + 21y^2 \quad (3)\end{aligned}$$

Thế (*) vào (3) ta có $(x+y)(18+4(x^2-xy+y^2)) = \frac{105}{4} + 21y^2$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 18(x+y) + 4(x^3+y^3) - 21y^2 &= \frac{105}{4} \\ \Leftrightarrow 4x^3 + 18x + 4x^3 - 21y^2 + 18y &= \frac{105}{4} \quad (4)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 4x^3 + 18x, \forall x \in [-2; 1]$.

Ta có $f'(x) = 12x^2 + 18 > 0, \forall x \in [-2; 1]$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[-2; 1]$. Do đó $-68 = f(-2) \leq f(x) \leq f(1) = 22$.

Xét hàm số $f(y) = 4y^3 - 21y^2 + 18y, \forall y \in [-1; 2]$.

Ta có $f'(y) = 12y^2 - 42y + 18$.

Lại có $f'(y) = 0 \Leftrightarrow 12y^2 - 42y + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 3(l) \end{cases}$.

Mà $f(-1) = -43, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}, f(2) = -16$.

Từ đây ta có $-43 \leq f(y) \leq \frac{17}{4}$. Vậy $\begin{cases} -63 \leq f(x) \leq 22 \\ -43 \leq f(y) \leq \frac{17}{4} \end{cases} \Rightarrow f(x) + f(y) \leq \frac{105}{4}$.

Vậy từ (4) $\Leftrightarrow f(x) + f(y) = \frac{105}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$. Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 4y^3 + (x^4 - 1)y + 4y^2 = 1(1) \\ 8y^3 + 4\sqrt{x^2 + 1} = x^2 + 6y + 2(2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Từ (1) ta có $(y+1)x^4 + 4y^2(y+1) - (y+1) = 0 \Leftrightarrow (y+1)(x^4 + 4y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x^4 + 4y^2 = 1 \end{cases}$.

Với $y = -1$ thay vào (2) ta có $4\sqrt{x^2 + 1} = x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \end{cases}$.

Với $x^4 + 4y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 1 \\ -1 \leq 2y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Từ (2) ta có $4\sqrt{x^2 + 1} - x^2 + 8y^3 - 6y - 2 = 0 (*)$.

Xét hàm số $f(x) = 4\sqrt{x^2 + 1} - x^2, \forall x \in [-1; 1]$.

Ta có $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 2x = \frac{2x(2 - \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Lại có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 4$ vì $2 - \sqrt{x^2 + 1} > 0, \forall x \in [-1; 1]$.

Mặt khác ta có $f(-1) = f(1) = 4\sqrt{2} - 1$. Do đó ta có $4 \leq f(x) \leq 4\sqrt{2} - 1$.

Xét hàm số $f(y) = 8y^3 - 6y - 2, \forall y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

| Phương pháp hàm số

Ta có $f'(y) = 24y^2 - 6 = 6(4y^2 - 1) \leq 0, \forall y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Vậy hàm số $f(y)$ luôn nghịch biến trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Mặt khác ta có $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0; f\left(\frac{1}{2}\right) = -4$. Do đó $-4 \leq f(y) \leq 0$.

Vậy $\begin{cases} 4 \leq f(x) \leq 4\sqrt{2} - 1 \\ -4 \leq f(y) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) + f(y) \geq 0$.

Do đó từ (*) $\Leftrightarrow f(x) + f(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Thử lại thấy thỏa mãn hệ nên hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$(x, y) = \left\{ (0; -1); (2\sqrt{2}; -1); (-2\sqrt{2}; -1); \left(0; \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Câu 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x - 10y^2 - 11)\sqrt{x - 1} + (x + 1)(y^2 - 10) = -y^4 - 21 \\ 2(3y^2 + 7x) - 9\sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 2} - 74 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 2 \end{cases}$.

Biến đổi (1) ta có phương trình

$$-11(x - 1) + (x - 10y^2 - 11)\sqrt{x - 1} + (y^4 + xy^2 + x + y^2) = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{x - 1}, t \geq 0$. Lúc đó (*) trở thành

$$-11t^2 + (x - 10y^2 - 11)t + (y^4 + xy^2 + x + y^2) = 0 \quad (3).$$

Ta có $\Delta = (x - 10y^2 - 11)^2 - 4(y^4 + xy^2 + x + y^2) = (x + 12y^2 + 11)^2$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow (-11t + y^2 + x^2)(t + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow y^2 + x = 11\sqrt{x - 1}$ vì $t + y^2 + 1 > 0$.

Thế vào (2) ta có phương trình

$$y^2 + x - 9\sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 2} + 13x + 5y^2 - 74 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x - 1} + 13x + \sqrt{y - 2} + 5y^2 = 74 \quad (5)$$

Xét hàm số $f(x) = 2\sqrt{x - 1} + 13x, \forall x \geq 1$. Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}} + 13 > 0, \forall x > 1$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Từ đó $\forall x \in [1; 2] \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow 13 \leq f(x) \leq 28$.

Xét hàm số $f(y) = \sqrt{y - 2} + 5y^2, \forall y \geq 2$.

Ta có $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y - 2}} + 10y > 0, \forall y > 2$.

Vậy hàm số $f(y)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Từ đó $\forall y \in [2; 3] \Rightarrow f(2) \leq f(y) \leq f(3) \Leftrightarrow 20 \leq f(y) \leq 46$.

Do đó từ (5) ta có $f(x) + f(y) = 74 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$. Thử lại ta thấy hệ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = (2; 3)$

Câu 23. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \\ (2x + y + 6)\sqrt{3x + 2y + 2} + 1 = \sqrt[3]{3x + 7} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ 3x + 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$.

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, |t| \geq 2$. Khi đó ta có $\begin{cases} \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} = (t^2 - 2)^2 - 2 \\ \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 - 2 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình

$$t^4 - 4t^2 + 2 - (t^2 - 2) + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t^4 - 5t^2 + t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t^3 - 2t^2 - t + 3 = 0 \end{cases} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 - t + 3, \forall |t| \geq 2$. Ta có $f'(t) = 3t^2 - 4t - 1$.

Lại có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2 + \sqrt{7}}{2} (l) \\ t = \frac{2 - \sqrt{7}}{2} (l) \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên ta suy ra $f(t) \leq -11$ khi $t \leq -2$, $f(t) \geq 1$ khi $t \geq 2$.

Do đó $f(t) = 0$ vô nghiệm với mọi $|t| \geq 2$.

Vậy từ (*) ta có $t = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -x$. Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta

được phương trình $(x + 6)\sqrt{x + 2} + 1 = \sqrt[3]{3x + 7}$ (2) điều kiện là $x \geq -2$.

• **Cách 1.** Ẩn phụ hóa kết hợp hàm đặc trưng.

Đặt $a = \sqrt{x + 2} (a \geq 0)$. Ta có $x = a^2 - 2$.

Khi đó (2) trở thành $a^3 + 4a + 1 = \sqrt[3]{3a^2 + 1}$ (3)

Lại đặt $b = \sqrt[3]{3a^2 + 1} \Leftrightarrow b^3 = 3a^2 + 1$. Kết hợp ta có $\begin{cases} a^3 + 4a + 1 = b \\ 3a^2 + 1 = b^3 \end{cases}$.

Cộng vế theo vế hai phương trình ta được $(a + 1)^3 + (a + 1) = b^3 + b$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $f(a + 1) = f(b) \Leftrightarrow a + 1 = b \Leftrightarrow a + 1 = \sqrt[3]{3a^2 + 1}$

$$\Leftrightarrow a^3 + 3a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ (do } a \geq 0 \text{)}.$$

Với $a = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x + 2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2$.

• **Cách 2.** Ẩn phụ hóa kết hợp với liên hợp.

Đặt $\sqrt{x + 2} = a (a \geq 0) \Rightarrow x = a^2 - 2$.

Phương trình (2) trở thành

$$a^3 + 4a + 1 = \sqrt[3]{3a^2 + 1} \Leftrightarrow (a^3 + 3a) + (a - 1 - \sqrt[3]{3a^2 + 1}) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow a(a^2+3) + \frac{a(a^2+3a)}{a+1+(a+1)\sqrt[3]{3a^2+1}+\sqrt[3]{(3a^2+1)^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow a \left(1 + \frac{1}{(a+1)^2 + (a+1)\sqrt[3]{3a^2+1} + \sqrt[3]{(3a^2+1)^2}} \right) = 0 \text{ vì } a^2+3 > 0. \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ vì } 1 + \frac{1}{(a+1)^2 + (a+1)\sqrt[3]{3a^2+1} + \sqrt[3]{(3a^2+1)^2}} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2. \end{aligned}$$

Vậy qua hai cách và đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (-2; 2)$.

Câu 24. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)^2(x^2+y^2-2) = (x^2+y^2)(xy+2) \\ 2(x^3+3y^2-13)(y+7) = y(3-y)-x^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi được phương trình

$$\begin{aligned} &(x+y)^2(x^2+y^2) - 2(x+y)^2 - xy(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+y)^2(x^2+y^2) - 2(x+y)^2 - xy(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 + 2xy(x^2+y^2) - 4(x^2+y^2) - 4xy - xy(x^2+y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x^2+y^2-4) + xy(x^2+y^2-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2+y^2-4) \left(\left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $(x, y) = (0; 0)$ thì hệ không thỏa mãn.

Với $x^2+y^2=4 \Leftrightarrow y^2=4-x^2$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình

$$2(x^3-3x^2+1)(y+7) = 3y-4 \quad (1).$$

Do $x^2+y^2=4 \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$ nên từ (1) ta có $x^3-3x^2-1 = \frac{3y-4}{2y+14} \quad (2)$.

Xét hàm số $f(x) = x^3-3x^2-1, \forall x \in [-2; 2]$. Ta có $f'(x) = 3x^2-6x$.

Lại có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2-6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-1 \\ x=2 \Rightarrow y=-5 \end{cases}$.

Mặt khác $f(-2) = -21$. Vẽ bảng biến thiên ta có được $\forall x \in [-2; 2] \Rightarrow -21 \leq f(x) \leq -1$.

Xét hàm số $f(y) = \frac{3y-4}{2y+14}, \forall y \in [-2; 2]$.

Ta có $f'(y) = \frac{50}{(2y+14)^2} > 0, \forall y \in [-2; 2]$.

Do đó hàm số $f(y)$ đồng biến trên $[-2; 2]$ nên $-1 = f(-2) \leq f(y) \leq f(2) = \frac{1}{9}$.

Vậy ta sẽ có $\begin{cases} -21 \leq f(x) \leq -1 \\ -1 \leq f(y) \leq \frac{1}{9} \end{cases}$ nên từ (2) ta có $f(x) = f(y) = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

Thử lại ta thấy thỏa mãn nên nghiệm của hệ phương trình là $(x, y) = (2; -2)$.

Câu 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 + 3\sqrt{x^2 - x - 4} \\ 3y^2(y - 3) + 11(y - 4) = 2\sqrt[3]{13 - x^3} - 3x^3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - x - 4 \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình

$$\begin{aligned} 3y^3 - 9y^2 + 11y - 44 &= 2\sqrt[3]{13 - x^3} - 3x^3 \\ \Leftrightarrow 3(y - 1)^3 + 2(y - 1) &= 3(13 - x^3) + 2\sqrt[3]{13 - x^3} \quad (1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 2t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 6t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(y - 1) = f(\sqrt[3]{13 - x^3}) \Leftrightarrow y - 1 = \sqrt[3]{13 - x^3}$.

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình

$$x + 1 + \sqrt[3]{13 - x^3} = 2 + 3\sqrt{x^2 - x - 4} \Leftrightarrow \sqrt[3]{13 - x^3} = 1 - x + 2\sqrt{x^2 - x - 4} \quad (2).$$

Đặt $\begin{cases} u = 1 - x \\ v = \sqrt{x^2 - x - 4} \end{cases} \Rightarrow u^3 - 3v^2 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 3x^2 + 3x - 12 = 13 - x^3, (v \geq 0)$

Lúc đó phương trình (2) trở thành phương trình

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{u^3 - 3v^2} &= u + 2v \Leftrightarrow u^3 - 3v^2 = u^3 + 6u^2v + 12uv^2 + 8v^3 \\ \Leftrightarrow 3v^2 + 6u^2v + 12uv^2 + 8v^3 &= 0 \Leftrightarrow v(6(u + v)^2 + 2v^2 + 3v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 4} = 0 \\ 1 - x = 0 \\ \sqrt{x^2 - x - 4} = 0 \end{cases} &(*) \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = 1 + \sqrt[3]{\frac{13 - 5\sqrt{17}}{2}} \\ x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = 1 + \sqrt[3]{\frac{13 + 5\sqrt{17}}{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Vì (*) vô nghiệm.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là.

$$(x, y) = \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; 1 + \sqrt[3]{\frac{13 - 5\sqrt{17}}{2}} \right); \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}; 1 + \sqrt[3]{\frac{13 + 5\sqrt{17}}{2}} \right) \right\}.$$

Câu 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (5 - 2x)\sqrt{x + 2y} = (6 - x - 2y)\sqrt{x - 1} \\ (x^3 - 2y - 3)\left(x + \sqrt{8x(3 - x) + 4y^2 + 5}\right) = 21 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x + 2y \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$.

| Phương pháp hàm số

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình

$$(3-2(x-1))\sqrt{x+2y} = (6-(x+2y))\sqrt{x-1} \quad (1).$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-1} \\ b = \sqrt{x+2y} \end{cases}$, $a, b \geq 0$. Khi đó (1) trở thành.

$$(3-2a^2)b = (6-b^2)a \Leftrightarrow (6-4a^2)b = (6-b^2)2a \quad (2).$$

Với $a=0 \vee b=0$ thì hệ không thỏa mãn. Do đó ta có $a, b > 0$. Khi đó (2) trở thành.

$$\frac{6-(2a)^2}{2a} = \frac{6-b^2}{b} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{6-t^2}{t}$, $\forall t > 0$. Ta có $f'(t) = -\frac{6+t^2}{t^2} < 0, \forall t > 0$. Do đó hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Nên $(*) \Leftrightarrow f(2a) = f(b) \Leftrightarrow 2a = b \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x+2y} \Leftrightarrow 3x-4 = 2y$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình sau.

$$\begin{aligned} & (x^3 - 3x + 4 - 3)\left(x + \sqrt{24x - 8x^2 + (3x-4)^2 + 5}\right) = 21 \\ & \Leftrightarrow (x^3 - 3x + 1)\left(x + \sqrt{x^2 + 21}\right) = 21 \\ & \Leftrightarrow (x^3 - 3x + 1)\left(x + \sqrt{x^2 + 21}\right) = (\sqrt{x^2 + 21} + x)(\sqrt{x^2 + 21} - x) \\ & \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = \sqrt{x^2 + 21} - x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 + (x + 3 - \sqrt{x^2 + 21}) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) + \frac{6(x-2)}{x+3+\sqrt{x^2+21}} = 0 \Leftrightarrow (x-2)\underbrace{\left((x+1)^2 + \frac{6}{x+3+\sqrt{x^2+21}}\right)}_P = 0 \\ & \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=1 \text{ vì } P > 0, \forall x \geq 1. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (2; 1)$.

Câu 27. Giải hệ phương trình	$\begin{cases} 2x^2 + 3 = (4x^2 - 2yx^2)\sqrt{3-2y} + \frac{4x^2+1}{x} \\ \sqrt{2-\sqrt{3-2y}} = \frac{\sqrt[3]{2x^2+x^3+x+2}}{2x+1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$
-------------------------------------	---

Giải

$$\text{Điều kiện.} \quad \begin{cases} 2-\sqrt{3-2y} \geq 0 \\ 3-2y \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình

$$\begin{aligned} 2 + \frac{3}{x^2} &= (4-2y)\sqrt{3-2y} + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + 2 = (1+3-2y)\sqrt{3-2y} \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + 1 - \frac{1}{x} = (\sqrt{3-2y})^3 + \sqrt{3-2y} \quad (*). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (*) $\Leftrightarrow f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = f\left(\sqrt{3-2y}\right) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = \sqrt{3-2y}$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} &= \frac{\sqrt[3]{2x^2 + x^3 + x + 2}}{2x + 1} \Leftrightarrow (2x + 1)\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x + 2 + x\sqrt[3]{\frac{2}{x} + 1} \\ \Leftrightarrow \left(2 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{x}} &= 1 + \frac{2}{x} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} \Leftrightarrow \left(1 + 1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{2}{x} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)^3 &= 1 + \frac{2}{x} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right) = f\left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}\right) \Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + x^3 = 1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Thử lại ta có $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{4}\right)$.

Câu 28. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3y + 1 = y^2 - \frac{1}{y} + \frac{3x + 4}{\sqrt{x + 1}} \\ \sqrt{9y - 2} + \sqrt[3]{7x + 2y + 2} = 2y + 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x > -1 \\ y \geq \frac{2}{9} \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành hệ phương trình

$$x + 1 - \frac{3x + 4}{\sqrt{x + 1}} = y^2 - 3y - \frac{1}{y} \Leftrightarrow x + 1 - 3\sqrt{x + 1} - \frac{1}{\sqrt{x + 1}} = y^2 - 3y - \frac{1}{y} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 3t - \frac{1}{t}, \forall t > 0$.

Ta có $f'(t) = 2t - 3 + \frac{1}{t^2} = \frac{(2t + 1)(t - 1)^2}{t^2} > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến với mọi $t > 0$.

Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x + 1}) = f(y) \Leftrightarrow y = \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow x = y^2 - 1$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình

$$\begin{aligned} \sqrt{9y - 2} + \sqrt[3]{7y^2 + 2y - 5} &= 2y + 3 \Leftrightarrow y + 2 - \sqrt{9y - 2} + y + 1 - \sqrt[3]{7y^2 + 2y - 5} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(y - 2)(y - 3)}{y + 2 + \sqrt{9y - 2}} + \frac{(y + 1)(y - 2)(y - 3)}{(y + 1)^2 + (y + 1)\sqrt[3]{7y^2 + 2y - 5} + \sqrt[3]{(7y^2 + 2y - 5)^2}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y-3) \underbrace{\left(\frac{1}{y+2+\sqrt{9y-2}} + \frac{y+1}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+7y-5} + \sqrt[3]{(7y^2+7y-5)^2}} \right)}_K = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \Rightarrow x=3 \\ y=3 \Rightarrow x=8 \end{cases} \text{ vì } K > 0, \forall y \geq \frac{2}{9}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \{(3; 2); (8; 3)\}$.

Câu 29. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3 \\ x\sqrt{3x - 2xy + 1} = 4xy + 3x + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện . $3x - 2xy + 1 \geq 0$.

Vì $\sqrt{y^2 + 3} - y > |y| - y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{y^2 + 3} - y > 0$.

Do đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình sau .

$$\sqrt{x^2 + 3} + 3 = \sqrt{y^2 + 3} - y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} + 3 = (-y) + \sqrt{(-y)^2 + 3} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + 3} + t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} + 1 = \frac{\sqrt{t^2 + 3} + t}{\sqrt{t^2 + 3}} \geq \frac{|t| + t}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(-y) \Leftrightarrow y = -x$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có được phương trình

$$x\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = -4x^2 + 3x + 1 \quad (*).$$

Nhận xét với $x = 0$ không thỏa phương trình (*)

- **Trường hợp 1.** $x > 0$ thì phương trình (*) trở thành phương trình

$$\begin{aligned} \sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} &= -4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - 2\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right) \left(\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3 \right) &\Leftrightarrow \sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 3 \text{ vì } \sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 > 0 \\ \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} &= 9 \Leftrightarrow 7x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{37}}{14} \\ x = \frac{3 - \sqrt{37}}{14} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{37}}{14} \Rightarrow y = \frac{-3 - \sqrt{37}}{14}. \end{aligned}$$

- **Trường hợp 2.** $x < 0$ thì phương trình (*) trở thành phương trình

$$\begin{aligned} -\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} &= -4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + \sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) \left(\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3 \right) &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2 \text{ vì } \sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3 > 0 \\ \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} &= 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \Rightarrow y = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là

$$(x, y) = \left\{ \left(\frac{3 + \sqrt{37}}{14}; \frac{-3 - \sqrt{37}}{14} \right); \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right) \right\}.$$

Câu 30. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + (x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3})y = 0 \\ (2\sqrt{x + 3} + \sqrt{2 - y})^2(4 - 3\sqrt{3 - y}) = \sqrt{2x + y + 3} + \sqrt{x + 2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 2 \\ 2x + y + 3 \geq 0 \end{cases}.$$

Vì $\sqrt{x^2 + 3} - x > |x| - x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3} - x > 0$. Nên ta biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ thành.

$$\begin{aligned} & 3x(\sqrt{x^2 + 3} - x) + (x + \sqrt{x^2 + 3})(\sqrt{x^2 + 3} - x)(y + \sqrt{y^2 + 3})y = 0 \\ & \Leftrightarrow 3x(\sqrt{x^2 + 3} - x) + 3(y + \sqrt{y^2 + 3})y = 0 \Leftrightarrow x^2 - x\sqrt{x^2 + 3} = y^2 + y\sqrt{y^2 + 3} \\ & \Leftrightarrow (-x)^2 + (-x)\sqrt{(-x)^2 + 3} = y^2 + y\sqrt{y^2 + 3} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t\sqrt{t^2 + 3}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 2t + \sqrt{t^2 + 3} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} \stackrel{AM-GM}{\geq} 2t + 2|t| > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó từ $(*) \Leftrightarrow f(-x) = f(y) \Leftrightarrow y = -x$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình

$$(2\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 2})^2(4 - 3\sqrt{x + 3}) = \sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 2} \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{x + 2}, t \geq 0$. Ta có $x = t^2 - 2$. Lúc đó (1) trở thành phương trình

$$\begin{aligned} & (2\sqrt{t^2 + 1} + t)^2(4 - 3\sqrt{t^2 + 1}) = \sqrt{t^2 + 1} + t \Leftrightarrow 3(2\sqrt{t^2 + 1} + t)\sqrt{t^2 + 1} + 4(\sqrt{t^2 + 1} + 1) = 4(2\sqrt{t^2 + 1} + 1) \\ & \Leftrightarrow (15t^2 - 16t + 16)\sqrt{t^2 + 1} = -12t^3 + 20t^2 - 16t + 16 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 1} = \frac{-12t^3 + 20t^2 - 16t + 16}{15t^2 - 16t + 16} - 1 \\ & \Leftrightarrow \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1} + 1} = \frac{t^2(5 - 12t)}{15t^2 - 16t + 16} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} + 1} = \frac{5 - 12t}{15t^2 - 16t + 16} \end{cases}. \end{aligned}$$

Với $t = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x + 2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2$ (thỏa mãn).

Với $\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} + 1} = \frac{5 - 12t}{15t^2 - 16t + 16} \quad (2)$.

• **Trường hợp 1.** $t \geq \frac{5}{12}$ ta có $\begin{cases} \frac{5 - 12t}{15t^2 - 16t + 16} \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} + 1} > 0 \end{cases}$. Do đó (2) vô nghiệm.

• **Trường hợp 2.** $0 \leq t < \frac{5}{12}$ ta có (2) $\Leftrightarrow 15t^2 - 16t + 16 = (5 - 12t)\sqrt{t^2 + 1} + 5 - 12t$

$$\Leftrightarrow 15t^2 - 4t + 11 = (5 - 12t)\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow (15t^2 - 4t + 11)^2 = (5 - 12t)^2(t^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 81t^4 + 177t^2 + 32t + 96 = 0 \text{ (vô lí vì } 81t^4 + 177t^2 + 32t + 96 > 0, \forall t \in \left[0; \frac{5}{12}\right) \text{)}.$$

Vậy với $t \geq 0$ ta có (2) vô nghiệm.

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = (-2; 2)$.

Câu 31. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt[3]{y+4} \cdot \sqrt[4]{y^2+7y+10} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{x^2+2x+3} \cdot \sqrt[4]{x^2+2x+4} \\ 3(3x+2) = \sqrt{y+2x+5} (3\sqrt{x^2+5}-x^2) + 2\sqrt[3]{y-2x+5} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq -1 \\ y^2 + 7y + 10 \geq 0 \\ y + 2x + 5 \geq 0 \\ y + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ y \leq -5 \vee y \geq -2 \\ y + 2x + 5 \geq 0 \\ y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq -2 \end{cases}.$$

Phương trình thứ nhất trong hệ được viết lại thành phương trình

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{y+2} \cdot \sqrt[4]{(y+2)(y+5)} &= \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2+2} \cdot \sqrt[4]{(x+1)^2+3} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{y+2+2} \cdot \sqrt[4]{y+2+3} \cdot \sqrt[4]{y+2} &= \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2+2} \cdot \sqrt[4]{(x+2)^2+3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{y+2}} \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{y+2})^2+2} \cdot \sqrt[4]{(\sqrt{y+2})^2+3} &= \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2+2} \cdot \sqrt[4]{(x+1)^2+3} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t \cdot \sqrt[3]{t^4+2} \cdot \sqrt[4]{t^4+3}, \forall t \geq 0$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \sqrt[3]{t^4+2} \cdot \sqrt[4]{t^4+3} + \frac{4t^4 \cdot \sqrt[4]{t^4+4}}{3\sqrt[3]{(t^4+3)^2}} + \frac{t^4 \cdot \sqrt[3]{t^4+3}}{\sqrt[4]{(t^4+3)^2}} > 0, \forall t \geq 0.$$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Do đó từ } (*) \Leftrightarrow f(\sqrt[4]{y+2}) = f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt[4]{y+2} \Leftrightarrow x^2+2x+1 = y+2 \Leftrightarrow y = x^2+2x-1.$$

Thế vào phương trình thứ hai ta thu được phương trình sau.

$$\begin{aligned} 3(3x+2) &= \sqrt{x^2+4x+4} (3\sqrt{x^2+5}-x^2) + 2\sqrt[3]{x^2+4} \Leftrightarrow 3(3x+2) = (x+2) (3\sqrt{x^2+5}-x^2) + 2\sqrt[3]{x^2+4} \\ \Leftrightarrow x^3+2x^2+9x+6 &- 3(x+2)\sqrt{x^2+5} - 2\sqrt[3]{x^2+4} = 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x^2+5} &\left(\sqrt{x^2+5}-3\right) + (x+2-2\sqrt[3]{x^2+4}) + 3(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x^2+5} &\left(\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}\right) + \frac{(x+2)^3-8(x^2+4)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{x^2+5}+\sqrt[3]{(x^2+5)^2}} + 3(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x^2+5} &\left(\frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3}\right) + \frac{(x-2)(x^2+12)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{x^2+4}+\sqrt[3]{(x^2+4)^2}} + 3(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-2) &\left(\frac{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2+5}+3} + \frac{x^2+12}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{x^2+4}+\sqrt[3]{(x^2+4)^2}} + 3\right) = 0 \\ &\underbrace{\hspace{10em}}_T \\ \Leftrightarrow x=2 &\Rightarrow y=7 \text{ vì } T > 0, \forall x \geq -1. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (2; 7)$

Câu 32. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 5 - 2y \geq 0 \\ 3 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{5}{2} \\ x \leq \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Đặt $a = \sqrt{5 - 2y}, a \geq 0$. Ta có $y = \frac{5 - a^2}{2}$. Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành.

$$(4x^2 + 1)x + \left(\frac{5 - a^2}{2} - 3\right)a = 0 \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = a^3 + a \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = a^3 + a \quad (1).$$

Do $a \geq 0$ nên từ (1) $\Rightarrow x \geq 0$. Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \forall t \geq 0$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \geq 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Do đó từ (1)} \Leftrightarrow f(2x) = f(a) \Leftrightarrow 2x = a \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow x = \frac{5 - 4x^2}{2}.$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình

$$4x^2 + \left(\frac{5 - 4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \quad (2)$$

$$\text{Từ điều kiện } \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{4}. \text{ Do đó ta giải (2) với mọi } x \in \left[0; \frac{3}{4}\right].$$

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow 16x^4 - 24x^2 + 5 + 8(\sqrt{3 - 4x} - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (4x^2 - 1)(4x^2 - 5) - 16\frac{2x - 1}{\sqrt{3 - 4x} + 1} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - 1) \underbrace{\left((2x + 1)(4x^2 - 5) - \frac{16}{\sqrt{3 - 4x} + 1} \right)}_K = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \forall x \in \left[0; \frac{3}{4}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ -5 \leq 4x^2 - 5 \leq -\frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow (2x + 1)(4x^2 - 5) < 0 \Rightarrow K < 0.$$

$$\text{Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là } (x, y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

Câu 33. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Phương trình thứ hai trong hệ được viết lại thành phương trình

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1 \\ -1 \leq y + \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases} (*).$$

| Phương pháp hàm số

Phương trình thứ nhất trong hệ được viết lại thành phương trình

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 12(x-1) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 12(y-1) \Leftrightarrow (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) \quad (1)$$

Do (*) nên ta có .
$$\begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x-1 \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq y+1 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$
. Xét hàm số $f(t) = t^3 - 12t, \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2 - 4) < 0, \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn giảm trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(x-1) = f(y+1) \Leftrightarrow x-1 = y+1 \Leftrightarrow y = x-2$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình

$$x^2 + (x-2)^2 - x + x - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right); \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right) \right\}$.

Câu 34. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - 4 = 2\sqrt{x^2 - 2x - 1} & (1) \\ 4(y-2)^3 + 4x^3 + y - 58 = \sqrt[3]{14 - x^3} & (2) \end{cases}$$
.

Giải

Ta giải phương trình (2), $4(y-2)^3 + (y-2) = 4(14-x^3) + \sqrt[3]{14-x^3}$

Đặt $f(t) = 4t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 12t^2 + 1 > 0$

Vậy $y-2 = \sqrt[3]{14-x^3}$. Với $y-2 = \sqrt[3]{14-x^3}$ thay vào phương trình (1) ta được

$$\begin{aligned} x-2 + \sqrt[3]{14-x^3} &= 2\sqrt{x^2-2x-1} \Rightarrow \sqrt[3]{14-x^3} - (2-x) = 2\sqrt{x^2-2x-1} \\ \Leftrightarrow \frac{-6(x^2-2x-1)}{\left(\sqrt[3]{14-x^3}\right)^2 + (2-x)\sqrt[3]{14-x^3} + (2-x)^2} &= 2\sqrt{x^2-2x-1} \end{aligned}$$

Vậy $x^2 - 2x - 1 = 0$ hay $\frac{-6\sqrt{x^2-2x-1}}{\left(\sqrt[3]{14-x^3}\right)^2 + (2-x)\sqrt[3]{14-x^3} + (2-x)^2} = 2$ - Vô nghiệm

Đặt $t = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{x+6}} \Rightarrow t^3 = 6 + \sqrt[3]{6+x} \Rightarrow (t^3 - 6)^3 = 6 + x (*) \Rightarrow x^3 - t = 6$

Thay vào phương trình (*) ta được $(t^3 - x^3 + t)^3 = x + x^3 - t \Rightarrow (t^3 - x^3 + t)^3 - x^3 = x - t$

$$\Leftrightarrow (t^3 - x^3 + t - x) \left[(t^3 - x^3 + t)^2 + (t^3 - x^3 + t)x + x^2 \right] = x - t$$

Đặt $A = (t^3 - x^3 + t)^2 + (t^3 - x^3 + t)x + x^2 \Rightarrow -A(x^3 - t^3) - A(x - t) = x - t$

$$\Rightarrow -A(x-t)(x^2 + xt + t^2) - A(x-t) = x-t$$

Vậy $x-t=0$ hay $-A(x^2 + xt + t^2) - A = 1$ (phương trình vô nghiệm do $VT \leq 0$)

Với $x-t=0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{x+6}} \Rightarrow x^3 - 6 = \sqrt[3]{x+6}$.

Đặt $a = \sqrt[3]{x+6} \Rightarrow a^3 - x = 6$

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - a = 6 \\ a^3 - x = 6 \end{cases} \Rightarrow x^3 - a = a^3 - x \Rightarrow x^3 + x = a^3 + a$.

Xét $f(t) = t^3 + t, f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$

Khi đó $x = a \Rightarrow x = \sqrt[3]{x+6} \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Câu 35. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2y+1} = x - y \\ x^2 - 12xy + 9y^2 + 4 = 0 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ y \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có $x^2 + 9y^2 + 4 = 12xy \Rightarrow xy > 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành

$$\sqrt{2x+1} - x = \sqrt{2y+1} - y \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2t+1} - t, \forall t \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Ta có $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} - 1$.

Lại có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2t+1}} - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Từ đây ta suy ra hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

- **Trường hợp 1.** $x, y \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right)$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến nên từ $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình $2x^2 - 4 = 0$ (vô nghiệm vì $2x^2 - 4 < 0$).

- **Trường hợp 2.** $x, y \in (0; +\infty)$ thì hàm số $f(t)$ nghịch biến nên từ $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình

$$2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ vì } x > 0.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Câu 36. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}) = (x-y)\sqrt{x^2+1} \\ 2x(x-y) + 2(x+y) = 2 - y^2 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Nhận xét do hệ không thể có nghiệm dạng $(x, y) = (0; 0)$.

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có biến đổi sau

$$2x^2 - 2(x-1)(y-1) + y^2 = 0 \quad (*).$$

Vì $x^2 > 0, y^2 > 0$ nên từ $(*) \Rightarrow (x-1)(y-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{y+1}{\sqrt{y^2+1}} \quad (**).$$

| Phương pháp hàm số

Xét hàm số $f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = \frac{1-t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}$.

- **Trường hợp 1.** Nếu $t > 1$ thì $1-t < 0 \Rightarrow f'(t) < 0$.

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Nên từ $(**) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình $x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{6}$ (loại).

- **Trường hợp 2.** Nếu $t < 1$ thì $1-t > 0 \Rightarrow f'(t) > 0$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$. Nên từ $(**) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm 2\sqrt{6} \text{ (nhận)}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) = \left\{ (-2 + \sqrt{6}; -2 + \sqrt{6}); (-2 - \sqrt{6}; -2 - \sqrt{6}) \right\}$.

Câu 37. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{2x+1})\sqrt{y+3} = y + 3 + 2\sqrt{2x+1} & (1) \\ \sqrt{x-y} + \sqrt{x-1} + x = y + \sqrt{y} + 2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Phương trình (2) trở thành $\sqrt{x-y} - 1 + \sqrt{x-1} - \sqrt{y} + x - y - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{x-y-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y}} + x-y-1 = 0$$

Vậy $x-y-1=0$ hay $\frac{1}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y}} + 1 = 0$ (phương trình vô nghiệm do VT ≥ 1)

Với $x-x-1=0 \Rightarrow y=x-1$ thay vào phương trình (1) ta được

$$(x + \sqrt{2x+1})\sqrt{x+2} = x + 2 + 2\sqrt{2x+1}$$

Đặt $f(x) = x\sqrt{x+2} + \sqrt{(2x+1)(x+2)} - x - 2\sqrt{2x+1} - 2$ (điều kiện $x \geq 1$)

$$g(x) = x\sqrt{x+2}, \quad g'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}}.$$

$$h(x) = \sqrt{(2x+1)(x+2)}, \quad h'(x) = \frac{4x+5}{2\sqrt{(2x+1)(x+2)}}$$

$$t(x) = \sqrt{2x+1}, \quad t'(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}.$$

$$\text{Vậy } f'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}} + \frac{4x+5}{2\sqrt{(2x+1)(x+2)}} + \frac{2}{\sqrt{2x+1}} - 1$$

Dễ thấy $x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+2} - 1 \geq 0$.

$$\Rightarrow f(x) = (\sqrt{x+2} - 1) + \frac{x}{2\sqrt{x+2}} + \frac{4x+5}{2\sqrt{(2x+1)(x+2)}} + \frac{2}{\sqrt{2x+1}} \text{ với } x \geq 1.$$

Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[1; +\infty)$ mà $f(2) = 0$ nên phương trình có đúng một nghiệm duy nhất

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1)

Câu 38. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 3x = (y - 2)(y + 1) \\ (x + y)\sqrt{x^2 - 4x + 5} + (x - 2)\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 1} = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình

$$\begin{aligned} (x + y)\sqrt{(2 - x)^2 + 1} + (x - 2)\sqrt{(x + y)^2 + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + y)\sqrt{(2 - x)^2 + 1} - (2 - x)\sqrt{(x + y)^2 + 1} &= 0 \quad (1). \end{aligned}$$

Xét $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -2$. Thử lại không thấy thỏa hệ.

Xét $x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y$ ta có hệ $\begin{cases} y^2 + 3y = y^2 - y - 2 \\ 2 + y = 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy ta có $(x + y)(2 - x) \neq 0$.

Do đó từ (1) ta có
$$\frac{\sqrt{(x + y)^2 + 1}}{x + y} = \frac{\sqrt{(2 - x)^2 + 1}}{2 - x} \quad (2).$$

Từ (2) $\Rightarrow (x + y)(2 - x) > 0$. Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t}, \forall t \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = -\frac{1}{t^2\sqrt{t^2 + 1}} < 0, \forall t \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, mặt khác $(x + y)(2 - x) > 0$ nên từ (2) ta có $f(x + y) = f(2 - x) \Leftrightarrow x + y = 2 - x \Leftrightarrow y = 2 - 2x$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình

$$x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = \{(0; 2); (1; 0)\}$.

Câu 39. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3(\sqrt{x^2 + y^2} + y) = y^2(\sqrt{x^2 + 1} + x) & (1) \\ \sqrt[3]{(x - 1)^2} - 2\sqrt[3]{x - 1} - (\sqrt{y} - 5)\sqrt{x - 8} - 3\sqrt{y} + 31 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq 8$ và $y \geq 0$

Phương trình (1) trong hệ tương đương

$$\begin{aligned} x^3\sqrt{x^2 + y^2} + x^3y &= y^2\sqrt{x^2 + 1} + xy^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^8 + x^6y^2} - \sqrt{y^4x^2 + y^4} + x^3y - xy^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^8 - y^4 + x^6y^2 - y^4x^2}{\sqrt{x^8 + x^6y^2} + \sqrt{y^4x^2 + y^4}} + xy(x^2 - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x^2 - y)(x^2 + y)(x^4 + y^2)}{\sqrt{x^8 + x^6y^2} + \sqrt{y^4x^2 + y^4}} + xy(x^2 - y) &= 0 \end{aligned}$$

Vậy $x^2 = y$ hoặc $\frac{(x^2 + y)(x^4 + y^2)}{\sqrt{x^8 + x^6y^2} + \sqrt{y^4x^2 + y^4}} + xy = 0$ (vô nghiệm do $x, y > 0$ nên VT > 0).

Do đó, với $x^2 = y$ thế vào phương trình (2) ta có

$$\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} - (x-5)\sqrt{x-8} - 3x + 31 = 0$$

Đặt $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}} - 2(x-1)^{\frac{1}{3}} - (x-5)\sqrt{x-8} - 3x + 31$

Ta có $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} - \sqrt{x-8} - \frac{x-5}{2\sqrt{x-8}} - 3$

Để thấy $-\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} - \frac{2}{3} < 0$ (với mọi $x > 8$)

$$\Rightarrow f'(x) = -\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} + \frac{2}{3}\right) - \sqrt{x-8} - \frac{x-5}{2\sqrt{x-8}} - \frac{7}{3} < 0, \forall x \geq 8$$

Vậy $f'(x)$ nghịch biến trên khoảng $(8; +\infty)$

Vậy phương trình này có nhiều nhất 1 nghiệm mà $f(9) = 0$ suy ra $x = 9$.

Câu 40. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (5-2x)\sqrt{x+2y} = (6-x-2y)\sqrt{x-1} \\ (x^3-2y-3)\left(x+\sqrt{8x(3-x)+4y^2+5}\right) = 21 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $y \geq 0$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ.

$$\begin{cases} (2x^2+1-\sqrt{y})\sqrt{2x^2+1} = 3\sqrt{y}(\sqrt{y}-1) \\ y^2-y = (2x^2+1)-\sqrt{2x^2+1} \end{cases} \quad (I)$$

Ta có $y^2-y = \sqrt{2x^2+1}(\sqrt{2x^2+1}-1) \geq 0 \Rightarrow y^2-y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 0 \vee y \geq 1$.

Kết hợp với điều kiện $y \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y \geq 1 \end{cases}$. Với $y=0$ không thỏa hệ.

Đặt $a = \sqrt{2x^2+1}, a \geq 1$. Khi đó hệ (I) trở thành
$$\begin{cases} (a^2-\sqrt{y})a = 3\sqrt{y}(\sqrt{y}-1) \\ y^2-y = a^2-a \end{cases}$$

Xét phương trình $y^2-y = a^2-a$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3-t, \forall t \geq 1$. Ta có $f'(t) = 3t^2-1 > 0, \forall t \geq 1$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[1; +\infty)$. Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(y) = f(a) \Leftrightarrow y = a$. Thế vào phương trình thứ hai trong hệ (I) ta có

$$(a^2-\sqrt{a})a = 3\sqrt{a}(\sqrt{a}-1) \Leftrightarrow a^3-3a = (\sqrt{a})^3-3\sqrt{a} \quad (2).$$

Xét hàm số $f(u) = u^3-3u, \forall u \geq 1$. Ta có $f'(u) = 3u^2-3 \geq 0, \forall u \geq 1$.

Vậy hàm số $f(u)$ luôn tăng trên $[1; +\infty)$.

Do đó từ (2) $\Leftrightarrow f(a) = f(\sqrt{a}) \Leftrightarrow a = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \Rightarrow y=0 \\ a=1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$.

Vậy ta có $\begin{cases} a=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2+1}=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (0; 1)$.

Câu 41. Tìm tất cả các số thực x, y thỏa hệ.
$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = 2 \\ x^{x+1}y^{y+1} \geq 1 \end{cases}$$

Giải

Ta chứng minh nếu các số x, y thỏa mãn hai điều kiện đầu thì

$$x^{x+1}y^{y+1} \leq 1 \Leftrightarrow (x+1)\ln x + (y+1)\ln y \leq 0$$

Thay $y = 2 - x$, ta chứng minh. $f(x) = (x+1)\ln x + (3-x)\ln(2-x) \leq 0$ với $0 < x < 2$

Ta có $f'(x) = \ln x - \ln(2-x) + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x}$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} - \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2-x)^2} \right] \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} \right)^2 = -\frac{(x-1)^2}{x(2-x)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} \right) \leq 0$$

Do đó $f'(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$, hơn nữa $f'(1) = 0$ nên $f'(x)$ nhận giá trị dương trên đoạn $(0; 1)$ và âm trên $(1; 2)$. Suy ra $f(x) \leq f(1) = 0$ với mọi $x \in (0; 2)$.

Từ đó, hệ phương trình có nghiệm $x = y = 1$.

Câu 42. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \left(1 + \left|\frac{x}{y}\right|\right)^4 + \left(1 + \left|\frac{y}{x}\right|\right)^4 = 32 & (1) \\ x^2 + y^2 + x^2y + 2x + y + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y \neq 0$. Ta có.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(1 + \left|\frac{x}{y}\right|\right)^4 + \left(1 + \left|\frac{y}{x}\right|\right)^4 = (1+1)^4 + \left(1 + \frac{1}{1}\right)^4$

Xét hàm số $f(t) = (t+1)^4 + \left(1 + \frac{1}{t}\right)^4, t > 0$.

Ta có $f'(t) = 4(t+1)^3 + 4\left(\frac{1}{t} + t\right)^3 > 0, \forall t > 0$ hay hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Do vậy $f\left(\left|\frac{x}{y}\right|\right) = f(1) \Leftrightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$

- Với $x = y$ thay vào (2) ta có phương trình $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
- Với $x = -y$ thay vào (2) ta có phương trình $-x^3 + 2x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x, y) = \{(-2; -2), (3; -3)\}$.

Câu 43. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 = (\sqrt{x^2 + 1} + 1)(x^2 - y^3 + 3y - 2) & (1) \\ x^2 + (y+1)^2 = 2\left(1 + \frac{1-x^2}{y}\right) & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $y \neq 0$.

Phương trình (2) tương đương với $y(x^2 + y^2 + 2y + 1) = 2(y + 1 - x^2)$

$$\Leftrightarrow x^2(y+2) + y^3 + 2y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(y+2) + (y+2)(y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+2)(x^2+y^2-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

- Với $y = -2$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$4x^2 = x^2(\sqrt{x^2+1}+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ \sqrt{x^2+1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

- Với $x^2+y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $4[(x^2+1)-1] = (\sqrt{x^2+1}+1)(x^2-y^3+3y-2)$

$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{x^2+1}-1) = x^2-y^3+3y-2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+1}-x^2+y^3-3y-2=0$$

Xét hàm số $f(x) = 4\sqrt{x^2+1}-x^2$ với $x \in [-1;1]$. Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} - 2x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \left(\frac{2-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \notin [-1;1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \min_{[-1;1]} f(x) = \min \{f(-1); f(0); f(1)\} = f(0) = 4.$$

Xét hàm số $g(y) = y^3 - 3y - 2$ với $y \in [-1;1]$. Ta có hàm số $g(y)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và

$$g'(y) = 3y^2 - 3; \quad g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \min_{[-1;1]} g(y) = \min \{g(-1); g(0); g(1)\} = g(0) = -4$$

Từ đó ta có $f(x) + g(y) \geq 0, \forall x, y \in [-1;1]$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại ta có tập nghiệm của hệ $T = \{(0; -2), (2\sqrt{2}; -2), (-2\sqrt{2}; -2), (0; 1)\}$.

Câu 44. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + x^3y + 9y = y^3x + x^2y^2 + 9x \\ x(y^3 - x^3) = 7 \end{cases}$$

Giải

Phương trình đầu tương đương

$$x^4 + x^3y + 9y = y^3x + x^2y^2 + 9x \Leftrightarrow (x^4 - xy^3) + (x^3y - x^2y^2) - ((x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)[x(x^2 + xy + y^2) + x^2y - 9] = 0 \Leftrightarrow (x - y)[x(x + y)^2 - 9] = 0$$

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta thấy $x \neq y$ nên từ biến đổi trên, suy ra

$$x(x + y)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x(x + y)^2 = 9 \quad (*)$$

Ta có $x(y^3 - x^3) = 7 \Leftrightarrow y^3 - x^3 = \frac{7}{x} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}}$

Thay vào (*), ta được $x \left(x + \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}} \right)^2 = 9$

Ta sẽ chứng minh rằng vế trái là một hàm đồng biến theo biến x. Thật vậy

$$x \left(x + \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}} \right)^2 = x \left(x^2 + 2x\sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}} + \sqrt[3]{\left(x^3 + \frac{7}{x}\right)^2} \right)$$

$$= x^3 + 2x^2 \cdot \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}} + x\sqrt[3]{\left(x^3 + \frac{7}{x}\right)^2} = x^3 + 2x\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \sqrt[3]{x(x^4 + 7)^2}$$

Từ (*) suy ra $x > 0$ và trong biểu thức ở trên, các số mũ của biến x đều dương lên đây là hàm đồng biến. suy ra nó có không quá một nghiệm.

Thay trực tiếp $x = 1$ vào biểu thức, ta thấy thỏa

Vậy hệ đã cho có đúng một nghiệm là $(x; y) = (1; 2)$.

Câu 45. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12}(1) \\ 7y^4 + 13x + 8 = 2y^4 \sqrt[3]{x(3x^2 + 3y^2 - 1)} \end{cases}$$

Đề thi chọn đội tuyển TP HCM 2009-2010

Giải

Xét $y = 0$, thay vào hệ phương tìm được $x = \frac{-8}{13}$

Xét $x = 0$ từ (1) suy ra $y = 0$ nhưng $x = y = 0$ không thỏa mãn phương trình $x = y = 0$

Xét $xy \neq 0$. Từ phương trình (1) ta có $\left(\frac{x}{y}\right)^{11} + \frac{x}{y} = y^{11} + y$

Xét hàm số $f(t) = t^{11} + t$ ta có $f'(t) = 11t^{10} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó ta có $(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow x = y^2 > 0$

Khi đó phương trình (2) trở thành

$$7x^2 + 13x + 8 = 2x^2 \sqrt[3]{x(3x^2 + 3x - 1)} \Leftrightarrow 7t + 13t^2 + 8t^3 = 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2} \quad \text{với } t = \frac{1}{x} > 0 \quad (3)$$

Phương trình (3) tương đương

$$(2t + 1)^3 + 2(2t + 1) = 3 + 3t - t^2 + 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2} \Leftrightarrow g(2t + 1) = g\left(\sqrt[3]{3 + 3t - t^2}\right)$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + 2t$ có $g'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t > 0$ nên từ phương trình trên ta được

$$2t + 1 = \sqrt[3]{3 + 3t - t^2} \Leftrightarrow (2t + 1)^3 = 3 + 3t - t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(L) \\ t = \frac{-5 - \sqrt{89}}{16}(L) \\ t = \frac{\sqrt{89} - 5}{16}(t/m) \end{cases}$$

Suy ra $x = \frac{16}{\sqrt{89} - 5} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{16}{\sqrt{89} - 5}}$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{-8}{13}; 0\right), \left(\frac{16}{\sqrt{89} - 5}; \pm \sqrt{\frac{16}{\sqrt{89} - 5}}\right)$

Câu 46. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + x^3y + 9y = y^3x + x^2y^2 + 9x \\ x(y^3 - x^3) = 7 \end{cases}$$

Giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương $(x - y)\left[x(x + y)^2 - 9\right] = 0$

Với $x = y$ kết hợp với phương trình thứ hai, suy ra vô nghiệm

| Phương pháp hàm số

Còn lại ta kết hợp thành hệ mới
$$\begin{cases} x(y^3 - x^3) = 7 \\ x(x+y)^2 = 9 \end{cases}$$

Trước hết có đánh giá $x > 0$ và rút ra $y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}}$. Thay xuống ta có

$$x \left(x + \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}} \right)^2 = 9 \Leftrightarrow x^3 + 2x\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \sqrt[3]{x(x^4 + 7)^2} = 9$$

Đặt về trái là $f(x)$. Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2 \left(\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \frac{6x^6 + 14x^2}{3\sqrt[3]{(x^6 + 7x^2)^2}} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{9x^8 + 70x^4 + 49}{\sqrt[3]{x^2(x^4 + 7)^4}} > 0$

Vậy $f(x) = 9$ có nghiệm duy nhất $x = 1 \Rightarrow y = 2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$

Câu 47. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{x^3}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 4x\sqrt{y+1} + 8x = (4x^2 - 4x - 3)\sqrt{x+1} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x > -1, y \geq -1$.

Để ý khi chia 2 vế của phương trình thứ nhất cho $\sqrt{x+1}$ ta sẽ cô lập được 2 ẩn.

Thực hiện phép chia và ta thu được
$$\frac{x^2}{\sqrt{x+1}} + \frac{x}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1}$$

Mà ta có
$$\frac{x^2}{\sqrt{x+1}} + \frac{x}{(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{x^3 + x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{x^3}{(x+1)\sqrt{x+1}} + \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

Như vậy phương trình thứ nhất sẽ là

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} \right)^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = (\sqrt{y+1})^3 + \sqrt{y+1} \Leftrightarrow \sqrt{y+1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

Hiển nhiên vì $f(t) = t^3 + t$ đơn điệu tăng. Thay vào phương trình thứ 2 ta được

$$\begin{aligned} \frac{4x^2}{\sqrt{x+1}} + 8x &= (4x^2 - 4x - 3)\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 4x^2 + 8x\sqrt{x+1} = (4x^2 - 4x - 3)(x+1) \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 8x\sqrt{x+1} + 4(x+1) &= (2x-1)^2(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2\sqrt{x+1} = (2x-1)\sqrt{x+1} \\ 2x + 2\sqrt{x+1} = (1-2x)\sqrt{x+1} \end{cases} \end{aligned}$$

- **Trường hợp 1.** Nếu $2x = (2x-3)\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = \frac{5}{4} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{4+3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
- **Trường hợp 2.** Nếu $2x = (-1-2x)\sqrt{x+1} \Rightarrow 4x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0$

Đổi ẩn $x = z - \frac{1}{3}$. Thay vào phương trình ta được $108z^3 + 99z - 10 = 0$

Đặt $z = \frac{\sqrt{11}}{6} \left(a - \frac{1}{a} \right)$ thay vào phương trình ta được

$$\frac{11\sqrt{11}}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = \frac{10-3\sqrt{159}}{11\sqrt{11}} \\ a^3 = \frac{10+3\sqrt{159}}{11\sqrt{11}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt[3]{\frac{10-3\sqrt{159}}{11\sqrt{159}}} \\ a = \sqrt[3]{\frac{10+3\sqrt{159}}{11\sqrt{11}}} \end{cases}$$

Ta thấy rằng 2 nghiệm này luôn có đặc điểm là tích của chúng bằng -1 . Vậy nên 2 trường hợp thay vào z đều ra một kết quả. Từ đó suy ra

$$z = \frac{\sqrt{11}}{6}\left(a - \frac{1}{a}\right) = \frac{\sqrt{11}}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{10+3\sqrt{159}}{11\sqrt{11}}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{10+3\sqrt{159}}{11\sqrt{11}}}}\right) = \frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{10+3\sqrt{159}} - \frac{11}{\sqrt[3]{10+3\sqrt{159}}}\right)$$

$$\text{Từ đó suy ra } x = \frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{10+3\sqrt{159}} - \frac{11}{\sqrt[3]{10+3\sqrt{159}}}\right) - \frac{1}{3}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(3; \frac{5}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right), \left(a; \frac{a^2}{a+1} - 1\right)$ với

$$a = \frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{10+3\sqrt{159}} - \frac{11}{\sqrt[3]{10+3\sqrt{159}}}\right) - \frac{1}{3}$$

Câu 48. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} - y(1+2\sqrt{2x-1}) = -8 \\ y^2 + y\sqrt{2y-1} - 4x - 2x + y = 13 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{3}{2}$.

Đặt $a = \sqrt{2x-1} \geq 0$. Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta rút ra $y = \frac{a+8}{1+2a}$

Thay vào phương trình thứ hai ta được

$$\left(\frac{a+8}{1+2a}\right)^2 + \left(\frac{a+8}{1+2a}\right)\sqrt{\frac{-4a^3-2a^2-4a+13}{1+2a}} - 2a^2 + \frac{a+8}{1+2a} = 14$$

Một phương trình rất khó chịu và gần như mất phương hướng, ta sẽ nghĩ thử tới phương pháp đánh giá bằng hàm số.

Đặt về trái là $f(a)$. Ta có

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{-30(a+8)(2a+1)}{(2a+1)^4} - \frac{15}{(1+2a)^2} \cdot \sqrt{\frac{-4a^3-2a^2-4a+13}{1+2a}} \\ &\quad + \left(\frac{a+8}{1+2a}\right) \cdot \frac{-16a^3-16a-30}{2 \cdot \sqrt{\frac{-4a^3-2a^2-4a+13}{1+2a}}} - 4a - \frac{15}{(1+2a)^2} < 0 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $a = 1 \Rightarrow x = 1, y = 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$.

Chương

Các bài toán chứa tham số

Trong chương này ta sẽ cùng tìm hiểu lớp bài toán chứa tham số. Để làm tốt các dạng toán này ta cần nắm chắc kiến thức về đạo hàm, về biến đổi phương trình vô tỷ. Chú ý thêm với những bạn đang đọc cuốn sách này thì cố gắng làm tốt các bài toán ở đây vì nó sẽ giúp ích các bạn rất nhiều trong kì thi THPT Quốc gia. Vậy nhé chúng ta cùng bắt đầu nào!

A. Phần phương trình.

Ứng dụng tam thức bậc 2

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0), \Delta = b^2 - 4ac$.

Gọi S, P là tổng và tích của 2 nghiệm x_1, x_2 . Hệ thức Viét $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

- Điều kiện $f(x) = 0$ có 2 nghiệm trái dấu là $P < 0$.
- Điều kiện $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.
- Điều kiện $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.
- Điều kiện $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt âm là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$.
- Khi so sánh 2 nghiệm với số $\alpha \neq 0$, ta thường đặt $t = x - \alpha$ để chuyển về so sánh với số 0, cụ thể như sau

$$1. \quad x_2 > x_1 > \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > \alpha \\ x_2 > \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \alpha > 0 \\ x_2 - \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2\alpha > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$2. \quad x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < \alpha \\ x_2 < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \alpha < 0 \\ x_2 - \alpha < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2\alpha < 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$3. \quad x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0.$$

- Dấu của $f(x)$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \\ f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ứng dụng của đạo hàm

Bài toán 1. Tìm m để phương trình $f(x; m) = 0$ có nghiệm trên D ?

- **Bước 1.** Độc lập m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $f(x) = A(m)$.
- **Bước 2.** Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D .
- **Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên xác định giá trị của tham số m để đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- **Bước 4.** Kết luận những giá trị cần tìm của m để phương trình $f(x) = A(m)$ có nghiệm trên D .

Lưu ý.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có GTLN và GTNN trên D thì giá trị m cần tìm là những giá trị m thỏa mãn $\min_D f(x) \leq A(m) \leq \max_D f(x)$.
- Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số m để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại k điểm phân biệt.

Bài toán 2. Tìm m để bất phương trình $f(x; m) \geq 0$ hoặc $f(x; m) \leq 0$ có nghiệm trên D ?

- **Bước 1.** Độc lập m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $f(x) \geq A(m)$ hoặc $f(x) \leq A(m)$.
- **Bước 2.** Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D .
- **Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên xác định giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm.
 - + Với bất phương trình $f(x) \geq A(m)$ đó là những m sao cho tồn tại phần đồ thị nằm trên đường thẳng $y = A(m)$, tức là $A(m) \leq \max_D f(x)$ (khi $\max_D f(x) \exists$).
 - + Với bất phương trình $f(x) \leq A(m)$ đó là những m sao cho phần đồ thị nằm dưới đường thẳng $y = A(m)$, tức là $A(m) \geq \min_D f(x)$ (khi $\min_D f(x) \exists$).

Bài toán 3. Tìm tham số m để bất phương trình $f(x) \geq A(m)$ hoặc $f(x) \leq A(m)$ nghiệm đúng $\forall x \in D$?

- Bất phương trình $f(x) \geq A(m)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow \min_D f(x) \geq A(m)$.
- Bất phương trình $f(x) \leq A(m)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow \max_D f(x) \leq A(m)$.

Lưu ý

| Các bài toán chứa tham số

- Các bài toán liên quan hệ phương trình, hệ bất phương trình thì ta cần biến đổi chuyển về các phương trình và bất phương trình.
- Khi đổi biến, cần quan tâm tới điều kiện của biến mới.

Các bài toán minh họa.

Nội dung của phần này sẽ liên quan tới 2 bài toán là **bài toán 1** và **bài toán 2** mà ở phần **A** đã đề cập tới. Ta cùng đi vào ví dụ nhé!

Câu 1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} + x + \sqrt{x-4} = m$$

Giải

Điều kiện $x \geq 4$. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sqrt{x-4})^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x-4} + 2^2} + x + \sqrt{x-4} = m \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(\sqrt{x-4} + 2)^2} + x + \sqrt{x-4} = m \Leftrightarrow \sqrt{x-4} + 2 + x + \sqrt{x-4} = m \\ \Leftrightarrow & \left[(\sqrt{x-4})^2 + 2\sqrt{x-4} + 1 \right] + 5 = m \Leftrightarrow (\sqrt{x-4} + 1)^2 = m - 5 \quad (*) \end{aligned}$$

Để (*) có nghiệm thì $m - 5 = (\sqrt{x-4} + 1)^2 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 6$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = a \quad (*)$$

Giải

Nhận thấy nếu x_0 là nghiệm thì $-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Do đó, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Thế $x_0 = 0$ vào (*) ta được $a = \sqrt{1-0} + 2\sqrt[3]{1-0} \Leftrightarrow a = 3$.

Thử lại với $a = 3$ thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = 3 \quad (**)$

Đặt $t = \sqrt[6]{1-x^2}$, $(0 \leq t \leq 1) \Rightarrow \begin{cases} t^2 = \sqrt[3]{1-x^2} \\ t^3 = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$. Phương trình (**) trở thành

$$t^3 + 2t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt[6]{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow 1-x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy với $a = 3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

Nhận xét. Phương pháp được sử dụng này ta sẽ được tìm hiểu ở phần sau.

Câu 3. Tìm tham số m để phương trình $x + \sqrt{3x^2 + 1} = m$ có nghiệm thực ?

Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đặt $f(x) = x + \sqrt{3x^2 + 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + 3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + 3x}{\sqrt{3x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 1} = -3x \Leftrightarrow \begin{cases} -3x > 0 \\ 3x^2 + 1 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$	$+\infty$

Vậy để phương trình có nghiệm thực thì $m \geq \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Câu 4. Tìm tham số m để phương trình $3x^2 + 2x + 3 = m(x+1)\sqrt{x^2+1}$ có nghiệm ?

Giải

Biến đổi phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + 2(x^2 + 1) = m(x+1)\sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + 2(x^2 + 1) = m(x+1)\sqrt{x^2+1} \end{aligned} \quad (1)$$

Vì $x = -1$ không là nghiệm, nên chia 2 vế (1) cho $(x+1)\sqrt{x^2+1}$ ta được

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + 2 \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = m \quad (2)$$

Đến đây ta có thể dễ dàng nhìn thấy ẩn phụ. Đặt $t = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow t' = \frac{1-x}{(\sqrt{x^2+1})^3}$, cho $t' = 0 \Rightarrow x = 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$; $f(1) = \sqrt{2}$ từ đó suy ra $t \in (-1; \sqrt{2}]$.

Lúc đó, yêu cầu bài toán trở thành $f(t) = t + \frac{2}{t} = m$ có nghiệm $\forall t \in (-1; \sqrt{2}]$, $t \neq 0$.

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{2}{t}$ trên nửa khoảng $(-1; \sqrt{2}] \setminus \{0\}$.

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{2}{t^2} = \frac{t^2 - 2}{t^2} \leq 0, \forall t \in (-1; \sqrt{2}] \setminus \{0\}$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-1	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		$-$		$-$	
$f(t)$		-3	$+\infty$	$2\sqrt{2}$	

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị m cần tìm là $m < -3 \vee m \geq 2\sqrt{2}$.

Câu 5. Tìm tham số m để $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)} = m$ có nghiệm thực ?

Giải

| Các bài toán chứa tham số

Điều kiện $-1 \leq x \leq 3$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = x+1+3-x+2\sqrt{(x+1)(3-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+1)(3-x)} = \frac{t^2-4}{2}.$$

$$\text{Ta có } t^2 = 4 + 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq -2 \Leftrightarrow t \geq 2 \\ t \geq 2 \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = -1 \vee x = 3$. Ta lại có

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{(1^2+1^2)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + \left(\sqrt{3-x}\right)^2\right]} \Leftrightarrow t \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow t \in [2; 2\sqrt{2}]$$

$$\text{Khi đó (*) trở thành } t - \frac{t^2-4}{2} = m \Leftrightarrow 2m = -t^2 + 2t + 4.$$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 4$ trên đoạn $[2; 2\sqrt{2}]$.

Ta có $f'(t) = -2t + 2$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Bảng biến thiên

t	$-\infty$	1	2	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-	-	
$f(t)$			4	$4\sqrt{2}-4$	

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm $\min_{[2; 2\sqrt{2}]} f(t) \leq 2m \leq \max_{[2; 2\sqrt{2}]} f(t)$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}-4 \leq 2m \leq 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}-2 \leq m \leq 2$$

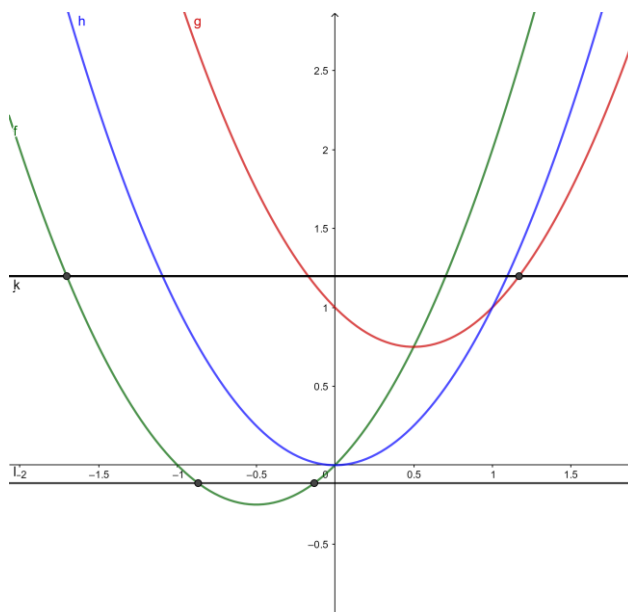
Câu 6. Tìm a để phương trình $x^2 - \sqrt{a-x} = a$ có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Cách 1.

$$\text{Ta có } x^2 - \sqrt{a-x} = a \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - a)^2 = a - x \\ x^2 - a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x - a)(x^2 - x + 1 - a) = 0 \\ x^2 - a \geq 0 \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình là giao điểm của đường $y = a$ với hợp của 2 parabol $y = x^2 + x; y = x^2 - x + 1$ đồng thời nằm dưới parabol $y = x^2$. Vẽ đồ thị ta được



- Nếu $-\frac{1}{4} < a \leq 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$.
- Nếu $a \geq 1$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}; x = \frac{1 + \sqrt{4a-3}}{2}$

$$\Rightarrow S = \left(-\frac{1}{4}; 0\right] \cup [1; +\infty).$$

Câu 7. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x^2} < 4 \\ x^4 + 4x + m^2 - m + 4 > 0 \end{cases}$ theo tham số m .

Giải

Điều kiện $x \neq 0$.

Bất phương trình tương đương

$$\begin{cases} \frac{1-4x^2}{x^2} < 0 \\ x^4 + 4x + m^2 - m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2} \\ f(x) = x^4 + 4x + 4 > m - m^2 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x^4 + 4x + 4$ trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 + 4$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	$\frac{33}{16}$	$\frac{97}{16}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để hệ có nghiệm thì

$$m - m^2 < 1 \Leftrightarrow m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Vậy $\forall m \in \mathbb{R}$ thì hệ luôn có nghiệm.

Câu 8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$2\sqrt{x + \sqrt{1 - x^2}} - 2\sqrt{m + 1 - m^2} + 2x\sqrt{1 - x^2} = 0(*)$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ x + \sqrt{1 - x^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1.$$

Đặt $t = x + \sqrt{1 - x^2}, t \geq 0$. Suy ra $2x\sqrt{1 - x^2} = t^2 - 1$.

Phương trình (*) trở thành $2\sqrt{t + t^2} = 2\sqrt{m + m^2} \Leftrightarrow f(t) = f(m)$.

Với $f(u) = 2\sqrt{u + u^2}, u \geq 0$. $f'(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} + 2u > 0, \forall u > 0$.

Do đó $f(u)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Do đó $f(t) = f(m) \Leftrightarrow t = m$.

Theo Cauchy – Schwarz, ta có $t \leq \sqrt{1 + 1}\sqrt{x^2 + 1 - x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $t = 0$ khi $x = \frac{-\sqrt{2}}{2}; t = \sqrt{2}$ khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $0 \leq m \leq \sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 9. Tìm m để phương trình sau có ít nhất 2 nghiệm phân biệt?

$$x^3 + 3mx + 1 - m = (3x + m - 1)\sqrt{x^3 + 1}$$

Giải

Điều kiện $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Khi đó ta có $x^3 + 3mx + 1 - m = (3x + m - 1)\sqrt{x^3 + 1}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^3 + 1}\right)^2 - (3x + m - 1)\sqrt{x^3 + 1} + 3mx - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3 + 1} = m & (1) \\ \sqrt{x^3 + 1} = 3x - 1. & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x^3 + 1 = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x = 0 \\ x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{2}.$$

Như thế, phương trình đã cho luôn có ít nhất hai nghiệm phân biệt mà không phụ thuộc vào m .

Câu 10. Tìm m để phương trình $\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)\left[m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 16\sqrt[4]{\frac{x^3}{x-1}}\right] = 1$ có hai nghiệm?

Giải

Điều kiện $x > 1$. Biến đổi phương trình tương đương

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)\left[m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 16\sqrt[4]{\frac{x^3}{x-1}}\right] = 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 16\sqrt[4]{\frac{x^3}{x-1}} = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow m + \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} - 16\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}} = 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}} \\ &\Leftrightarrow m + \frac{x-(x-1)}{\sqrt{x(x-1)}} - 16\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}} = 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}} \\ &\Leftrightarrow m + \sqrt{\frac{x}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - 16\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}} = 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}} \\ &\Leftrightarrow m = -\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 16\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}} + 1 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x}{x-1}} = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x-1}} \Rightarrow t > 1$.

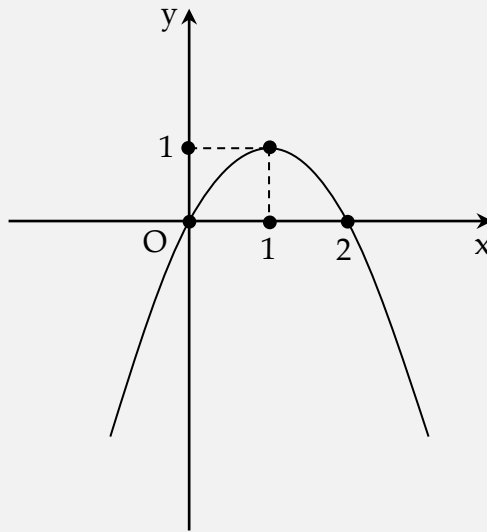
Phương trình đã cho trở thành $m - 16t = 1 - t^2 \Leftrightarrow -t^2 + 16t + 1 = m$ (2)

Với một giá trị của $t > 1$ cho ta một giá trị của $x > 1$ nên phương trình (1) có hai nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm $t > 1$. Vẽ bảng biến thiên ta dễ dàng thấy $m \in (16; 65)$ thì phương trình có 2 nghiệm.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm m nguyên để phương trình

$$\sqrt{m + 4\sqrt{m + 16|f(x)|}} - 4|f(x)| = 0$$

có 8 nghiệm phân biệt



Giải

Đặt $t = |f(x)|, t \geq 0$

Dựa vào đồ thị ta thấy, với $0 < t < 1$ cho ta 4 giá trị của x .

Phương trình trở thành $\sqrt{m + 4\sqrt{m + 16t}} = 4t \Leftrightarrow m + 4\sqrt{m + 16t} = 16t^2$

Đặt $u = \sqrt{m + 16t}, u \geq 0$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} m + 4u = 16t^2 & (1) \\ m + 16t = u^2 & (2) \end{cases}$

Từ (1), (2) suy ra $(u - 4t)(4 + u + 4t) = 0 \Leftrightarrow u = 4t$ (do $4 + u + 4t > 0$). Khi đó.

$$4t = \sqrt{m + 16t} \Leftrightarrow 16t^2 - 16t = m (*) (t \geq 0)$$

| Các bài toán chứa tham số

Xét hàm số $f(t) = 16t^2 - 16t$ trên $[0; +\infty)$, vẽ bảng biến thiên cho hàm số ta thấy để phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn.

$$0 < t_1 < t_2 < 1 \Leftrightarrow -4 < m < 0.$$

Câu 12. Tìm m để phương trình $x^3 + 4x^2 + 6x - (x + m + 2)\sqrt{x + m} = m - 4(1)$ có hai nghiệm phân biệt

Giải

Phân tích. Ta dễ dàng thấy bài toán có hình dáng của hàm đặc trưng trong đó.

Điều kiện $x \geq -m$.

Phương trình tương đương với

$$(x+1)^3 + (x+1)^2 + 2(x+1) = (\sqrt{x+m})^3 + (\sqrt{x+m})^2 + 2\sqrt{x+m} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0, \forall t$. Hàm số đồng biến.

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow f(x+1) = f(\sqrt{x+m}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{x+m} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x + 1 = m \quad (2) \end{cases}$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cần phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1; +\infty)$. Xét hàm số $y = x^2 + x + 1$ trên $[-1; +\infty)$ ta có bảng biến thiên

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'		0	+
y	1	$\frac{3}{4}$	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\frac{3}{4} < m \leq 1$.

Câu 13. Tìm m để phương trình $\sqrt{x^3 + \frac{m}{8}} + 3\sqrt{12 - x^3} = 10$ có hai nghiệm phân biệt

Giải

Điều kiện $\sqrt[3]{-\frac{m}{8}} \leq x \leq \sqrt[3]{12}$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^3 + \frac{m}{8}} & (a \geq 0) \\ b = \sqrt{12 - x^3} & (b \geq 0) \end{cases}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + 3b = 10 \\ a^2 + b^2 = \frac{m}{8} + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 - 3b & \left(a \geq 0 \Rightarrow b \leq \frac{10}{3} \right) \\ \frac{m}{8} = 10b^2 - 60b + 88 & (*) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(b) = 10b^2 - 60b + 88 \forall b \in \left[0; \frac{10}{3}\right]$, vẽ bảng biến thiên ta dễ dàng thấy phương trình đầu có

2 nghiệm phân biệt khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -2 < \frac{m}{8} \leq -\frac{8}{9} \Leftrightarrow -16 < m \leq \frac{-64}{9}$$

Câu 14. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm trái dấu

$$\sqrt{x^2 + 2m^2x + m^4 + 81} + \sqrt{x^4 + 2x^2 + 2} = \sqrt{(x^2 + x + m^2 + 1)^2 + 100}$$

Giải

Phương trình tương đương

$$\sqrt{(x+m^2)^2 + 9^2} + \sqrt{(x^2+1)^2 + 1} = \sqrt{(x^2+x+m^2+1)^2 + 10^2}$$

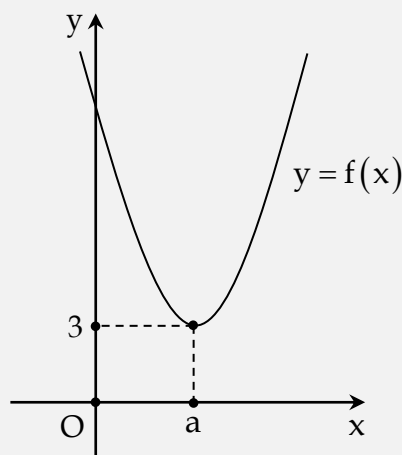
$$\text{Đặt } \begin{cases} \vec{u} = (x+m^2; 9) \\ \vec{v} = (x^2+1; 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (x^2+x+m^2+1; 10) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(x^2+x+m^2+1)^2 + 10^2} = VP$$

$$\text{Ta có } VT = |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = VP$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ } \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng } \Leftrightarrow \frac{x+m^2}{x^2+1} = \frac{9}{1} > 0 \Leftrightarrow 9x^2 - x + 9 - m^2 = 0 (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có hai nghiệm trái dấu } \Leftrightarrow 9(9-m^2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases}.$$

Câu 15. Cho hàm bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ sau



Tìm m để phương trình $\sqrt{2f^2(x) - (m^2 - 4m + 23)f(x) + 4m^2 - 16m + 76} = 8 - f(x)$ có bốn nghiệm phân biệt

Giải

Biến đổi phương trình tương đương

$$\sqrt{2f^2(x) - (m^2 - 4m + 23)f(x) + 4m^2 - 16m + 76} = 8 - f(x) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 8 \\ 2f^2(x) - (m^2 - 4m + 23)f(x) + 4m^2 - 16m + 76 = [8 - f(x)]^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 8 \\ f^2(x) - (m^2 - 4m + 7)f(x) + 4m^2 - 16m + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 8 \\ f^2(x) - (m^2 - 4m + 7)f(x) + 4(m^2 - 4m + 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 8 \\ f(x) = 4 \\ f(x) = m^2 - 4m + 3 = (m-2)^2 - 1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị phương trình $f(x) = 4$ có hai nghiệm phân biệt. Suy ra (1) có 4 nghiệm phân biệt khi $f(x) = (m-2)^2 - 1$ có 2 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình $f(x) = 4$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 < (m-2)^2 - 1 \leq 8 \\ (m-2)^2 - 1 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-2| > 2 \\ |m-2| \leq 3 \\ m \neq 2 \pm \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \\ -1 \leq m \leq 5 \\ m \neq 2 \pm \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-1; 0) \cup (4; 5] \setminus \{2 \pm \sqrt{5}\}$$

Câu 16. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$(mx-1)\sqrt{16x-28} + 2\sqrt{2x^4+6x^3+12x^2+40x+48} = (3+m^2)x^2 + 2(3-m)x + 10$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 16x-28 \geq 0 \\ 2x^4+6x^3+12x^2+40x+48 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{4} \\ (x+2)^2(2x^2-2x+12) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{4}$$

$$\text{Ta có } (mx-1)\sqrt{16x-28} + 2\sqrt{2x^4+6x^3+12x^2+40x+48} = (3+m^2)x^2 + 2(3-m)x + 10$$

$$\Leftrightarrow 2(mx-1)\sqrt{4x-7} + 2(x+2)\sqrt{2x^2-2x+12} = (3+m^2)x^2 + 2(3-m)x + 10$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{4x-7} \\ b = mx-1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = m^2x^2 + (4-2m)x - 6,$$

$$\text{và } \begin{cases} c = \sqrt{2x^2-2x+12} \\ d = x+2 \end{cases} \Rightarrow c^2 + d^2 = 3x^2 + 2x + 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (3+m^2)x^2 + 3(2-m)x + 10.$$

$$\text{Phương trình trở thành } (a-b)^2 + (c-d)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$$

$$\text{Trả biến ta được } \begin{cases} \sqrt{4x-7} = mx-1 & (1) \\ \sqrt{2x^2-2x+12} = x+2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

- Với $x = 2$. (1) $\Rightarrow 1 = 2m - 1 \Leftrightarrow m = 1$
- Với $x = 4$. (1) $\Rightarrow 3 = 4m - 1 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 17. Tìm m để phương trình $m(|x| + \sqrt{1-x^2} + 1) = 2\sqrt{x^2-x^4} + |x| + \sqrt{1-x^2} + 2 (x \in \mathbb{R})$ có nghiệm?

Giải

$$\text{Điều kiện } |x| \leq 1.$$

$$\text{Đặt } t = |x| + \sqrt{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 - x^2 + 2|x|\sqrt{1-x^2} = 1 + 2|x|\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1 \leq t.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức AM - GM ta có } 2|x|\sqrt{1-x^2} \leq x^2 + 1 - x^2 = 1 \Rightarrow t \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } 1 \leq t \leq \sqrt{2}. \text{ Khi đó } t^2 = x^2 + 1 - x^2 + 2|x|\sqrt{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow |x|\sqrt{1-x^2} = \sqrt{x^2-x^4} = \frac{t^2-1}{2}.$$

Thay vào phương trình ta được $m(t+1) = t^2 + t + 1 \Leftrightarrow \frac{t^2 + t + 1}{t+1} = m (1 \leq t \leq \sqrt{2})$.

Đặt $f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t+1}, t \in [1; \sqrt{2}]$. Lúc đó $f'(t) = \frac{2t+1}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [1; \sqrt{2}]$.

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên đoạn $[1; \sqrt{2}]$, do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$f(1) \leq m \leq f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq m \leq 2\sqrt{2} - 1.$$

Câu 18. Tìm a để phương trình $x^2 - 2ax + \sqrt{2x^2 + a^2} = |x + a|$ có đúng một nghiệm không âm?

Giải

Phương trình tương đương với $(2x^2 + a^2) + \sqrt{2x^2 + a^2} = (x + a)^2 + |x + a|$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x^2 + a^2} - |x + a|)(\sqrt{2x^2 + a^2} + |x + a| + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + a^2} = |x + a| \Leftrightarrow x^2 - 2ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2a \end{cases}$$

Phương trình có đúng một nghiệm x không âm khi và chỉ khi $\begin{cases} 2a = 0 \\ 2a \notin [0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \leq 0$.

Câu 19. Tìm a để phương trình $(x+1)^2 + \sqrt{2x(x+a+1)} = a^2 + 1 + |x+a|$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$

Giải

Phương trình tương đương với

$$(2x^2 + 2ax + 2x) + \sqrt{2x^2 + 2ax + 2x} = (x + a)^2 + |x + a|$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x^2 + 2ax + 2x} - |x + a|)(\sqrt{2x^2 + 2ax + 2x} + |x + a| + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 2ax + 2x} = |x + a| \Leftrightarrow x^2 + 2x = a^2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x$ trên $[-2; 2]$, lập bảng biến thiên ta dễ dàng chỉ ra phương trình có một

nghiệm thuộc $[-2; 2]$ khi và chỉ khi $0 < a^2 \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ -\sqrt{8} < a < \sqrt{8} \end{cases}$.

Câu 20. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

$$(2x^2 + mx + 1)\sqrt{2x^2 + mx + 1} + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x^3 + 9x^2 + 28x + 30$$

Giải

Phương trình tương đương

$$(2x^2 + mx + 1)\sqrt{2x^2 + mx + 1} + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x^3 + 9x^2 + 28x + 30$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x^2 + mx + 1})^3 + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = (x+3)^3 + (x+3)$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{2x^2 + mx + 1}) = f(x+3) \text{ với } f(t) = t^3 + t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$f(\sqrt{2x^2 + mx + 1}) = f(x+3) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x+3 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + (m-6)x - 8 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

| Các bài toán chứa tham số

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 đều lớn hơn hoặc bằng -3 . Do đó ta có

$$\begin{cases} \Delta = (m-6)^2 + 32 > 0 \\ (x_1+3)(x_2+3) \geq 0 \\ (x_1+3) + (x_2+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 + 3(x_1+x_2) + 9 \geq 0 \\ (x_1+x_2) + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 + 3(6-m) + 9 \geq 0 \\ 6-m+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{19}{3} \\ m < 12 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{19}{3}$$

Câu 21. Tìm m để phương trình $\sqrt{m+\sqrt{x}} + \sqrt{m-\sqrt{x}} = m$ có nghiệm.

Giải

Từ phương trình suy ra $m \geq 0$.

- **Trường hợp 1.** $m = 0$, phương trình trở thành $\sqrt{\sqrt{x}} + \sqrt{-\sqrt{x}} = 0$
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.
- **Trường hợp 2.** $m > 0$. Điều kiện. $\begin{cases} x \geq 0 \\ m + \sqrt{x} \geq 0 \\ m - \sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq m^2 (*)$

Trong điều kiện (*) bình phương hai vế phương trình ta được

$$\begin{aligned} 2m + 2\sqrt{m^2 - x} &= m^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 - x} = m^2 - 2m \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m \geq 0 \\ 4(m^2 - x) = m^4 - 4m^3 + 4m^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ x = \frac{1}{4}(-m^4 + 4m^3) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \geq 2 \\ 0 \leq \frac{1}{4}(-m^4 + 4m^3) \leq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m^3(4-m) \geq 0 \\ m^2(m^2 - 4m + 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4$$

Câu 22. Tìm m để phương trình $x^3 + x^2 - (m+1)x + 8 = (x-3)\sqrt{x^3 + x^2 - mx + 6}$ có nghiệm.

Giải

Điều kiện $x^3 + x^2 - mx + 6 \geq 0$. Biến đổi phương trình tương đương

$$x^3 + x^2 - mx + 6 - (x-3)\sqrt{x^3 + x^2 - mx + 6} - (x-2) = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x^3 + x^2 - mx + 6}, t \geq 0$ phương trình trở thành

$$t^2 - (x-3)t - (x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = x-2 \end{cases}$$

Vậy $t = x-2$ có $\sqrt{x^3 + x^2 - mx + 6} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^3 + 2 = (m-4)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + \frac{2}{x} = m-4 \end{cases}$

Với $x \geq 2$ ta có $x^2 + \frac{2}{x} = \left(x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x}\right) - \frac{14}{x} \geq 3\sqrt{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} - \frac{14}{2} = 5$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$. Suy ra để phương trình có nghiệm thì $m-4 \geq 5 \Leftrightarrow m \geq 9$.

Câu 23. Tìm m để phương trình $(x^2 - 2x + m)^2 - 2x^2 + 3x - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng $(x^2 - 2x + m)^2 - 2(x^2 - 2x + m) + m = x$

Đặt $a = x^2 - 2x + m$ ta có hệ
$$\begin{cases} a = x^2 - 2x + m \\ x = a^2 - 2a + m \end{cases}$$

Từ hệ phương trình có $(x-a)(x+a-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ x+a-1=0 \end{cases}$

Hay có
$$\begin{cases} x = x^2 - 2x + m \\ x + x^2 - 2x + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + 3x \\ m = -x^2 + x + 1 \end{cases}$$

Vẽ trên cùng một đồ thị các Parabol $(P_1): y = -x^2 + 3x; (P_2): y = -x^2 + x + 1$ ta có $m \leq \frac{5}{4}$

Câu 24. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} - m = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16(1)$$

Giải

Phân tích. Một câu ý tưởng đặt ẩn phụ quá lộ liễu.

Điều kiện $x \geq -1$.

Phương trình tương đương

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} - m = (\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1})^2 - 20 \Leftrightarrow -(\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1})^2 + \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} + 20 = m$$

Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}, t \geq 1$.

Phương trình trở thành $-t^2 + t + 20 = m$.

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t + 20$ với $t \geq 1$.

Ta có $f(t) = -t^2 + t + 20$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ nên $f(t) \geq f(1) \Leftrightarrow f(t) \geq 20$.

Vậy phương trình có nghiệm khi $m \geq 20$.

Câu 25. Tìm m để phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-1}$ có nghiệm?

Giải

Điều kiện $x \geq 1$.

Ta có $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-1}$.

Chia hai vế hương trình cho $\sqrt{x+1}$ ta được $3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, 0 \leq t < 1$. Phương trình trở thành $3t^2 + m = 2t \Leftrightarrow m = -3t^2 + 2t$.

Xét hàm số $f(t) = -3t^2 + 2t, 0 \leq t < 1$, lập bảng biến thiên ta được $m \in \left(-1; \frac{1}{3}\right]$.

Câu 26. Tìm m để phương trình $\sqrt{x-3} - 2\sqrt{x-4} + \sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5} = m$ có 2 nghiệm?

Giải

Đặt $t = \sqrt{x-4}, t \geq 0$. Với mỗi nghiệm $t_0 \geq 0$ cho ta đúng một nghiệm $x_0 \geq 4$.

Phương trình trở thành $m = |t-1| + |t-3|$.

Ta có
$$f(t) = |t-1| + |t-3| = \begin{cases} 4-2t, & \text{khi } 0 \leq t \leq 1 \\ 2, & \text{khi } 1 < t < 3 \\ 2t-4, & \text{khi } t \geq 3 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng chỉ ra được $m \in (2; 4]$.

Câu 27. Tìm m để phương trình $x^2 + 2(3-m)x + 1 + 4\sqrt{2x(x^2+1)} = 0$ có nghiệm?

Giải

Điều kiện xác định $x \geq 0$.

$$\text{Phương trình tương đương với } 2mx = x^2 + 6x + 1 + 4\sqrt{2x(x^2 + 1)} \quad (*)$$

Ta thấy rằng $x = 0$ không phải nghiệm của phương trình $(*)$.

$$\text{Chia hai vế của phương trình } (*) \text{ cho } x, (x > 0) \text{ ta được } 2m = 6 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 4\sqrt{2\left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2\left(x + \frac{1}{x}\right)}, \text{ theo bất đẳng thức AM - GM ta có } x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ nên } t \geq 2.$$

$$\text{Ta có phương trình } 2m = 6 + \frac{t^2}{2} + 4t \quad (1)$$

Phương trình $(*)$ có nghiệm khi phương trình (1) có nghiệm $t \geq 2$.

$$\text{Phương trình } (1) \Leftrightarrow t^2 + 8t + 12 - 4m = 0 \text{ có nghiệm } t \geq 2. \quad (2)$$

Vì $S = -8 < 0$ nên phương trình có không quá 1 nghiệm $t \geq 2$.

Để có nghiệm $t \geq 2$ thì phương trình (2) có nghiệm $t_1 \leq 2 \leq t_2$.

$$\text{Điều kiện } af(2) \leq 0 \Leftrightarrow 32 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 8$$

Nhận xét. Ngoài ra ta có thể sử dụng đạo hàm để tìm điều kiện có nghiệm của phương trình (1) .

Câu 26. Tìm m để phương trình $(x-3)(x+1) + 4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = m$ có 2 nghiệm âm phân biệt?

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 3 \\ x \leq -1 \end{cases}. \text{ Đặt } t = (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} \Rightarrow t^2 = (x-3)(x+1).$$

$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành } t^2 + 4t - m = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x < 0 \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow x \leq -1 \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow t = (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -\sqrt{(x+1)(x-3)} = -\sqrt{g(x)}; g(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 3$ trên $(-\infty; -1]$ ta dễ dàng chỉ ra $g(x) \in [0; +\infty) \Rightarrow t \in (-\infty; 0]$

Ta thấy với mỗi giá trị $t \leq 0$ sẽ cho 1 giá trị $x \leq -1$ tương ứng. Do đó, để phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn điều kiện

$$t_1 < t_2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 + m > 0 \\ t_1 t_2 = -m \geq 0 \\ t_1 + t_2 = -4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \leq 0$$

Vậy với $-4 < m \leq 0$ thì phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt.

Câu 27. Tìm m để phương trình $2x - 7 + (1+x)\sqrt{8-x} - (8-x)\sqrt{1+x} = m(\sqrt{1+x} - \sqrt{8-x})$ có nhiều hơn 1 nghiệm?

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 8$.

$$\text{Xét phương trình } 2x - 7 + (1+x)\sqrt{8-x} - (8-x)\sqrt{1+x} = m(\sqrt{1+x} - \sqrt{8-x}).$$

Ta có $x = \frac{7}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Với $x \in [-1; 8] \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\}$. Ta có phương trình tương đương với

$$2x - 7 + (\sqrt{x+1} - \sqrt{8-x})\sqrt{(1+x)(8-x)} = m(\sqrt{1+x} - \sqrt{8-x})(1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-7}{\sqrt{x+1}-\sqrt{8-x}} + \sqrt{(1+x)(8-x)} = m \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(1+x)(8-x)} = m$$

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x}$. Ta có $y = f(t) = t^2 - 2t - 8|t-3| + 3$ và $t \geq 3$.

Mặt khác $(\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x})^2 \leq (1+1)(1+x+8-x) = 2.9 \Rightarrow t \leq 3\sqrt{2}$.

Mà $x \neq \frac{7}{2}$ nên $t < 3\sqrt{2}$. Khi đó, phương trình có dạng. $t + \frac{t^2-9}{2} = m$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{t^2-9}{2}; t \in [3; 3\sqrt{2})$ ta thấy phương trình đã cho có nhiều hơn một nghiệm khi phương trình (1) có nghiệm $x \neq \frac{7}{2}$ khi phương trình (*) có nghiệm với $t \in [3; 3\sqrt{2})$. Lập bảng biến thiên ta có $3 \leq m < \frac{9+6\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28. Tìm a để phương trình $x^3 + (3-a^2)a = 3\sqrt{3x+(a^2-3)a}$ (*) có 3 nghiệm phân biệt?

Giải

Đặt $t = \sqrt[3]{3x+(a^2-3)a} \Rightarrow t^3 = 3x+(a^2-3)a$

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^3 = 3t + (a^2-3)a \\ t^3 = 3x + (a^2-3)a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x^2 + xt + t^2 + 3 = 0(VN) \end{cases}$

Với $x = t \Rightarrow x^3 = 3x + (a^2-3)a \Leftrightarrow (x^3 - a^3) - 3(x-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x^2 + ax + a^2 - 3 = 0(1) \end{cases}$

Phương trình (1) có $\Delta = 12 - 3a^2$.

Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm phân biệt khác $x = a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x \neq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 2 \\ a \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0 \text{ (do } a \in \mathbb{Z})$$

Câu 29. Tìm m để phương trình $2x + (x^2+1)\sqrt{1-x^2} = m + x^3$ có nghiệm?

Giải

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2}$ (1), phương trình đã cho trở thành $t^3 + t = 2m$ (*)

Coi (1) là phương trình ẩn x tham số t (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq x \\ 2x^2 - 2tx + t^2 - 1 = 0 \end{cases}$ (2)

Xét (2), ta có $\Delta = 2 - t^2$. Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Với $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, (2) có 2 nghiệm $x_1 = \frac{t - \sqrt{2-t^2}}{2}, x_2 = \frac{t + \sqrt{2-t^2}}{2}$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $t \geq x_1 \Leftrightarrow t \in [-1; \sqrt{2}]$.

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t \in [-1; \sqrt{2}]$.

| Các bài toán chứa tham số

Hàm số $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra phương trình (*) có nghiệm $t \in [-1; \sqrt{2}]$ khi và chỉ khi

$$f(-1) \leq 2m \leq f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Nhận xét. Ta có thể tìm điều kiện ẩn t bằng phương pháp đạo hàm.

Câu 30. Tìm tham số thực m để phương trình $m\sqrt{x^2+2} = x+m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt ?

Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Phương trình tương đương

$$m\sqrt{x^2+2} - m = x \Leftrightarrow m = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}-1} = f(x); \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+2} - 1 \right) - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2 - \sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}; \forall x \in \mathbb{R}.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$			$\sqrt{2}$		$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để hàm số có 3 nghiệm thực phân biệt thì $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

Câu 31. Với giá trị nào của a thì bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x .

$$(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 6) \geq a \quad (*)$$

Giải

Đặt $t = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1 \geq -1$ và $(*) \Leftrightarrow t(t+3) \geq a$.

Xét hàm số $f(t) = t(t+3) = t^2 + 3t$ trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 2t + 3$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(t)$				$+\infty$

$-2 \nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên, để bất phương trình có nghiệm đúng thì $a \leq \min_{[-1;+\infty)} f(t) = -2$ hay $a \in (-\infty; -2]$.

Câu 32. Tìm tham số m để bất phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq x^2 - 4x + m$ có nghiệm thực trên $[2; 3]$.

Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq 1 \Rightarrow x^2 - 4x = t^2 - 5$. Khi đó bất phương trình trở thành
 $t \geq t^2 - 5 + m \Leftrightarrow m \leq -t^2 + t + 5 = g(t), t \in [1; +\infty)$.

Ta có $g'(t) = -2t + 1; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Bảng biến thiên.

t	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$g'(t)$	+	0	-	-	-
$g(t)$			3	1	

Dựa vào bảng biến thiên, $m \leq -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33. Tìm m để phương trình $\sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2 - 30x + 9} + x^2 - x - m^2 + \frac{5}{4} = 0$ vô nghiệm?

Giải

Biến đổi phương trình tương đương

$$\sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2 - 30x + 9} + x^2 - x - m^2 + \frac{5}{4} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow |5x - 2| + |3 - 5x| + x^2 - x - m^2 + \frac{5}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow |5x - 2| + |3 - 5x| + x^2 - x + \frac{5}{4} = m^2 \quad (2)$$

$$\text{Do } \begin{cases} |5x - 2| + |3 - 5x| \geq |5x - 2 + 3 - 5x| = 1, \forall x \in \mathbb{R} & (3) \\ x^2 - x + \frac{5}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} & (4) \end{cases}.$$

Suy ra $VT = |5x - 2| + |3 - 5x| + x^2 - x + \frac{5}{4} \geq 2$, như vậy vế trái của (2) có tập giá trị là $[2; +\infty)$.

Phương trình (2) vô nghiệm khi và chỉ khi $m^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

Câu 34. Tìm m để phương trình $(x^2 - 3x - 4)\sqrt{x+7} - m(x^2 - 3x - 4 - \sqrt{x+7}) - m^2 = 0$ có nhiều nghiệm thực nhất

Giải

Điều kiện $x \geq -7$. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & (x^2 - 3x - 4)\sqrt{x+7} - m(x^2 - 3x - 4 - \sqrt{x+7}) - m^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^2 - 3x - 4 + m)(\sqrt{x+7} - m) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 + m = 0 (*) \\ \sqrt{x+7} = m \quad (**) \end{cases} \end{aligned}$$

Để phương trình có nhiều nghiệm thực nhất thì $\begin{cases} \Delta = 25 - 4m > 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < \frac{25}{4}$.

Thay các giá trị m vào $(*)$, $(**)$ kiểm tra không có nghiệm trùng nhau và thỏa mãn điều kiện $x \geq -7$.

Câu 35. Tìm m để phương trình $m\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x} = m$ có 2 nghiệm thỏa mãn bất phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2m - 2 \leq 0$

Giải

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow m(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x+1}(\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(m - \sqrt{x+1}) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sqrt{x+1}=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=m^2-1 \end{cases} (*) \text{ trong đó } m \geq 1. \end{aligned}$$

- **Trường hợp 1.** $x=1$ thỏa mãn bất phương trình đã cho tương đương

$$m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2 \Rightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

- **Trường hợp 2.** $x=m^2-1$ thỏa mãn bất phương trình đã cho tương đương

$$m^2(m^2 - 2m - 2) \leq 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 1 \leq m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 36. Tìm m để phương trình $x^2 - 2x + 2(x - \sqrt{2x+m})(\sqrt{x}+1) - m = 0$ có nghiệm duy nhất trên đoạn $[0;3]$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 2x+m \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + 2x\sqrt{x} + 2x - 2\sqrt{x(2x+m)} - 2\sqrt{2x+m} - m = 0 \\ & \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x} + x + 2x = 2x + m + 2\sqrt{x(2x+m)} + x + 2\sqrt{2x+m} \\ & \Leftrightarrow (x + \sqrt{x})^2 + 2(x + \sqrt{x}) = (\sqrt{x} + \sqrt{2x+m})^2 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{2x+m}) \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} a = x + \sqrt{x} \\ b = \sqrt{x} + \sqrt{2x+m} \end{cases}$ $a, b \geq 0$, phương trình trở thành.

$$a^2 + 2a = b^2 + 2b \Leftrightarrow (a-b)(a+b+2) = 0 \Leftrightarrow a = b, \text{ vì } a+b+2 > 0 \text{ với } a, b \geq 0.$$

Khi đó $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{2x+m} \Leftrightarrow \sqrt{2x+m} = x \Leftrightarrow x^2 - 2x = m$.

Phương đã cho có nghiệm duy nhất trên đoạn $[0;3]$ khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 2x = m$ có nghiệm duy nhất trên đoạn $[0;3]$. Xét hàm số $y = x^2 - 2x$ với $x \in [0;3]$, lập bảng biến thiên ta có phương trình

có nghiệm duy nhất trên đoạn $[0;3] \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ 0 < m \leq 3 \end{cases}$.

Câu 37. Tìm m để phương trình $\sqrt{x-2} - 4\sqrt{x^2-2x} + (5-m)\sqrt{x} = 0$ có nghiệm.

Giải

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình tương đương $\sqrt{\frac{x-2}{x}} - 4\sqrt{\frac{x-2}{x}} + 5 - m = 0$.

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-2}{x}}$ khi đó $0 \leq t = \sqrt[4]{\frac{x-2}{x}} = \sqrt[4]{1 - \frac{2}{x}} < 1$ phương trình trở thành

$$t^2 - 4t + 5 - m = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 5 = m.$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t + 5$ trên $[0; 1]$ ta dễ dàng tìm được điều kiện của m là $2 < m \leq 5$.

Câu 38. Tìm m để phương trình $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + 4\sqrt{x-6\sqrt{x-9}} = \frac{x+2m}{2}$ có ba nghiệm.

Giải

Phương trình đã cho tương đương $\sqrt{x-9} + 3 + 4|\sqrt{x-9} - 3| = \frac{x+2m}{2}$.

Đặt $t = \sqrt{x-9} (t \geq 0)$ ta thu được phương trình $t^2 - 2t - 8|t-3| + 3 = -2m (t \geq 0)$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f(t) = t^2 - 2t - 8|t-3| + 3$ và $y = -2m (t \geq 0)$.

$$\text{Ta có } f(t) = \begin{cases} t^2 - 10t + 27; & (t \geq 3) \\ t^2 + 6t - 21; & (0 \leq t < 3) \end{cases}$$

Vẽ bảng biến thiên ta suy ra phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$2 < -2m < 6 \Leftrightarrow -3 < m < -1$$

Câu 39. Tìm m để phương trình $\frac{3mx+1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = \frac{2x+5m+3}{\sqrt{x+1}}$ có nghiệm.

Giải

$$\text{Xét phương trình } \frac{3mx+1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = \frac{2x+5m+3}{\sqrt{x+1}} \quad (1)$$

Điều kiện $x > -1$. Phương trình tương đương

$$3mx+1+x+1=2x+5m+3 \Leftrightarrow (3m-1)x=5m+1 \quad (2)$$

Phương trình (1) vô nghiệm khi phương trình (2) vô nghiệm hoặc phương trình (2) có nghiệm duy

$$\text{nhất nhỏ hơn bằng } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1=0 \\ 5m+1 \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 3m-1 \neq 0 \\ \frac{5m+1}{3m-1} \leq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{3} \text{ hoặc } \begin{cases} m \neq \frac{1}{3} \\ \frac{8m}{3m-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3} \text{ hoặc } \begin{cases} m \neq \frac{1}{3} \\ 0 \leq m < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{3} \text{ hoặc } 0 \leq m < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{3}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi $m < 0$ hoặc $m > \frac{1}{3}$.

Câu 40. Tìm m để phương trình $\sqrt{m+x} - \sqrt{\frac{m^2}{m+x}} = \sqrt{2m+x}$ có đúng 1 nghiệm nhỏ hơn 10?

Giải

| Các bài toán chứa tham số

Phương trình tương đương
$$\begin{cases} m+x-|m|=\sqrt{2m+x}\cdot\sqrt{m+x} \\ m+x>0 \end{cases} \quad (I)$$

- Xét $m=0$. Ta có $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} \\ x>0 \end{cases}$ mọi $x>0$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

- Xét $m>0$. Ta có $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2m+x}\cdot\sqrt{m+x} \\ m+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=(2m+x)(m+x) \\ x\geq 0 \\ m+x>0 \end{cases}$

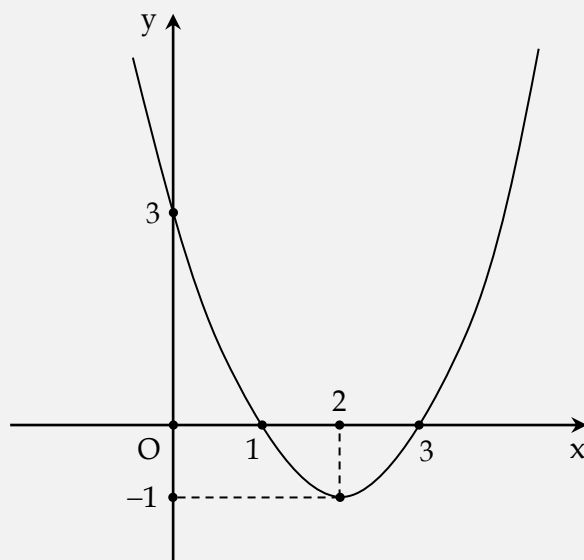
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2m}{3}<0 \\ x\geq 0 \\ m+x>0 \end{cases} \quad \text{vô nghiệm.}$$

- Xét $m<0$. Ta có $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+x=\sqrt{2m+x}\cdot\sqrt{m+x} \\ m+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+x)^2=(2m+x)(m+x) \\ m+x>0 \\ 2m+x\geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2m \\ 2m+x\geq 0 \Leftrightarrow x=-2m \\ m+x>0 \end{cases}$$

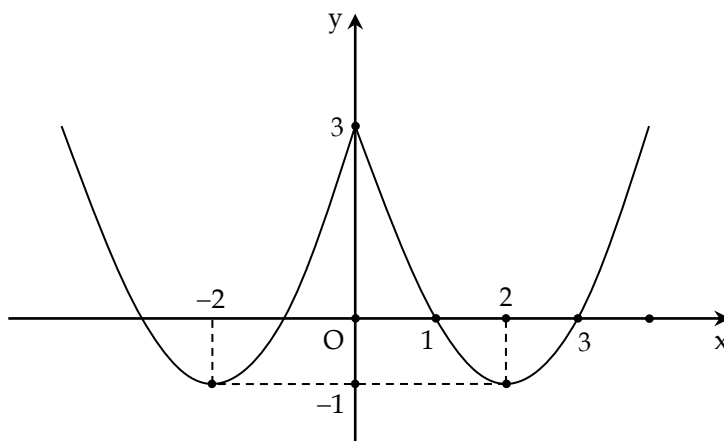
Vì $x=-2m<10 \Leftrightarrow m>-5$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới. Tìm m để phương trình $\sqrt{f(|x|)+1}=2m+3-2f(|x|)$ có bốn nghiệm phân biệt



Giải

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ta có đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ như hình vẽ.



Suy ra $f(|x|) \geq -1$

Đặt $t = \sqrt{f(|x|) + 1} \geq 0 \Rightarrow f(|x|) = t^2 - 1$

Suy ra cứ 1 giá trị của $f(|x|)$ thỏa mãn $-1 < f(|x|) < 3$ sẽ sinh ra 4 giá trị của x .

Hay cứ 1 giá trị của t thỏa mãn $0 < t = \sqrt{f(|x|) + 1} < 2$ sẽ sinh ra 4 giá trị của x .

Phương trình trở thành $\begin{cases} t \geq 0 \\ t = 2m + 3 - 2(t^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 2t^2 + t - 5 = 2m (*) \end{cases}$

Đặt hàm số $y = g(t) = 2t^2 + t - 5$ và có bảng biến thiên

t	0	2
$g(t)$	-5	5

Để phương trình $\sqrt{f(|x|) + 1} = 2m + 3 - 2f(|x|)$ có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình (*) có 1

ng nghiệm $t_1 \in (0; 2) \Rightarrow 0 < t_1 < 2 \Rightarrow -5 < 2m < 5 \Rightarrow \frac{-5}{2} < m < \frac{5}{2}$.

Câu 42. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực dương?

$$\frac{mx\sqrt{x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 1}}{(x+1)^2} = x^2 - x + 1$$

Giải

Điều kiện $x \neq -1$

Để ý thấy $x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 1 = x^2(x^2 + x + 1) + 4x^2 + x + 1 > 0$, $x^2 - x + 1 > 0$, $(x+1)^2 > 0$ nên ta dễ dàng

suy ra $x > 0$

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \frac{mx\sqrt{x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 1}}{(x+1)^2} &= x^2 - x + 1 \Leftrightarrow \frac{mx\sqrt{x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 1}}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - x + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{m\sqrt{x^2 + x + 5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x + 2 + \frac{1}{x}} &= x - 1 + \frac{1}{x}, \text{ do } x > 0 \Leftrightarrow \frac{m\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + x + \frac{1}{x} + 3}}{x + \frac{1}{x} + 2} = x + \frac{1}{x} - 1 \end{aligned}$$

| Các bài toán chứa tham số

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \geq 2$. Ta có $\Leftrightarrow \frac{m\sqrt{t^2+t+3}}{t+2} = t-1 \Leftrightarrow m\sqrt{t^2+t+3} = t^2+t-2$

Đặt $u = \sqrt{t^2+t+3}, u \geq 3$

Phương trình trở thành $u^2 - mu - 5 = 0 (*)$

Phương trình đầu có nghiệm thỏa mãn đề bài khi phương trình $(*)$ có nghiệm $u \geq 3$

Vì ta có $a.c = -5 < 0$ nên $(*)$ luôn có hai nghiệm trái dấu u_1, u_2

$$\Rightarrow u_1 < 3 \leq u_2 \Leftrightarrow (u_1 - 3)(u_2 - 3) \leq 0 \Leftrightarrow u_1 u_2 - 3(u_1 + u_2) + 9 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -5 - 3m + 9 \leq 0 \Rightarrow m \geq \frac{4}{3} \Rightarrow a = 4, b = 3 \Rightarrow a + b = 7$$

Câu 43. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm.

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$$

Giải

Điều kiện $0 \leq x \leq 4 \Rightarrow \sqrt{5-x} - \sqrt{4-x} > 0$.

Phương trình tương đương

$$(x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x}) = (\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x})m$$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x}) = (5-x-4+x)m$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x}) = m \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x})$ trên đoạn $[0; 4]$.

Ta có $f'(x) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x+12}}\right)(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x}) + (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})\left(\frac{-1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}}\right)$

$$f'(x) = (\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x})\left[\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x+12}} + \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}}{2\sqrt{5-x}\sqrt{4-x}}\right] > 0, \forall x \in (0; 4).$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } [0; 4] \Rightarrow \begin{cases} \min_{[0; 4]} f(x) = f(0) = 2\sqrt{3}(\sqrt{5} - 2) \\ \max_{[0; 4]} f(x) = f(4) = 12 \end{cases}.$$

Phương trình đầu có nghiệm $\Leftrightarrow \min_{[0; 4]} f(x) \leq m \leq \max_{[0; 4]} f(x) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(\sqrt{5} - 2) \leq m \leq 12$.

Câu 44. Tìm tham số m để phương trình $(4m-3)\sqrt{x+3} + (3m-4)\sqrt{1-x} + m-1 = 0$ có nghiệm thực

Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Hàm số xác định khi. $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \text{ hay } x \in [-3; 1].$

Nhận thấy $(\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x+3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-x}}{2}\right)^2 = 1$.

Giúp ta liên tưởng công thức lượng giác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Do đó, ta đặt $\frac{\sqrt{x+3}}{2} = \sin \alpha$ và $\frac{\sqrt{1-x}}{2} = \cos \alpha$.

Do $x \in [-3; 1]$ nên $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó phương trình trở thành

$$2(4m-3)\sin\alpha + 2(3m-4)\cos\alpha + m-1=0, \forall \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad (*)$$

Đặt $t = \tan \frac{\alpha}{2}$, $t \in [0;1] \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Lúc đó (*) trở thành $(4m-3)\frac{4t}{1+t^2} + (3m-4)\frac{2-2t^2}{1+t^2} + m-1=0, \forall t \in [0;1]$.

$$\Leftrightarrow \frac{-5mt^2 + 16mt + 7m + 7t^2 - 12t - 9}{1+t^2} = 0, \forall t \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{7t^2 - 12t - 9}{5t^2 - 16t - 7} = g(t), \forall t \in [0;1]$$

Ta có $g'(t) = \frac{-52t^2 - 8t - 60}{(5t^2 - 16t - 7)^2} < 0, \forall t \in [0;1]$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(t)$			-	
$g(t)$		$\frac{9}{7}$	$\frac{7}{9}$	

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm thực thì $\frac{7}{9} \leq m \leq \frac{9}{7}$.

Câu 45. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm thực phân biệt $\sqrt{2x^2 + mx - 3} = x + 1$

Giải

Phương trình tương đương $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x^2 + mx - 3 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 + (m-2)x - 4 = 0 \quad (*) \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi (*) có 2 nghiệm phân biệt thỏa $1 \leq x_1 \leq x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(-1) \geq 0; \frac{S}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Câu 46. Tìm m để phương trình $2\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+m}}} = m$ có các nghiệm đều dương

Giải

Ta chỉ cần xét trường hợp $x > 0$ và $m > 0$. Khi đó các biểu thức về trái đều xác định.

Đặt $y = 2\sqrt{x+2\sqrt{x+m}}$ và $z = 2\sqrt{x+m} \Rightarrow y, z > 0$

Ta có hệ phương trình.
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+y} = m \\ 2\sqrt{x+z} = y \\ 2\sqrt{x+m} = z \end{cases}$$

| Các bài toán chứa tham số

Không mất tính tổng quát, giả sử $m \geq y \geq z$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+z} \leq 2\sqrt{x+y} \leq 2\sqrt{x+m} \Rightarrow y \leq m \leq z \Rightarrow m = y = z$$

Thay $m = y = z$ vào hệ trên ta được $2\sqrt{x+m} = m \Leftrightarrow 4x + 4m = m^2 \Leftrightarrow x = \frac{m^2 - 4m}{4}$

Để có $x > 0 \Rightarrow m^2 - 4m > 0 \Rightarrow m > 4$

Câu 57. Tìm m để phương trình sau có nghiệm nguyên

$$\sqrt{m + \sqrt{m^2 - x^2}} \cdot \left(\sqrt{(m-x)^3} + \sqrt{(m+x)^3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (2m - \sqrt{m^2 - x^2})$$

Giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq -m \\ x \leq m \\ m + \sqrt{m^2 - x^2} \geq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & \sqrt{2m + 2\sqrt{m^2 - x^2}} \cdot (\sqrt{m-x} + \sqrt{m+x}) (2m - \sqrt{m^2 - x^2}) = (2m - \sqrt{m^2 - x^2}) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - \sqrt{m^2 - x^2} = 0 & (1) \\ \sqrt{2m + 2\sqrt{m^2 - x^2}} \cdot (\sqrt{m-x} + \sqrt{m+x}) = 1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - x^2} = 2m \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m^2 - x^2 = 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ x^2 = -3m^2 \end{cases}$

Do x nguyên nên ta suy ra được $x = 0; m = 0$ thỏa mãn PT đã cho

Phương trình (2) lúc này tương đương

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sqrt{m-x} + \sqrt{m+x})^2} (\sqrt{m-x} + \sqrt{m+x}) = 1 \Leftrightarrow |\sqrt{m-x} + \sqrt{m+x}| (\sqrt{m-x} + \sqrt{m+x}) = 1 \\ & (\sqrt{m-x} + \sqrt{m+x})^2 = 1 \Leftrightarrow 2m + 2\sqrt{m^2 - x^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \geq 0 \\ 4(m^2 - x^2) = (1 - 2m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ x^2 = m - \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Do x nguyên nên ta suy ra được $x = 0; m = \frac{1}{4}$ - thỏa mãn.

Câu 48. Tìm m để phương trình $x + m + (1-x)\sqrt{2x+m} = 0$ có 2 nghiệm phân biệt?

Giải

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & x + m + (1-x)\sqrt{2x+m} = 0 \\ & \Leftrightarrow 2x + m + \sqrt{2x+m} - x\sqrt{2x+m} - x = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{2x+m} (\sqrt{2x+m} + 1) - x (\sqrt{2x+m} + 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{2x+m} + 1) (\sqrt{2x+m} - x) = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{2x+m} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x = m (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x \geq 0$. Suy ra $m \in (-1; 0]$.

Câu 49. Tìm m để phương trình $x^2 - 2x - \sqrt{x+m} = m$ có nghiệm duy nhất ?

Giải

Gọi phương trình đã cho là (1).

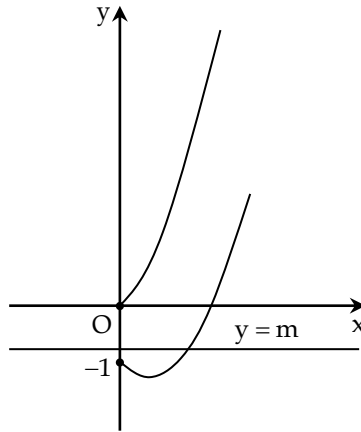
Đặt $\sqrt{x+m} = t$, điều kiện $t \geq 0$, phương trình (1) trở thành.

$$m^2 + (1 - 2t^2)m + t^4 - 2t^2 - t = 0 \quad (2).$$

Giải (2) theo m ta được $\begin{cases} m = t^2 + t \\ m = t^2 - t - 1 \end{cases} \quad (3).$

Ta thấy với mỗi giá trị $t \geq 0$, cho ta duy nhất 1 giá trị x , do đó (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hệ (3) có nghiệm duy nhất $t \in [0; +\infty)$.

Vẽ 2 đồ thị hàm số $y = t^2 + t$ và $y = t^2 - t - 1$ với $t \geq 0$ trên cùng 1 hệ trục tọa độ.



Căn cứ đồ thị ta có hệ (3) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ giao với cả hai nhánh đồ thị trên tại một điểm duy nhất, suy ra $m = -\frac{5}{4}$ hoặc $-1 < m < 0$.

Câu 50. Tìm m để phương trình $(x - 2\sqrt{x-m} - 2m)(x - 2\sqrt{x-m} - 3) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt ?

Giải

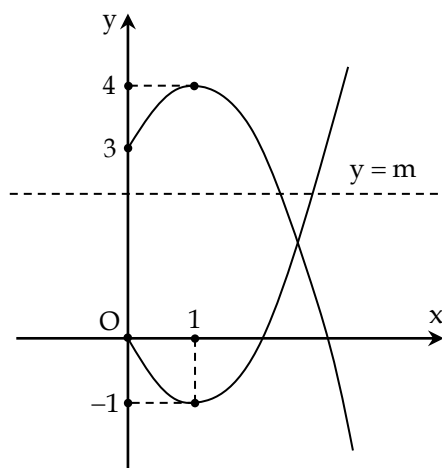
Gọi phương trình đã cho là (1).

Đặt $\sqrt{x-m} = t$, điều kiện $t \geq 0$, phương trình (1) trở thành.

$$(t^2 - 2t - m)(t^2 - 2t - 3 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = t^2 - 2t \\ m = -t^2 + 2t + 3 \end{cases} \quad (2).$$

Ta thấy với mỗi giá trị $t \geq 0$, cho ta duy nhất một giá trị x , do đó (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hệ (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Vẽ hai đồ thị hàm số $y = t^2 - 2t$ và $y = -t^2 + 2t + 3$ với $t \geq 0$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Căn cứ đồ thị ta có hệ (2) đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ giao với cả hai nhánh đồ thị trên tại 2 điểm phân biệt. Suy ra $m = -1$, $m = 4$ hoặc $m \in (0; 3) \setminus \left\{ \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \right\}$.

Câu 51. Tìm m để phương trình $\sqrt[3]{x-m-3} + \sqrt[3]{x-3m-1} = \sqrt[3]{2x-4m-4}$ (*) có đúng 1 nghiệm thuộc đoạn $[-14; 22]$?

Giải

Đặt $a = \sqrt[3]{x-m-3}$, $b = \sqrt[3]{x-3m-1}$ phương trình trở thành

$$a + b = \sqrt[3]{a^3 + b^3} \Leftrightarrow (a + b)^3 = a^3 + b^3 \Leftrightarrow ab(a + b) = 0.$$

$$\text{Khi đó phương trình (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} x - m - 3 = 0 \\ x - 3m - 1 = 0 \\ x - m - 3 = -x + 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 3 = \alpha \\ x = 3m + 1 = \beta \\ x = 2m + 2 = \gamma \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \alpha = \beta \Leftrightarrow m = 1 \\ \alpha = \gamma \Leftrightarrow m = 1 \\ -14 \leq \alpha \leq 22 \Leftrightarrow -17 \leq m \leq 19 \\ -14 \leq \beta \leq 22 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 7 \\ -14 \leq \gamma \leq 22 \Leftrightarrow -8 \leq m \leq 10 \end{cases}$$

Biểu diễn trên trục số ta thấy rằng phương trình có đúng một nghiệm thuộc $[-14; 22]$ khi và chỉ khi $m \in [-17; -8) \cup \{1\} \cup (10; 19]$ (Khi $m = 1$ thì 3 nghiệm trùng nhau).

Câu 52. Tìm m để phương trình $\frac{(x^3 + 7x + m)^3}{1000} = 3x - m$ có nghiệm dương?

Giải

Phương trình đã cho tương đương $x^3 + 7x + m = 10\sqrt[3]{3x - m} \Leftrightarrow x^3 + 10x = 3x - m + 10\sqrt[3]{3x - m}$.

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{3x - m} = y \Rightarrow x^3 + 10x = y^3 + 10y \Leftrightarrow (x - y)(x^2 - xy + y^2 + 10) = 0.$$

Để ý rằng

- $x^2 - xy + y^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -10 \Rightarrow \text{VN}.$
- $x = y \Rightarrow x = \sqrt[3]{3x - m} \Leftrightarrow x^3 = 3x - m \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 2 - m$
 $\Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 2 - m \Rightarrow 2 - m \geq 0 \Rightarrow m \leq 2.$

Kết hợp $m > -2019 \Rightarrow -2019 < m \leq 2$

Câu 53. Tìm m để phương trình $x^2 + 2x(m-1-\sqrt{x+m}) + 8 = 2m\sqrt{x+m} - 2m^2$ có nghiệm ?

Giải

Điều kiện $x \geq -m$

Đặt $t = \sqrt{x+m} \rightarrow x = t^2 - m$. Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (t^2 - m)^2 + 2(t^2 - m)(m-1-t) + 8 &= 2mt - 2m^2 \Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 8 = -m^2 - 2m \\ \Leftrightarrow 2(t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 8) &= 2(-m^2 - 2m) \Leftrightarrow (t^4 - 4t^3 + 4t^2) + (t^4 - 8t^2 + 16) = 2(-m^2 - 2m) \\ \Leftrightarrow (t^2 - 2t)^2 + (t^2 - 4)^2 &= 2(-m^2 - 2m) (*) \end{aligned}$$

Để (*) có nghiệm thì $2(-m^2 - 2m) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$.

Câu 54. Tìm m để phương trình $\sqrt{m+3}\sqrt{m+3(\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x})} = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}$ có nghiệm

Giải

Điều kiện. $0 \leq x \leq 5$.

Đặt $a = \sqrt{m+3(\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x})}; b = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}, (a \geq 0, b \geq 0)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{m+3a} = b \\ \sqrt{m+3b} = a \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m+3a = b^2 \\ m+3b = a^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow 3(a-b) = b^2 - a^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a+b+3 = 0 \end{cases} (L) \end{aligned}$$

Với $a = b \Rightarrow \sqrt{m+3b} = b \Leftrightarrow m = b^2 - 3b = f(b) (*)$

- $b = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} \Rightarrow b^2 = x + 10 + 2\sqrt{3x(10-2x)} \geq 10 \Rightarrow b \geq \sqrt{10} \quad (1)$
- $b = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} \Rightarrow b^2 = (\sqrt{3x} + \sqrt{2(5-x)})^2 \leq (3+2)(x+5-x) = 25 \Rightarrow b \leq 5 \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra $b \in [\sqrt{10}; 5]$

Xét hàm số $f(b) = b^2 - 3b$ trên đoạn $[\sqrt{10}; 5]$ ta có

$$\min_{[\sqrt{10}; 5]} f(b) = f(\sqrt{10}) = 10 - 3\sqrt{10}, \max_{[\sqrt{10}; 5]} f(b) = f(5) = 10$$

Phương trình (*) có nghiệm khi $\min_{[\sqrt{10}; 5]} f(b) \leq m \leq \max_{[\sqrt{10}; 5]} f(b) \Rightarrow 10 - 3\sqrt{10} \leq m \leq 10$.

Câu 55. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{m^3}(x-1)^3 + \frac{\sqrt{m}}{(x-1)^2} \leq \sqrt[4]{m^3} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|.$$

Giải

Gọi x_0 là nghiệm của bất phương trình, ta có $\sqrt{m^3}(x_0-1)^3 + \frac{\sqrt{m}}{(x_0-1)^2} \leq \sqrt[4]{m^3} \left| \sin \frac{\pi x_0}{2} \right|$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $\sqrt{m^3}(x_0-1)^3 + \frac{\sqrt{m}}{(x_0-1)^2} \geq 2m$.

Do đó $2m \leq \sqrt[4]{m^3} \left| \sin \frac{\pi x_0}{2} \right| \leq \sqrt[4]{m^3} \Rightarrow m \leq \frac{1}{16}$.

Khi m đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{16}$ thì $\frac{(x-1)^2}{64} + \frac{1}{4(x-1)^2} \leq \frac{1}{8} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|$.

Dễ thấy bất phương trình này có nghiệm $x = 3$.

Vậy $m = \frac{1}{16}$ là giá trị cần tìm.

Câu 56. Giải phương trình $\frac{y^3 + m^3}{(y+m)^3} + \frac{y^3 + n^3}{(y+n)^3} + \frac{y^3 + p^3}{(y+p)^3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{y-m}{y+m} \cdot \frac{y-n}{y+n} \cdot \frac{y-p}{y+p} = 0$.

Trong đó m, n, p là tham số cho trước.

Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia 1975

Giải

Điều kiện $x \neq -m, y \neq -n, z \neq -p$.

Xét biểu thức $\frac{y^3 + a^3}{(y+a)^3} = \frac{(y+a)(y^2 - ya + a^2)}{(y+a)^3} = \frac{y^2 - ya + a^2}{(y+a)^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{y-a}{y+a} \right)^2$; $y \neq -a, a$ tùy ý.

Phương trình đã cho được viết dưới dạng

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{y-m}{y+m} \right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{y-n}{y+n} \right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{y-p}{y+p} \right)^2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{y-m}{y+m} \cdot \frac{y-n}{y+n} \cdot \frac{y-p}{y+p} = 0 \quad (1)$$

Đặt $u = \frac{y-m}{y+m}, v = \frac{y-n}{y+n}, w = \frac{y-p}{y+p}$ phương trình (1) thành

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} u^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} v^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} w^2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} uvw = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (w + uv)^2 = (1 - u^2)(1 - v^2) \quad (2)$$

Thay các giá trị của u, v, w vào (2) ta được

- $(w + uv)^2 = \frac{4[y^3 + (mn - mp - np)]^2}{(y+m)^2 (y+n)^2 (y+p)^2}$
- $1 - u^2 = \frac{4my}{(y+m)^2}$
- $1 - v^2 = \frac{4ny}{(y+n)^2}$

Sau khi biến đổi ta có $y^2 \left[(y^2 + mn - mp - np)^2 - 4mn(y+p)^2 \right] = 0$

$$\Leftrightarrow y^2 \left[y^2 + mn - mp - np + 2(y+p)\sqrt{mn} \right] \left[y^2 + mn - mp - np - 2(y+p)\sqrt{mn} \right]$$

Phương trình này có dạng $y^2 \cdot A \cdot B = 0$. Xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** $y^2 = 0$ ta được $y = 0$.
- **Trường hợp 2.** $A = 0$. Sau khi biến đổi ta được $y + \sqrt{mn} = \pm (\sqrt{mp} - \sqrt{np})$.

Từ đó ta có
$$\begin{cases} y = \sqrt{mp} - \sqrt{np} - \sqrt{mn} \\ y = \sqrt{np} - \sqrt{mp} - \sqrt{mn} \end{cases}$$

- **Trường hợp 3.** $B = 0$. Sau khi biến đổi ta được $y - \sqrt{mn} = \pm (\sqrt{mp} + \sqrt{np})$

Từ đó ta có
$$\begin{cases} y = \sqrt{mn} + \sqrt{mp} + \sqrt{np} \\ y = \sqrt{mn} - \sqrt{mp} - \sqrt{np} \end{cases}$$

Câu 57. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm

$$\left| \frac{2\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^2 - \left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right) - 7}{3\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right) + m - 12} \right| > 2$$

Giải

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left| \frac{2\left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right)^2 - \left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right) + 1}{3\left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right) + m} \right| > 2.$$

Đặt $t = \sin x - \frac{1}{\sin x}$ ($x \neq k\pi$, $t \in \mathbb{R}$).

Bài toán tương đương với việc tìm m để bất phương trình sau đúng với mọi t

$$\left| \frac{2t^2 - t + 1}{3t^2 + t + m} \right| \leq 2.$$

Vì mẫu thức xác định với mọi t nên $\Delta = 1 - 12t < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{12}$.

Khi đó $3t^2 + t + m > 0 \quad \forall t$.

Vì $2t^2 - t + 1 > 0 \quad \forall t$ nên $\frac{2t^2 - t + 1}{3t^2 + t + m} \leq 2 \quad \forall t \Leftrightarrow 4t^2 + 3t + 2m - 1 \geq 0 \quad \forall t$

$$\Leftrightarrow \Delta = 9 - 16(2m - 1) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{35}{12}.$$

Vậy $m \geq \frac{35}{12}$ là giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 58. Cho a, b, c là các số thực khác không, tìm số nghiệm tối đa của phương trình

$$(ax^3 + bx + c)(bx^3 + cx + a)(cx^3 + ax + b) = 0$$

Giải

Đặt $f_1(x) = ax^3 + bx + c, f_2(x) = bx^3 + cx + a, f_3(x) = cx^3 + ax + b$

Giả sử rằng a_1, a_2, a_3 là các nghiệm của $f_1(x)$, và b_1, b_2, b_3 là các nghiệm của $f_2(x)$, c_1, c_2, c_3 là các nghiệm của $f_3(x)$. Nếu tất các nghiệm đều là số thực nên $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0, b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 > 0$ và $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 > 0$.

Nhưng theo định lý Viet ta có

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = -2 \cdot \frac{b}{a}, b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = -2 \cdot \frac{c}{b}, c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = -2 \cdot \frac{a}{c}$$

cho nên $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) = \left(-2 \cdot \frac{b}{a}\right)\left(-2 \cdot \frac{c}{b}\right)\left(-2 \cdot \frac{a}{c}\right) = -8$ mâu thuẫn

Do đó phương trình đã cho không thể có 9 nghiệm thực.

Phương trình trên cũng không thể có số nghiệm thực do một phương trình bậc ba không thể có hai nghiệm thực và một nghiệm phức được cho nên phương trình chỉ có thể có tối đa 7 nghiệm thực mà thôi. Ta lấy ví dụ cho khẳng định đúng phương trình có 7 nghiệm thực. Chọn bộ $(a, b, c) = (1, -6, 4)$

- Phương trình $f_1(x) = 0$ có ba nghiệm $x = 2, x = -1 \pm \sqrt{3}$
- Phương trình $f_2(x) = bx^3 + cx + a = -6x^3 + 4x + 1$ có ba nghiệm thực do

$$(-1)=3>0, f_2\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}<0, f_2(0)=1>0, f_2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{47}{32}>0 \text{ và } f_2(1)=-1<0.$$

- Phương trình $f_3(x)=cx^3+ax+b=4x^3+x-6$ có duy nhất một nghiệm do hàm số

$$f_3(x)=4x^3+x-6 \cos f_3'(x)=12x^2+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Nên $f_3(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nghiệm đó thuộc khoảng $(1;2)$ do $f_3(1)=-1<0$ và $f_3(2)=28>0$.

Các nghiệm của $f_2(x)=0$ và $f_3(x)=0$ thuộc các khoảng $\left(-1;-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2};0\right), \left(\frac{3}{4};1\right)$ và $(1;2)$ tất cả các

nghiệm này phân biệt và không bằng 2 hoặc $-1 \pm \sqrt{3}$.

Vậy phương trình có 7 nghiệm.

Câu 59. Cho hai hàm số $y=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}$ và $y=|x+1|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt?

Giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}=|x+1|-x+m$ (*)

Điều kiện $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -2; -3; -4\}$.

Ta có (*) $\Leftrightarrow m=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}+x-|x+1|$.

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của hai đồ thị

$$y=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}+x-|x+1| \text{ và } y=m.$$

Ta có $y'=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}+1-\frac{x+1}{|x+1|}$

$$y'=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}+\frac{|x+1|-(x+1)}{|x+1|}>0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -2; -3; -4\}.$$

, vì $|x+1|>x+1 \forall x \neq -1 \Rightarrow |x+1|-(x+1)>0 \forall x \neq -1$.

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng chỉ ra rằng để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m \geq 3$.

Câu 60. Cho các số thực a, b, c thỏa $a > b > c > 0$. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm duy nhất $\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}+\frac{a-b}{\sqrt{x-c}}=0$.

Giải

Điều kiện $x \geq a$. Phương trình tương đương

$$\frac{b-a}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}+\frac{a-b}{\sqrt{x-c}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}-\sqrt{x-c}=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-a}{x-c}}+\sqrt{\frac{x-b}{x-c}}-1=0$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{\frac{x-a}{x-c}}+\sqrt{\frac{x-b}{x-c}}-1, x \geq a$

Ta có f là hàm đồng biến và $f(a)=\sqrt{\frac{a-b}{a-c}}-1<0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=1>0$

Nên phương trình $f(x)=0$ có duy nhất nghiệm. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 61. Tìm tất cả các số thực a, b, c sao cho

$$|ax + by + cz| + |bx + cy + az| + |cx + ay + bz| = |x| + |y| + |z|, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Giải

Cho $x = y = z = 1$ vào đẳng thức trên, ta thu được $|a + b + c| = 1$.

Cho $x = 1$ và $y = z = 0$ ta được $|a| + |b| + |c| = 1$.

Từ $|a + b + c| = |a| + |b| + |c|$ ta suy ra rằng a, b và c cùng dấu.

Bây giờ cho $x = 1, y = -1$ và $z = 0$ ta được $|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2$.

Nhưng $|a - b| \leq |a| + |b|$, với dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a và b trái dấu hoặc một trong hai bằng 0.

Nên ta có $2 = |a - b| + |b - c| + |c - a| \leq 2(|a| + |b| + |c|) = 2$.

Như vậy trong mỗi cặp $(a; b), (b; c), (c; a)$, một trong các số phải bằng 0 và ta suy ra rằng các bộ ba $(a; b; c)$ thỏa mãn là $(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1), (-1; 0; 0), (0; -1; 0), (0; 0; -1)$.

Câu 62. Với những giá trị nào của p thì phương trình $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ có nghiệm thực? Hãy tìm các nghiệm đó.

IMO Problem 1963

Giải

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2 - p} = x - 2\sqrt{x^2 - 1}$ (1)

Để VT(1) có nghĩa thì $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1$. Hơn nữa $x - 2\sqrt{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2\sqrt{x^2 - 1}$ (2)

Từ (2) ta thấy $x \geq 0$. Bình phương hai vế của (2) ta được

$$x^2 \geq 4(x^2 - 1) \Leftrightarrow 4 \geq 3x^2 \Leftrightarrow 2 \geq \sqrt{3}x.$$

Như vậy để VT(1) có nghĩa và không âm ta phải có $1 \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. (3)

Xét các trường hợp sau đây

- Nếu $p < 0$. Khi đó VT(1) luôn có nghĩa. Bình phương hai vế của (1) ta được

$$x^2 - p = x^2 - 4x\sqrt{x^2 - 1} + 4(x^2 - 1) \Leftrightarrow -p = 4x^2 - 4 - 4x\sqrt{x^2 - 1}$$
 (4)

Có thể viết (4) dưới dạng $-p = 4\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x^2 - 1} - x)$. Vì $x \geq 1$ theo điều kiện (3) nên

$$x = |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{(x^2 - 1) + 1}.$$

Khi đó $-p = 4\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{(x^2 - 1) + 1})$ (5)

Vì VT(5) = $-p > 0$; VP(5) ≤ 0 nên (5) vô nghiệm. Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

- Nếu $p \geq 0$. Để VT(1) có nghĩa ta phải có điều kiện $x^2 \geq p \Leftrightarrow x \geq \sqrt{p}$ (6)

Như vậy, nghiệm của (1) phải thỏa mãn đồng thời các điều kiện (3) và (6). Thành thử

- Nếu $\sqrt{p} > \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow p > \frac{4}{3}$ thì (3) và (6) mâu thuẫn nhau. Do đó (1) vô nghiệm.
- Nếu $\sqrt{p} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow p \leq \frac{4}{3}$ thì từ (3) và (6) ta có được $\frac{2}{\sqrt{3}} \geq x \geq \max\{1; \sqrt{p}\}$ (7)

Với điều kiện (7) ta có thể biến đổi phương trình (1) và đi đến phương trình (4).

Viết phương trình ấy dưới dạng

$$4x\sqrt{x^2 - 1} = 4(x^2 - 1) + p \Leftrightarrow 16x^2(x^2 - 1) = 16(x^2 - 1)^2 + 8p(x^2 - 1) + p^2$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2 - 1) - 8p(x^2 - 1) - p^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{p^2}{8(2-p)} \Leftrightarrow x^2 = \frac{(4-p)^2}{8(2-p)} \quad (8)$$

Theo (7), $\frac{2}{\sqrt{3}} \geq x \geq p$ nên $4-p > 0$ và $2-p > 0$. Do đó $x = \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$.

Để hoàn thành phép chứng minh trong trường hợp này, ta phải chứng tỏ rằng giá trị của x đã tìm được thỏa mãn điều kiện (7) hay $\frac{4}{3} \geq x^2 \geq \max\{1; p\}$.

$$\begin{aligned} \text{Với } \frac{4}{3} \geq x^2 &\Leftrightarrow \frac{4}{3} \geq \frac{p^2}{8(2-p)} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{p^2}{8(2-p)} \\ &\Leftrightarrow 8(2-p) \geq 3p^2 \Leftrightarrow 3p^2 + 8p - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq p \leq \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Kết hợp với $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$ ta được $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$.

Từ (8) ta suy ra rằng $x^2 \geq 1$. Cuối cùng ta kiểm tra điều kiện $x^2 \geq p$, tức là

$$\frac{(4-p)^2}{8(2-p)} \geq p \Leftrightarrow (3p-4)^2 \geq 0$$

thỏa điều kiện (9) và do đó điều kiện (7) được thỏa mãn.

Kết luận

(i). Nếu $p < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

(ii). Nếu $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$ thì phương trình có một nghiệm xác định bởi công thức $x = \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$.

(iii). Nếu $p > \frac{4}{3}$ thì phương trình vô nghiệm.

Câu 63. Chứng minh rằng $\forall m \in \mathbb{R}$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x^3 y = m^2 + y^4 \\ x^2 y + 2xy^2 = \pi^2 - y^3 \end{cases}$.

Giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} y(x^3 - y^3) = m^2 \\ y(x+y)^2 = \pi^2 \end{cases} \quad (*)$

Từ phương trình thứ hai của hệ (*) suy ra $y > 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ (*) suy ra $x^3 - y^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq y > 0$.

Do đó $x > 0; y > 0$. Cũng từ phương trình thứ hai của hệ (*) ta suy ra $x = \frac{\pi}{\sqrt{y}} - y$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ (*) ta được $y \left[\left(\frac{\pi}{\sqrt{y}} - y \right)^3 - y^3 \right] = m^2$.

Đặt $t = \sqrt{y} > 0$. phương trình thành

$$t^2 \left[\left(\frac{\pi}{t} - t^2 \right)^3 - t^6 \right] = m^2 \Leftrightarrow t^9 + m^2 t - (\pi - t^3)^3 = 0 \quad (**)$$

Xét hàm số $f(t) = t^9 + m^2 t - (\pi - t^3)^3$ với $t \in [0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 9t^8 + m^2 + 6t(\pi - t^3)^2 \geq 0, \forall t \in [0; +\infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Mặt khác $f(0) = -\pi^3 < 0$; $f(\sqrt[3]{\pi}) = \pi^3 + \sqrt[3]{\pi} \cdot \pi^2 > 0$.

Vậy phương trình (**) có nghiệm duy nhất $t \in (0; \sqrt[3]{\pi})$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 64. Giải phương trình $\sqrt[n]{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt[n]{\frac{a-x}{a+x}} = \sqrt[n]{\frac{b+x}{b-x}} + \sqrt[n]{\frac{b-x}{b+x}}$, với a, b là các số thực dương.

Giải

Điều kiện. Nếu $n \in \mathbb{N}$ lẻ thì $n = 2$; $\cos x = 0$. Nếu $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ chẵn thì

$$196^{\sin^2 x} - 16^{\sin^2 x} - 100^{\sin^2 x} = 100^{\cos^2 x} + 16^{\cos^2 x} - 196^{\cos^2 x}.$$

Đặt $x \neq 0$; $a^2 + b^2$, phương trình đã cho trở thành

$$u + \frac{1}{u} = v + \frac{1}{v} \Leftrightarrow (u-v) \left(1 - \frac{1}{uv}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ uv = 1 \end{cases}.$$

Nếu $u = v$ thì $\sqrt[n]{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt[n]{\frac{b+x}{b-x}} \Rightarrow ax = bx$.

- Khi $xy > 0$ thì $x \neq y$ là nghiệm.
- Khi $a = b$ thì mọi $x \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm.

Nếu $uv = 1$. Khi đó $\sqrt[n]{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt[n]{\frac{b-x}{b+x}} \Rightarrow x = 0$.

Tóm lại. Phương trình luôn có nghiệm $x = 0$.

- Nếu $\left(0; 0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; 0; 0\right)$ và $\Leftrightarrow a = b = c$ chẵn thì có thêm nghiệm
 $|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2$.
- Nếu $(x+y+z)^2$ và $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ lẻ thì có thêm nghiệm b .

B. Các bài toán sử dụng hình học – đồ thị.

Trong chủ đề này ta sẽ tìm hiểu các ứng dụng của lý thuyết đồ thị mà cụ thể là vị trí tương đối của các đường thẳng và đường cong trong việc giải quyết các bài toán chứa tham số. Ta xét bài toán sau. Tìm m để phương trình $f(x, m) = g(m)$ có nghiệm.

Phương pháp.

Bước 1. Đặt $f(x, m)$, khi đó phương trình được chuyển thành hệ $\begin{cases} y = f(x, m) (C_1) \\ y = g(x, m) (C_2) \end{cases}$

Bước 2. Bằng việc xét vị trí tương đối của hai đường $(C_1), (C_2)$ ta có được kết luận về nghiệm của phương trình.

Lưu ý. Thông thường nếu (C_1) là phương trình đường thẳng thì (C_1) có thể là phương trình đường tròn, Elip, Hypebol hoặc Parabol (cũng có trường hợp (C_1) và (C_2) đều là phương trình đường tròn).

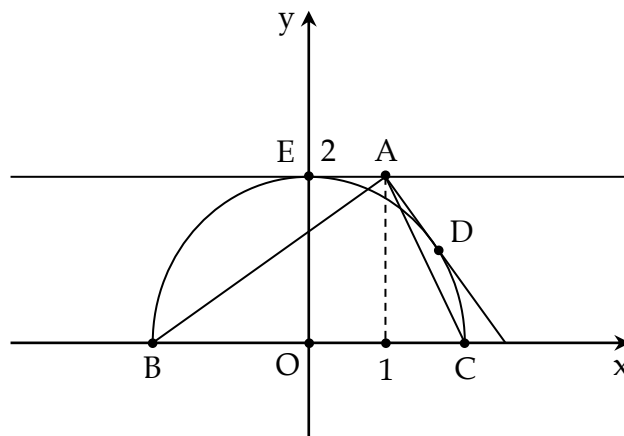
Câu 1. Tìm m để phương trình $\sqrt{4-x^2} - mx - 2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Giải

Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$,

Đặt $\sqrt{4-x^2} = y \geq 0$, phương trình trở thành $y = mx + 2 - m$ (d)

Điều kiện bài toán tương đương nửa đường tròn tâm $O(0;0), r=2$ (phần trên trục hoành) cắt (d) tại hai điểm phân biệt



Ta có (d) đi qua điểm cố định $A(1;2), \forall m$

Qua A có hai tiếp tuyến với đường tròn là đường thẳng $y = 2$ và AD

Gọi k_1, k_2, k_3, k_4 lần lượt là hệ số góc của các đường thẳng AC, AD, AB, AE

Ta có $k_1 = -\tan ACO = -2, k_2 = \tan EAD = \frac{-4}{3}$ vì $\tan EAO = 2, k_3 = \tan ABO = \frac{2}{3}, k_4 = 0$

Vậy để phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $0 < m \leq \frac{2}{3}$ hoặc $-2 \leq m < \frac{-4}{3}$

Câu 2. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\sqrt{1-x^2} = x - m$

Giải

Đặt $y = \sqrt{1-x^2}$, điều kiện $y \geq 0$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ x - y = m & (2) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình (1) là phương trình đường tròn đơn vị (C) có $\begin{cases} O(0,0) \\ R=1 \end{cases}$

Phương trình (2) là phương trình đường thẳng (d) song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất $x - y = 0$. Ta đi tìm hai vị trí giới hạn cho (d) là

- $A(1,0) \in (d) \Leftrightarrow m = 1; B(-1,0) \in (d) \Leftrightarrow m = -1$
- (d) tiếp xúc với nửa trên của đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(O, (d)) = R \Leftrightarrow \frac{|-m|}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\sqrt{2} \\ m = \sqrt{2} \end{cases} (*)$$

Như vậy

- Với $m < -\sqrt{2}$ hoặc $m > 1$ thì $(C) \cap (d) = \varnothing \Leftrightarrow (*)$ vô nghiệm
- Với $m = -\sqrt{2}$ hoặc $-1 < m < 1$ thì $(C) \cap (d) = \{A\} \Leftrightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất.
- Với $-\sqrt{2} < m \leq -1$ thì $(C) \cap (d) = \{A, B\} \Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt.

Chú ý. Phương pháp trên được mở rộng tự nhiên cho trường hợp đường tròn (C) có tâm $I \neq O$

Cách 2. Bài toán trên còn có thể được giải bằng phương pháp lượng giác hóa và phương pháp biến đổi tương đương, như sau.

Đặt $x = \sin t \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$

Khi đó phương trình trở thành $\cos t = \sin t - m \Leftrightarrow \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{m}{\sqrt{2}}$

Vì $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} \leq t - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$, từ đó dựa vào đường tròn đơn vị, ta có số nghiệm của phương trình

là số giao điểm của đường thẳng $(\Delta): y = \frac{m}{\sqrt{2}}$ với cung tròn AB, do đó có thể giải quyết được bài toán này!

Câu 3. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\sqrt{12-3x^2} = x - m \quad (1)$

Giải

Phân tích. Tương tự câu trên, ta sẽ đưa phương trình này về dạng tương giao của Elip và đường thẳng. Đặt $y = \sqrt{12-3x^2}$, điều kiện $y \geq 0$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1 & (2) \\ x - y = m & (3) \end{cases} \quad (y \geq 0)$$

Phương trình (1) là phương trình Elip (E) có tâm I gốc O

Phương trình (2) là phương trình đường thẳng (d) song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất $x - y = 0$. Ta đi tìm hai vị trí giới hạn cho (d) là.

- $A(2,0) \in (d) \Leftrightarrow m = 2; B(-2,0) \in (d) \Leftrightarrow m = -2$

| Các bài toán chứa tham số

- (d) tiếp xúc với nửa trên của $Elip(E) \Rightarrow 1.4 - (-1)^2 \cdot 12 = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 4 \end{cases}$

Như vậy

- Với $m < -4$ hoặc $m > 2$ thì $(E) \cap (d) = \varnothing \Leftrightarrow (1)$ vô nghiệm.
- Với $m = -4$ hoặc $-2 < m < 2$ thì $(E) \cap (d) = \{A\} \Leftrightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất
- Với $-4 < m \leq -2$ thì $(E) \cap (d) = \{A, B\} \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt.

Bài tập tương tự. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

1. $\sqrt{x^2 - 9} = x - m$
2. $\sqrt{x^2 - 1} = (2m + 1)x + m^2 + m + 1$

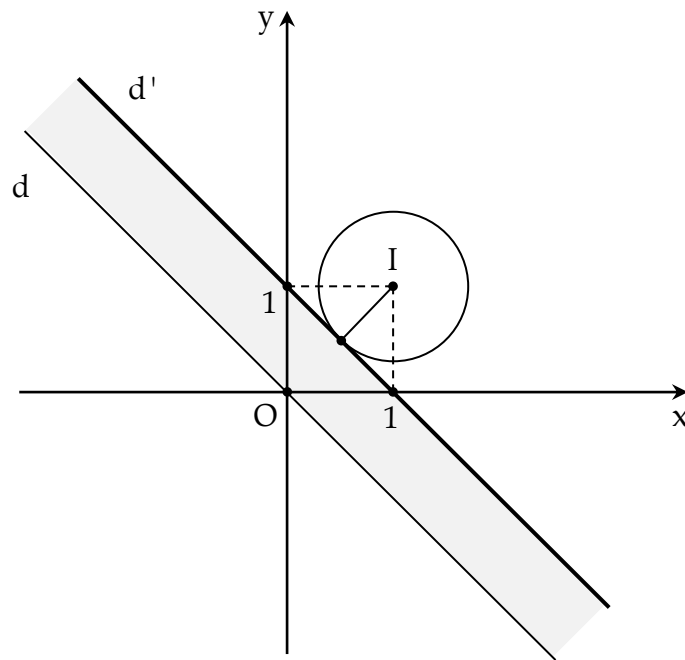
Câu 4. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $0 < x + y \leq 1$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $x + y + \sqrt{2xy + m} = 1$ có nghiệm $(x_0; y_0)$ duy nhất?

Giải

Theo giả thiết ta được

$$\begin{cases} 0 < x + y \leq 1 \\ \sqrt{2xy + m} = 1 - (x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + y \leq 1 \\ 2xy + m = 1 - 2x - 2y + (x + y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + y \leq 1 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = m + 1 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Tập nghiệm của (1) là phần nằm giữa hai đường thẳng $d: y = -x$ và $d': y = -x + 1$, kể cả d' nhưng không kể d ; phần tô đậm trong hình vẽ



- Nếu $m < -1$ thì (2) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = -1$ thì (2) có nghiệm duy nhất $x = y = 1$, không thỏa mãn (1), do đó hệ vô nghiệm.
- Nếu $m > -1$ thì tập nghiệm của (2) là đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ bán kính $R = \sqrt{m+1}$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi d' là tiếp tuyến của đường tròn (C)

$$\text{Điều đó có nghĩa } d(I, d') = R \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Câu 5. Tìm các bộ số (x, y) dương thỏa mãn phương trình .

$$\sqrt{x^2 + b^2 - bx\sqrt{3}} + \sqrt{y^2 + a^2 - ay\sqrt{3}} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Trong đó a, b là các số thực dương cho trước.

Giải

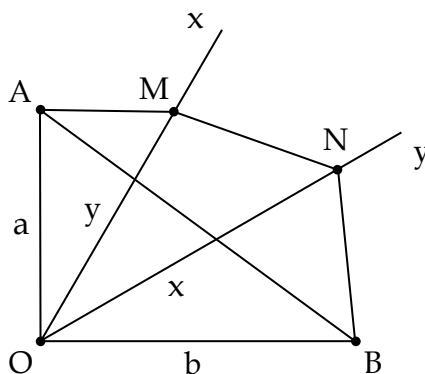
Ta để ý rằng vế trái là ba căn thức có dạng gần giống định lý Cosin trong tam giác, vế phải là biểu thức gần giống công thức tính đường chéo của cạnh huyền . Hơn nữa lại có một kết quả quen thuộc trong hình học phẳng là $AM + MN + NB \geq AB$.

Điều kiện $x^2 + b^2 - bx\sqrt{3}, y^2 + a^2 - ay\sqrt{3}, x^2 + y^2 - xy\sqrt{3} \geq 0$.

Dựng tam giác vuông OAB có $OA = a$, $OB = b$. Ox và Oy là hai đường chia ba các góc của tam giác, trên Ox lấy M và trên Oy lấy N sao cho $OM = y$ và $ON = x$ (như hình vẽ)

Khi đó ta được $AM = \sqrt{OA^2 + OM^2 - 2OA \cdot OM \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = \sqrt{a^2 + y^2 - ay \cdot \sqrt{3}}$.

Tương tự $MN = \sqrt{x^2 + y^2 - xy \cdot \sqrt{3}}, BN = \sqrt{x^2 + b^2 - bx \cdot \sqrt{3}}, AB = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Hơn nữa $AM + MN + NB \geq AB$ nên

$$\sqrt{x^2 + b^2 - bx\sqrt{3}} + \sqrt{y^2 + a^2 - ay\sqrt{3}} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} \geq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Do điều kiện của bài toán nên dấu bằng xảy ra, nói cách khác M và N lần lượt là giao điểm của Ox và Oy với AB . Đến đây ta chỉ cần tìm OM, ON

Ta có $S_{OAB} = S_{OAM} + S_{OBM} \Leftrightarrow ab = \frac{1}{2}ay + \frac{\sqrt{3}}{2}by \Leftrightarrow y = \frac{2ab}{a + \sqrt{3}b}$

Tương tự ta tìm được $x = \frac{2ab}{\sqrt{3} \cdot a + b}$

Do đó nghiệm của bài toán là $x = \frac{2ab}{\sqrt{3} \cdot a + b}, y = \frac{2ab}{a + \sqrt{3}b}$.

C. Các bài toán sử dụng điều kiện cần và đủ.

Phương pháp điều kiện cần và đủ thường tỏ ra khá hiệu quả cho lớp bài toán tìm điều kiện tham số để.

- Phương trình trị tuyệt đối có nghiệm duy nhất.
- Phương trình trị tuyệt đối có nghiệm với mọi giá trị của một tham số.
- Phương trình tương đương với một phương trình hoặc một bất phương trình khác.

Khi đó ta thực hiện theo các bước sau

- **Bước 1.** Đặt điều kiện để các biểu thức của phương trình có nghĩa.
- **Bước 2.** Tìm điều kiện cần cho hệ dựa trên việc đánh giá hoặc tính đối xứng của hệ. Giả sử hệ thỏa mãn tính chất p nào đó mà đầu bài đòi hỏi. Khi đó, dựa vào những đặc điểm của tính chất p và dạng của phương trình ta sẽ tìm được một ràng buộc nào đó đối với tham số m và ràng buộc ấy chính là điều kiện cần để có tính chất p . Điều đó có nghĩa là nếu với m_0 không thỏa mãn ràng buộc trên thì chắc chắn ứng với m_0 , hệ không có tính chất p .
- **Bước 3.** Ta tìm xem trong các giá trị của m vừa tìm được, giá trị nào làm cho hệ thỏa mãn tính chất p . Kiểm tra điều kiện đủ. Ở bước này nói chung ta cũng chỉ cần giải những hệ cụ thể không còn tham số. Sau khi kiểm tra, ta sẽ loại đi những giá trị không phù hợp và những giá trị còn lại chính là đáp số của bài toán.

Như vậy, ý tưởng của phương pháp này khá rõ ràng và đơn giản. Trong rất nhiều bài toán về biện luận thì phương pháp này lại thể hiện ưu thế rõ rệt. Tuy nhiên, thành công của phương pháp còn nằm ở chỗ ta phải làm thế nào để phát hiện điều kiện cần một cách hợp lý và chọn điều kiện đủ một cách đúng đắn.

Sau đây chúng ta sẽ đi vào các ví dụ cụ thể!

Câu 1. Tìm m để phương trình $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} + \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = m(1)$ có nghiệm duy nhất.

Giải

Phân tích. Nếu như ở phương pháp cô lập m thì ta đã có cách giải quyết bài này bằng đạo hàm thì ở phần này ta sẽ tiếp cận nó với phương pháp điều kiện cần và đủ

Điều kiện cần

Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0 \Rightarrow (2 - x_0)$ cũng là nghiệm của (1)

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi $x_0 = 2 - x_0 = 1$

Thay $x_0 = 1$ vào (1), ta được $m = 4$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

Với $m = 4$, khi đó (1) có dạng $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} + \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 4(2)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta được $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-x} \leq 2 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} \leq 2 \end{cases}$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 2 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy với $m = 4$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 2. Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 + 2x - m^2 + 2m + 4} = x + m - 2(1)$ nghiệm đúng $\forall x \geq 0$

Giải

Điều kiện cần

Giả sử (1) có nghiệm $\forall x \geq 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của (1), khi đó.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{-m^2 + 2m + 4} = m - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \geq 0 \\ -m^2 + 2m + 4 = (m - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với $\forall x \geq 0$

Điều kiện đủ

Với $m = 3$, khi đó (1) có dạng

$$\sqrt{-m^2 + 2x + 1} = x + 1 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ luôn đúng.}$$

Vậy với $m = 3$ phương trình nghiệm đúng với $\forall x \geq 0$.

Chú ý. Với bài toán có nhiều hơn một tham số ra sẽ thấy tầm quan trọng của việc lựa chọn điểm thuận lợi cùng với việc xác định các giá trị của tham số được thực hiện tuần tự. Chúng ta đi xem xét ví dụ sau.

Câu 3. Tìm a, b, để phương trình $a\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + bx + 1} = 0$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

Giải

Điều kiện cần

Giả sử (1) có nghiệm $\forall x \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của (1), khi đó $(1) \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

$$\text{Với } a = 1 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + bx + 1} \Leftrightarrow x^2 + 1 = x^2 + bx + 1 \Leftrightarrow bx = 0 \stackrel{\forall x}{\Leftrightarrow} b = 0$$

Vậy $a = 1, b = 0$ là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với $\forall x$.

Điều kiện đủ

Với $a = 1, b = 0$ thì $(1) \Leftrightarrow 0 = 0$ luôn đúng.

Vậy với (1) phương trình nghiệm đúng với $\forall x$

Câu 4. Cho 2 phương trình
$$\begin{cases} (x + 5)(2 - x) = 3m\sqrt{x^2 + 3x + m - 1} & (1) \\ x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

Tìm m để (1), (2) tương đương?

Giải

Phân tích. Để 2 phương trình tương đương nhau thì phương trình 1 phải có cùng tập nghiệm với phương trình 2. Do đó ta đi giải phương trình 2. Ta có

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + 3x)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Điều kiện cần

Giả sử (1), (2) tương đương $\Rightarrow x = 1$ là nghiệm của (1) khi đó

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow 6 &= 3m\sqrt{m + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 = m^2(m + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^3 + 3m^2 - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (m - 1)(m^2 + 4m + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \end{aligned}$$

Vậy $m = 1$ là điều kiện cần để (1), (2) tương đương.

Điều kiện đủ

| Các bài toán chứa tham số

Với $m=1$, khi đó (1) có dạng $-x^2-3x+10=3\sqrt{x^2+3x}$ (3)

Đặt $t=\sqrt{x^2+3x}$, điều kiện $t \geq 0$

Khi đó (3) $\Leftrightarrow t^2+3t-10=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-5(L) \\ t=2 \end{cases}$

Với $t=2$ ta có $\sqrt{x^2+3x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$

Tức là (1),(2) tương đương.

Vậy với $m=1$ thì (1),(2) tương đương.

Chú ý. Chúng ta đã thấy tồn tại những phương trình chứa căn thức mà tập nghiệm của nó là một khoảng, do đó một phương trình chứa căn thức có thể tương đương với một bất phương trình. Chúng ta đi xem xét ví dụ sau.

Câu 5. Cho phương trình và bất phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-1+2m\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2m\sqrt{x-2}}=2 & (1) \\ |x^2+3x+2| \leq x^2+2x+5 & (2) \end{cases}$$

Tìm m để (1),(2) tương đương?

Giải

Điều kiện cần

Giả sử (1),(2) tương đương suy ra $x=3$ là nghiệm của (1), khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2+2m}+\sqrt{2-2m}=2 \Leftrightarrow \sqrt{4-4m^2}=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$$

Vậy $m=\pm 1$ là điều kiện cần để (1),(2) tương đương.

Điều kiện đủ

Với $m=1$, khi đó (1) có dạng

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} &= 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-2}+1|+|\sqrt{x-2}-1|=2 \\ \Leftrightarrow |\sqrt{x-2}+1|+|1-\sqrt{x-2}| &= |(\sqrt{x-2}+1)+(1-\sqrt{x-2})| \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-2}+1)(1-\sqrt{x-2}) &\geq 0 \Leftrightarrow 1-(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \end{aligned}$$

Tức là (1),(2) tương đương.

Với $m=-1$ tương tự hoặc có thể nhận xét về tính đối xứng của m trong phương trình

Vậy với $m=\pm 1$ thì (1),(2) tương đương.

Câu 6. Tìm m để phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2m\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt{x(1-x)}=m^3$ (1) có nghiệm duy nhất?

Giải

Phân tích. Một bài toán nhìn nhiều căn khá là phức tạp, và ý tưởng hàm đặc trưng dường như cũng khá là khó, tuy nhiên hãy chú ý đến các biểu thức $x, 1-x$ ta không khó để nhận ra nếu x_0 thì $1-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình, do đó chúng ta sẽ sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ để giải quyết bài toán này.

Lời giải

Nhận thấy nếu x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì $1-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình (1).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì

$$x_0=1-x_0 \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2} \Rightarrow m^3=m \Leftrightarrow m=0 \vee m=\pm 1$$

- Với $m = 0$ thì (1) trở thành

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy $m = 0$ thỏa mãn

- Với $m = 1$ thì (1) trở thành $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = 1 - 2\sqrt[4]{x(1-x)}$

$$\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x}\right)^2 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{1-x} \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy ta loại $m = 1$

- Với $m = -1$ thì (1) trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} + 1 - 2\sqrt[4]{x(1-x)} &= 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x}\right)^2 + \left(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{1-x} \\ \sqrt{x} = \sqrt{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy $m = -1$ thỏa mãn

Vậy $m = 0, m = -1$ là 2 giá trị thỏa mãn.

Câu 7. Tìm m để phương trình $2\sqrt{x^2 + 2(\sqrt{2}x + m^2)} + 3m + 1 = 2|x + \sqrt{2}| + 3 + m$ có nghiệm duy nhất?

Giải

Biến đổi phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2 + 2(\sqrt{2}x + m^2)} + 3m + 1 &= 2|x + \sqrt{2}| + 3 + m \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{(x + \sqrt{2})^2 + 2m^2 + 3m - 1} &= 2|x + \sqrt{2}| + 3 + m \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $t = x + \sqrt{2}$, ta có phương trình $2\sqrt{t^2 + 2m^2 + 3m - 1} = 2|t| + 3 + m \quad (2)$.

Nhận xét (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (2) có nghiệm duy nhất.

Giả sử t_0 là một nghiệm của (2) thì $-t_0$ cũng là nghiệm của (2). Do đó để (2) có nghiệm duy nhất, điều kiện cần là $t_0 = -t_0 \Leftrightarrow t_0 = 0$.

$$\text{Với } t_0 = 0 \text{ thay vào (2) ta được } 2\sqrt{2m^2 + 3m - 1} = 3 + m \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3 \\ 7m^2 + 6m - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{13}{7} \end{cases}$$

Thử lại.

- Với $m = 1$ phương trình (2) trở thành

$$2\sqrt{t^2 + 4} = 2|t| + 4 \Leftrightarrow t^2 + 4 = t^2 + 4|t| + 4 \Leftrightarrow t = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

- Với $m = -\frac{13}{7}$ phương trình (2) trở thành

$$2\sqrt{t^2 + \frac{16}{49}} = 2|t| + \frac{8}{7} \Leftrightarrow t^2 + \frac{16}{49} = t^2 + \frac{8}{7}|t| + \frac{16}{49} \Leftrightarrow t = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 1, m = -\frac{13}{7}$ là 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. Tìm a và b để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\sqrt[3]{(ax+b)^2} + \sqrt[3]{(ax-b)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2-b^2} = \sqrt[3]{b} \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần

Giả sử (1) có nghiệm duy nhất $x = x_0$, khi đó dễ thấy $x = -x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Do đó từ giả thiết suy ra $x_0 = 0$. Thay $x_0 = 0$ vào (1) ta được $\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{b} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=1 \end{cases}$

Điều kiện đủ

Khi $b = 0$, (1) có dạng

$$\sqrt[3]{a^2x^2} + \sqrt[3]{a^2x^2} + \sqrt[3]{a^2x^2} = 0 \Leftrightarrow a^2x^2 = 0$$

Do đó (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$.

Khi $b = 1$, (1) có dạng

$$\sqrt[3]{(ax+1)^2} + \sqrt[3]{(ax-1)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2-1} = 1 \quad (*)$$

Đặt $u = \sqrt[3]{ax+1}$; $v = \sqrt[3]{ax-1}$, ta thấy.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - v^3 = 2 \\ u^2 + uv + v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 2 \\ u^2 + uv + v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+1=1 \\ ax-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow ax=0$$

Vậy (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$.

Tóm lại, để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần và đủ là $\begin{cases} a \neq 0; b=0 \\ b=1 \end{cases}$

Câu 9. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} \sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} - 4 = m - \sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \\ \sqrt{7+y} + \sqrt{11-y} - 4 = m - \sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -7 \leq x, y \leq 11 \\ \frac{74}{27} \leq m \leq \frac{10}{3} \end{cases}$$

Trừ theo về hai phương trình ta có

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{11-x} = \sqrt{y+7} - \sqrt{11-y}$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t+7} - \sqrt{11-t}$, $-7 \leq t \leq 11$ ta có $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+7}} + \frac{1}{2\sqrt{11-t}} > 0$.

Vậy hàm số đồng biến, khi đó $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào một trong hai phương trình của hệ ta được

$$\sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} - 4 = m - \sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \quad (*)$$

Điều kiện cần

Ta thấy là nếu x_0 là một nghiệm của phương trình thì $4 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_0 = 4 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Thay vào phương trình (*) ta được $\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} = m - 2 \quad (**)$

Giải phương trình (**) ta tìm được $m = 3$.

Điều kiện đủ.

Với $m=3$, ta thu được hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} = 6 \\ \sqrt{7+y} + \sqrt{11-y} = 6 \end{cases}$$

Vì $x=y$ nên ta chỉ việc giải phương trình $\sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} = 6 \Leftrightarrow x=2$

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 10. Tìm a và b để phương trình sau có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần.

Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho thì $(-x_0; -y_0; z_0)$ cũng là nghiệm. Do tính duy nhất nên $x_0 = -x_0; y_0 = -y_0 \Rightarrow x_0 = y_0 = 0$.

Thay trở lại vào hệ, ta có
$$\begin{cases} z_0 = a \\ z_0 = b \\ z_0^2 = 4 \end{cases}$$
 Từ đây ta suy ra $a=b=2$ hoặc $a=b=-2$.

Điều kiện đủ.

Nếu $a=b=2$. Khi đó hệ có dạng
$$\begin{cases} xyz + z = 2 & (1) \\ xyz^2 + z = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1)-(2) ta được $xyz(1-z)=0$, từ (1) lại có $z \neq 0$ do đó $xy(1-z)=0$

Nếu $x=0 \Rightarrow z=2 \Rightarrow y=0$

Nếu $y=0 \Rightarrow z=2 \Rightarrow x=0$

Nếu $z=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$

Hệ trên có nghiệm $(x_1; y_1) \neq (0; 0)$. Vì vậy ngoài nghiệm $(0; 0; 2)$, hệ còn có nghiệm khác $(x_1; y_1; 1)$ do đó hệ không có nghiệm duy nhất. Trường hợp này không thỏa mãn.

Nếu $a=b=-2$. Khi đó hệ có dạng
$$\begin{cases} xyz = -2 \\ xyz^2 + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Tiến hành làm như trường hợp trên ta đi đến

Nếu $x=0 \Rightarrow z=-2 \Rightarrow y=0$

Nếu $y=0 \Rightarrow z=-2 \Rightarrow x=0$

Nếu $z=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = -3 \end{cases}$

Ta thấy từ hệ phương trình trên, ta suy ra $x^2 + y^2 < 2|xy|$ nên hệ vô nghiệm.

Vậy trong trường hợp này hệ có duy nhất nghiệm $(x; y; z) = (0; 0; 2)$

Vậy điều kiện cần và đủ để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $a=b=-2$.

Câu 11. Tìm a để phương trình sau có nghiệm đúng với mọi x :

$$\log_2(a^2x^2 - 5ax^2 + \sqrt{6-a}) = \log_{2+x^2}(3 - \sqrt{a-1}) \quad (*)$$

Giải

Điều kiện cần

Giả sử (*) đúng với mọi x . Với $x=0$ ta có $\log_2 \sqrt{6-a} = \log_2 (3-\sqrt{a-1})$

$$\text{Lại có } \begin{cases} 1 \leq a \leq 6 \\ \sqrt{a-1} < 3 \\ \sqrt{a-1} + \sqrt{6-a} = 3 \end{cases} \Rightarrow a \in \{2; 5\}$$

Điều kiện đủ

Nếu $a=2$ thì (*) $\Leftrightarrow \log_2 (2-12x^2) = \log_{2+x^2} 2$ (**)

Rõ ràng (**) không đúng với mọi x , vì để $\log_2 (2-12x^2)$ có nghĩa thì phải có $12x^2 < 2$

Nếu $a=5$ thì (*) $\Leftrightarrow \log_2 1 = \log_{2+x^2} 1$ (luôn đúng)

Vậy $a=5$ là điều kiện cần và đủ để (*) đúng với mọi x .

Câu 12. Tìm a để hệ phương trình ẩn $(x; y)$ có nghiệm với mọi b :
$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2 \\ (a-1)x^3 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần.

Giả sử hệ có nghiệm với mọi b , thay $b=0$ ta được
$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ (a-1)x^3 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Do đó điều kiện cần là $a = \pm 1$

Điều kiện đủ.

Nếu $a=1$, ta có hệ
$$\begin{cases} 2^{bx} + 2by^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Khi $b > \frac{1}{2}$ hệ vô nghiệm. Vậy trường hợp này loại.

Nếu $a=-1$, ta có hệ
$$\begin{cases} 2^{bx} = 1 \\ -2x^3 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Hệ trên luôn có nghiệm $(x; y) = (0; 1)$.

Vậy $a=-1$ là điều kiện cần và đủ để hệ phương trình có nghiệm với mọi b .

Câu 13. Tìm a để hệ phương trình ẩn $(x; y)$ có nghiệm với mọi b :
$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2 \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần.

Giả sử hệ có nghiệm với mọi b , thay $b=0$ ta có

$$(*) \begin{cases} (x^2+1)^a = 1 \\ a + x^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0; x^2y=1 \\ x^2+1 = a + x^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \{0; 1\}$$

Điều kiện đủ.

Nếu $a=0$, ta có
$$\begin{cases} (b^2+1)^y = 1 & (1) \\ bxy + x^2y = 1 & (2) \end{cases}$$

Nếu $b \neq 0 \Rightarrow b^2+1 \neq 1$ nên từ (1) ta có $y=0$, nhưng không thỏa (2).

Vậy trường hợp này loại.

Nếu $a = 1$, ta có
$$\begin{cases} x^2 + (b^2 + 1)^y = 1 \\ bxy + x^2y = 0 \end{cases}$$

Hệ trên luôn có nghiệm $x = y = 0$.

Vậy $a = 1$ là điều kiện cần và đủ để hệ có đã cho có nghiệm với mọi b .

Câu 14. Tìm điều kiện của a, b, c, d, e, f để hệ phương trình ẩn $(x; y)$ sau là tương đương

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần.

Ta thấy $(x; y) = (0; \pm 1), (\pm 1; 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ là nghiệm của (2).

Do đó (1) cũng phải có các nghiệm trên.

Như vậy
$$\begin{cases} c + e + f = c - e + f = a + d + f = a - d + f = 0 \\ \frac{a + b + c + \sqrt{2}d + \sqrt{2}e + 2f}{2} = \frac{a + b + c - \sqrt{2}d - \sqrt{2}e + 2f}{2} = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được điều kiện cần của bài toán là $(*) : \begin{cases} b = d = e = 0 \\ a = c = -f \neq 0 \end{cases}$

Điều kiện đủ.

Dễ thấy với $(*)$ thì (2) trùng với (1).

Vậy $(*)$ là điều kiện cần và đủ để $(1) \Leftrightarrow (2)$.

Câu 15. Cho phương trình $x^3 + ax + b = 0$ (1). Tìm a, b để phương trình trên có ba nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$ cách đều nhau.

Giải

Điều kiện cần.

Giả sử phương trình (1) có 3 nghiệm khác nhau x_1, x_2, x_3 thỏa giả thiết $\Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$

Theo định lý Viète với phương trình bậc 3 ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

Thay $x_2 = 0$ vào (1) ta được $b = 0$

Điều kiện đủ.

Giả sử $b = 0$, khi đó (1) trở thành $x^3 + ax = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + a) = 0$ (2)

Ta thấy (2) có 3 nghiệm phân biệt nếu $a < 0$. Khi đó các nghiệm của (2) là

$$\begin{cases} x_1 = -\sqrt{-a} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{-a} \end{cases}$$

Các nghiệm trên cách đều nhau nên điều kiện cần và đủ để (1) có nghiệm thỏa mãn đề bài là $b = 0, a < 0$.

Câu 16. Cho phương trình $x^3 - 3x^2 + (2m - 2)x + m - 3 = 0$. Tìm m để phương trình trên có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 phân biệt $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

Giải

Điều kiện cần.

$$\text{Đặt } f(x) = x^3 - 3x^2 + (2m - 2)x + m - 3$$

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

$$\text{Ta có } f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\text{Suy ra } f(x) > 0 \text{ khi } x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(-1) > 0 \text{ hay } -m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -5$$

Điều kiện đủ.

Giả sử $m < -5$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ nên ta phải có } \varepsilon < -1 \text{ mà } f(\varepsilon) < 0$$

Lại có $f(-1) = -m - 5 > 0$ và $f(x)$ liên tục nên suy ra tồn tại một $\varepsilon < x_1 < -1$ sao cho $f(x_1) = 0$. Ta có $f(0) = m - 3 < 0$ (do $m < -5$)

Vậy tồn tại $-1 < x_2 < 0$ sao cho $f(x_2) = 0$

Mặt khác, do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên phải có $\varepsilon > 0$ mà $f(\varepsilon) > 0$

Từ đó, tồn tại x_3 mà $0 < x_3 < \varepsilon$ sao cho $f(x_3) = 0$

Như vậy, phương trình $f(x) = 0$ khi $m < -5$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3$.

Vậy $m < -5$ chính là điều kiện cần và đủ thỏa mãn đề bài.

Câu 17. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = x^2 + 2(2m - 3)x + 5m^2 - 16m + 20$$

Giải

Điều kiện cần.

Giả sử phương trình đã cho có một nghiệm là x_0 .

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1} \text{ và } g(x) = x^2 + 2(2m - 3)x + 5m^2 - 16m + 20$$

$$\text{Khi đó dễ thấy rằng } \max f(x) \geq f(x_0) = g(x_0) \geq \min g(x)$$

$$\text{Do } \min g(x) = g(-(2m - 3)) = m^2 - 4m + 11$$

Gọi y_0 là giá trị tùy ý của $f(x)$, khi đó ta có

$$y_0 = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow (20 - 3y_0)x^2 + 2(5 - y_0)x + 3 - y_0 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Suy ra (1) có nghiệm khi } \Delta' = -2y_0^2 + 19y_0 - 35 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq y_0 \leq 7.$$

$$\text{Vậy } \max f(x) = 7.$$

Như vậy, từ điều kiện $\max f(x) \geq \min g(x)$ ta có

$$7 \geq m^2 - 4m + 11 \Leftrightarrow (m - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Điều kiện đủ.

Giả sử $m = 2$, khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = x^2 + 2x + 8 \quad (2)$$

Ta nhận thấy rằng $g(x) = x^2 + 2x + 8 \begin{cases} = 7 \Leftrightarrow x = -1 \\ > 7 \Leftrightarrow x \neq -1 \end{cases}$

Mặt khác $f(x) = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1} \leq 7 \quad \forall x$ và $f(-1) = 6,5$. Từ đây suy ra (2) vô nghiệm.

Vậy không tồn tại giá trị nào của m thỏa mãn giả thiết.

Câu 18. Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + m = 0$ (1) có một nghiệm gấp đôi nghiệm của phương trình $x^2 - x + m = 0$ (2)

Giải

Điều kiện cần.

Giả sử tồn tại m thỏa mãn điều kiện đầu bài, tức là phương trình (2) có nghiệm x_0 , còn phương trình

(1) có nghiệm $2x_0$. Vậy ta có $\begin{cases} 4x_0^2 - 6x_0 + m = 0 \\ x_0^2 - x_0 + m = 0 \end{cases}$

Trừ vế với vế của hai phương trình trên cho nhau ta sẽ tìm được $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = \frac{5}{3}$

Thay hai giá trị x_0 vào một trong hai phương trình trên ta được $m = 0$ và $m = \frac{10}{9}$.

Đây cũng chính là điều kiện cần của bài toán.

Điều kiện đủ.

Xét khi $m = 0$ và $m = \frac{10}{9}$ ta sẽ lần lượt giải các phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x^2 - x = 0 \\ x^2 - 3x + \frac{10}{9} = 0 \\ x^2 - x + \frac{10}{9} = 0 \end{cases}$

Dễ thấy nghiệm của 2 cặp phương trình này thỏa giả thiết.

Vậy $m \in \left\{0; \frac{10}{9}\right\}$ là điều kiện cần và đủ thỏa mãn đề bài.

Câu 19. Tìm a,b sao cho với mọi c thì phương trình sau không có quá 2 nghiệm dương $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Giải

Để giải bài này, ta sẽ dùng phần bù. Nghĩa là ta tìm a,b sao cho tồn tại c để phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm dương.

Điều kiện cần.

Giả sử tồn tại c để phương trình $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm dương thỏa mãn điều kiện $x_1 < x_2 < x_3$.

Khi đó $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Vậy hàm số $f(x)$ có 2 cực trị tại $\alpha, \beta > 0$ (với $x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$)

Suy ra phương trình $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$ (1) có 2 nghiệm dương.

$$\text{Như vậy } \begin{cases} \delta' = a^2 - 3b > 0 \\ P = \frac{b}{3} > 0 \\ S = \frac{2a}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 > 3b \\ b > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} b > 0 \\ a < -\sqrt{3b} \end{cases}, (*) \text{ là điều kiện cần của bài toán.}$$

Điều kiện đủ.

Giả sử a, b thỏa mãn $(*)$ thì rõ ràng phương trình $3x^2 + 2ax + b = 0$ có 2 nghiệm dương $0 < \alpha < \beta$. Suy ra hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có cực đại tại $x = \alpha$ và cực tiểu tại $x = \beta$. Do $\alpha > 0$ nên tìm được $x_1 \in (c; \alpha)$ sao cho $f(\beta) < f(x_1) < f(\alpha) \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = f(x_1)$ có ba nghiệm dương. Đặt $c = -f(x_1)$ thì phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm dương. Vậy $(*)$ là điều kiện cần và đủ để tồn tại c sao cho phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có không quá 2 nghiệm dương.

II. Các bài toán hệ phương trình.

Nhìn chung phương pháp không khác gì nhiều các bài toán về phương trình, ta chủ yếu sẽ từ một phương trình trong hệ rút được mối liên hệ giữa các biến rồi thế vào phương trình còn lại đưa về dạng toán trên, hoặc sử dụng điều kiện có nghiệm, phương pháp hình học, điều kiện cần và đủ... Chúng ta sẽ đi vào các ví dụ minh họa sau để hiểu rõ hơn!

Câu 1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} mx + (m+1)y = 2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases}$.

Giải

Phân tích. Nhìn hệ có dáng dấp tương giao giữa đường thẳng và đường tròn phải không nào, do đó ta sẽ giải quyết như sau

Phương trình (1) có dạng phương trình đường thẳng $\Delta: mx + (m+1)y = 2$ và phương trình (2) có dạng phương trình đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$ có tâm là $O(0;0)$ và bán kính $R = 2$.

Điều kiện hệ phương trình có nghiệm tương đương với đường thẳng cắt đường tròn hoặc tiếp xúc với đường tròn, tức là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng Δ phải nhỏ hơn hoặc bằng 2 (bán kính). Ta có

$$d(O; \Delta) = \frac{|m \cdot 0 + (m+1) \cdot 0 - 2|}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{2m^2 + 2m + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1 \vee m \geq 0$$

Vậy với $m \leq -1 \vee m \geq 0$ thì hệ phương trình đầu có nghiệm!

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (1) \\ (2m+1)x + my + m - 1 = 0 & (2) \end{cases}$. Xác định m để hệ phương trình trên có 2 nghiệm $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ sao cho biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Phân tích. Phương trình đầu là phương trình đường tròn, phương trình thứ hai là phương trình đường thẳng mà để hệ có nghiệm thì 2 cái này phải cắt nhau, mặt khác hãy để ý tới 2 bộ nghiệm chính là tọa độ giao điểm của chúng và A chính là bình phương độ dài đoạn thẳng nối 2 giao điểm. Để A lớn nhất thì chỉ có thể là đường thẳng đi qua tâm của đường tròn. Do đó ta có lời giải sau.

Lời giải.

Phương trình (2) là phương trình đường thẳng $\Delta: (2m+1)x + my + m - 1 = 0$ và phương trình (1) có dạng phương trình đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$ có tâm là $O(0;0)$ và bán kính $R = 3$.

Hệ có 2 nghiệm $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ tức là đường thẳng Δ cắt (C) tại 2 điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.

$$\text{Khi đó } MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Leftrightarrow A = MN^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Biểu thức A đạt giá trị lớn nhất khi Δ đi qua tâm O của đường tròn, tức là.

$$\Delta: (2m+1) \cdot 0 + m \cdot 0 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Câu 3. Tìm a để hệ $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x + y + \sqrt{2x(y-1)} + a = 2 \end{cases} (*)$ có nghiệm ?

Giải

$$\text{Phương trình } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 2 \\ \sqrt{2x(y-1)} + a = 2 - (x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x(y-1) + a = [2 - (x + y)]^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -x + 2 & (1) \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = a+1 & (2) \end{cases}$$

Ta có (1) là miền nằm dưới đường thẳng $\Delta: y = -x + 2$ và (2) là đường tròn tâm I $I(1;2)$ bán kính $\sqrt{a+1}, (a \geq -1)$. Khoảng cách từ tâm I tới đường thẳng $\Delta: y = -x + 2$ là $d(I, \Delta) = \frac{|1+2-2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Để hệ (*) có nghiệm thì $d(I, \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{a+1} \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{2}$.

Bài tập tương tự. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} y = \sqrt{27+6x-x^2} + 5 \\ my + 2x + 3m - 6 = 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Câu 4. Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$ (*) có nghiệm ?

Giải

Quá quen thuộc phải không nào, ta sẽ đưa hệ về 2 ẩn phụ mới. Ta có hệ tương đương

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = m \\ (x+y) - xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = m \\ S - P = 1 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} S = x+y \\ P = xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = S - 1 \\ S^2 - 2S + 2 - m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hệ có nghiệm khi (1) có nghiệm và nghiệm hệ S, P thỏa $S^2 - 4P \geq 0$

Ta có $\Delta' = 1 - 2 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$. Khi đó, hệ S, P có nghiệm là

$$\begin{cases} S = 1 - \sqrt{m-1} \\ P = -\sqrt{m-1} \end{cases} \vee \begin{cases} S = 1 + \sqrt{m-1} \\ P = \sqrt{m-1} \end{cases}$$

Điều kiện để hệ có nghiệm $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \sqrt{m-1})^2 + 4\sqrt{m-1} \geq 0 \\ (1 + \sqrt{m-1})^2 - 4\sqrt{m-1} \geq 0 \end{cases}$

Luôn thỏa với mọi giá trị $m \geq 1$

Vậy khi $m \geq 1$ thì hệ phương trình có nghiệm.

Câu 5. Với những giá trị nào của tham số m thì hệ $\begin{cases} 5(x+y) - 4xy = 4 \\ x + y - xy = 1 - m \end{cases}$ (*) có nghiệm ?

Giải

Hệ phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x+y) - 4xy = 4 \\ 4(x+y) - 4xy = 4 - 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4m = S \\ xy = 5m - 1 = P \end{cases}$

(*) có nghiệm khi và chỉ khi $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow 16m^2 \geq 20m - 4 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4} \vee m \geq 1$.

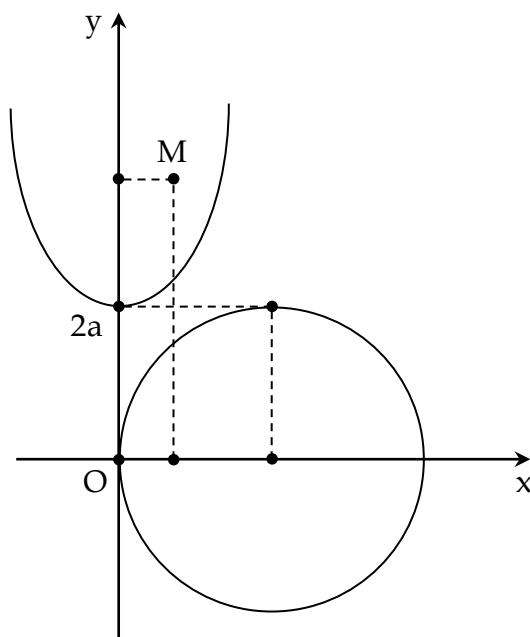
Câu 6. Cho a là một số thực dương. Chứng minh rằng hệ bất phương trình sau vô nghiệm.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4ax & (1) \\ y - x^2 \geq 2a & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-2a)^2 + y^2 \leq 4a^2$

Nếu $(x; y)$ thỏa (1) thì $M(x; y)$ ở miền trong đường tròn tâm $I(2a; 0)$, bán kính $R = 2a$.



Phương trình (2) $\Leftrightarrow y \geq x^2 + 2a$.

Nếu $(x; y)$ thỏa (2) thì $M(x; y)$ ở miền trên của parabol có phương trình $y = x^2 + 2a$.

Do hai miền không giao nhau nên hệ vô nghiệm.

Câu 7. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + ay - a = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases} (*)$. Tìm tất cả các giá trị a để hệ phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt.

Giải

$$\text{Phương trình } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay - a = 0 & (1) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

Ta xem (1) là phương trình đường thẳng Δ và (2) là phương trình đường tròn (C_1) có tâm là $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ và bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Để hệ có 2 nghiệm phân biệt thì $d(I, \Delta) < R$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{2} - a\right|}{\sqrt{1 + a^2}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |1 - 2a| < \sqrt{1 + a^2} \Leftrightarrow 1 - 4a + 4a^2 < 1 + a^2 \\ &\Leftrightarrow 3a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Câu 8. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} - 3\sqrt{y} = \sqrt{y^2 + 3} - 3\sqrt{x} & (1) \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = m - 2\sqrt{1-y^2} & (2) \end{cases}$ có nghiệm?

Giải

Phân tích. Dễ thấy rằng từ phương trình đầu ta có thể rút được mối liên hệ giữa 2 biến, sau đó thì ta sẽ thế vào phương trình 2 rồi tìm điều kiện của m.

Cách 1.

Điều kiện $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$

- Với $x = y = 0$ hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 2 = m - 2 \Leftrightarrow m = 4$
- Với x, y thỏa mãn điều kiện và không đồng thời bằng không. Ta có phương trình

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3} - 3\sqrt{y} &= \sqrt{y^2 + 3} - 3\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{y^2 + 3} + 3(\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{y^2 + 3}} + 3 \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y) \left(\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{y^2 + 3}} + \frac{3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = y, \text{ do } \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{y^2 + 3}} + \frac{3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0 \end{aligned}$$

- Với $x = y$ thế vào phương trình (2) ta được $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = m - 2\sqrt{1-x^2}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x^2} - m = 0 (*)$

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$

Vì $0 \leq x, y \leq 1$ nên $0 \leq t^2 - 2 \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$

Khi đó phương trình (*) trở thành $t^2 + t - 2 - m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = m (**)$

Xét hàm số $y = t^2 + t - 2; t \in [\sqrt{2}; 2]$ ta có hàm số đồng biến trên $[\sqrt{2}; 2]$

Nên phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow y(\sqrt{2}) \leq m \leq y(2) \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq m \leq 4$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi $\sqrt{2} \leq m \leq 4$

Cách 2. Phương pháp hàm đặc trưng

Điều kiện $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$

Với x, y thỏa mãn điều kiện và không đồng thời bằng không. Ta có phương trình

$$\sqrt{x^2 + 3} - 3\sqrt{y} = \sqrt{y^2 + 3} - 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} + 3\sqrt{x} = \sqrt{y^2 + 3} + 3\sqrt{y} (*)$$

Xét hàm $f(t) = \sqrt{t^2 + 3} + 3\sqrt{t}, 0 \leq t \leq 1$.

Ta có $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} + \frac{3}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t \in (0; 1]$. Hàm số $y = f(t)$ tăng trên $[0; 1]$

Từ (*) suy ra $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Với $x = y$ thế vào phương trình (2) ta được $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = m - 2\sqrt{1-x^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x^2} - m = 0 (*)$$

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$

Vì $0 \leq x, y \leq 1$ nên $0 \leq t^2 - 2 \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$

Khi đó phương trình (*) trở thành $t^2 + t - 2 - m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = m (**)$

Xét hàm số $y = t^2 + t - 2; t \in [\sqrt{2}; 2]$ ta có hàm số đồng biến trên $[\sqrt{2}; 2]$

Nên phương trình $(**)$ có nghiệm $\Leftrightarrow y(\sqrt{2}) \leq m \leq y(2) \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq m \leq 4$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi $\sqrt{2} \leq m \leq 4$

Câu 9. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + x - \sqrt[3]{y} = 1 - 2m & (1) \\ 2x^3 - x^2 \sqrt[3]{y} - 2x^2 + x \sqrt[3]{y} = m & (2) \end{cases}$ có nghiệm?

Giải

Nhận xét. Ta thấy rằng hệ phương trình chỉ có xuất hiện $\sqrt[3]{y}$, vì thế ta biểu diễn tham số m theo ẩn x . Do đó phương trình (2) nhân 2 cộng với phương trình (1).

Cách 1. Nhân 2 vế của (2) với 2 rồi cộng vế với vế với (1) ta được phương trình

$$4x^3 - 3x^2 + x - (2x^2 - 2x + 1)\sqrt[3]{y} = 1 \quad (3)$$

Ta có $2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Nên } (3) \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 1}{2x^2 - 2x + 1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = 2x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2x^2 - 2x + 1} \right) \quad (4)$$

Thay (4) vào (1) ta được phương trình

$$\begin{aligned} x^2 + x - \left[2x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2x^2 - 2x + 1} \right) \right] &= 1 - 2m \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4} \left(2x^2 - 2x + 1 + \frac{3}{2x^2 - 2x + 1} \right) &= m \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM - GM

$$2x^2 - 2x + 1 + \frac{3}{2x^2 - 2x + 1} \geq 2\sqrt{(2x^2 - 2x + 1) \cdot \left(\frac{3}{2x^2 - 2x + 1} \right)} = 2\sqrt{3}$$

Nên vế trái $VT \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$. Suy ra hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

Cách 2. Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} (x^2 - x) + (2x - \sqrt[3]{y}) = 1 - 2m \\ (x^2 - x) \cdot (2x - \sqrt[3]{y}) = m \end{cases} \quad (II)$

Đặt $x^2 - x = u \left(u \geq -\frac{1}{4} \right); 2x - \sqrt[3]{y} = v$

Hệ (II) trở thành $\begin{cases} u + v = 1 - 2m \\ u \cdot v = m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - 2m - u \\ -u^2 + u = m(2u + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - 2m - u \\ \frac{-u^2 + u}{2u + 1} = m \end{cases}; \left(u \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow 2u + 1 > 0 \right)$$

Xét hàm số $f(u) = \frac{-u^2 + u}{2u + 1}$ với $u \geq -\frac{1}{4}$

Ta có $f'(u) = \frac{-2u^2 - 2u + 1}{(2u + 1)^2}; f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

Ta có bảng biến thiên

u	$\frac{-1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$+\infty$
$f'(u)$	$+$	0	$-$
		$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	

Từ BBT suy ra hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

Câu 10. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = m \\ x + y = 3m \end{cases}$ có nghiệm?

Giải

Điều kiện $x \geq -1; y \geq -2$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} (u \geq 0) \\ v = \sqrt{y+2} (v \geq 0) \end{cases}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} u + v = m \\ u^2 + v^2 = 3(m+1) \end{cases} (u \geq 0, v \geq 0) (*)$

Bài toán trở thành tìm các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình $(*)$ có nghiệm thực u, v thỏa mãn điều kiện $u \geq 0, v \geq 0$. Đến đây bài toán trở nên vô cùng đơn giản có thể giải bằng hình học hoặc đặt ẩn đối xứng và cũng có thể thế vào tìm điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2. Ta sẽ cùng tiếp cận từng cách một.

Cách 1. Sử dụng hình học.

- Phương trình (1) có dạng phương trình đường thẳng, gọi đường thẳng đó là đường thẳng (Δ) .
- Phương trình (2) có dạng phương trình đường tròn, gọi phương trình đường tròn đó là (C) .

Đường tròn (C) có $\begin{cases} \text{Tâm } O(0;0) \\ R = \sqrt{3(m+1)} \end{cases}$.

Hệ $(*)$ có nghiệm khi đường thẳng (Δ) cắt đường tròn (C) tại ít nhất 1 điểm.

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} \leq d(O;(\Delta)) \leq R \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{6(m+1)} \leq \frac{|m|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{3(m+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 3 \geq 0 \\ m^2 - 6m - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3-\sqrt{21}}{2} \\ m \geq \frac{3+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{21}}{2} \leq m \leq 3+\sqrt{15}$$

Cách 2. Sử dụng phương pháp giải hệ phương trình đại số.

Đặt $u = t.v (t \geq 0)$. Khi đó hệ phương trình $(*)$ trở thành

$$\begin{cases} v(t+1) = m \\ v^2(t^2+1) = 3(m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2(t+1)^2 = m^2 & (3) \\ v^2(t^2+1) = 3(m+1) & (4) \end{cases} (**)$$

Do $m \geq 0 \Rightarrow v = 0$ không là nghiệm của phương trình (4) nên không là nghiệm của hệ $(**)$. Chia từng vế của phương trình (3) cho phương trình (4) ta được

$$\frac{(t+1)^2}{t^2+1} = \frac{m^2}{3(m+1)} \Leftrightarrow \frac{2t}{t^2+1} = \frac{m^2}{3(m+1)} - 1.$$

$$\text{Do } t \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{2t}{t^2+1} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{m^2}{3(m+1)} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 3 \geq 0 \\ m^2 - 6m - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3-\sqrt{21}}{2} \\ m \geq \frac{3+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{21}}{2} \leq m \leq 3+\sqrt{15}$$

Cách 3. Đưa về bài toán giải hệ và biện luận phương trình bậc 2.

Từ phương trình (1) của hệ (*) ta có $u = m - v$ thay vào phương trình (2) ta được

$$2v^2 - 2mv + m^2 - 3m - 3 = 0 \quad (5)$$

Bài toán trở thành

Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình (5) có nghiệm u, v thỏa mãn

$$u \geq 0, v \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -m^2 + 6m + 6 \geq 0. \\ S = u + v = m \geq 0 \\ P = u \cdot v = \frac{1}{2}(m^2 - 3m - 3) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 6 \leq 0. \\ m \geq 0 \\ m^2 - 3m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{21}}{2} \leq m \leq 3+\sqrt{15}$$

Câu 11. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{m^2 + 2 - x^2 - 2y} - y + 1 = 0 \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases}$ có 2 nghiệm?

Giải

Cách 1 . Sử dụng hình học.

Với bài toán này ta có thể dễ thấy có thể đưa về dạng tương giao giữa đường tròn và elip do đó ta có lời giải sau!

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = m^2 + 1 & (2) \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 & (3) \end{cases}$$

Ta thấy (2) là phương trình đường tròn (C) tâm O , bán kính $R = \sqrt{m^2 + 1}$

Phương trình (3) là phương trình Elip (E)

Gọi M, N là giao điểm của Elip (E) với đường thẳng $y = 1$.

$$4x^2 + 9 = 36 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OM = ON = \frac{\sqrt{31}}{2}$$

Kết hợp (1), (3) ta được cung Elip nhỏ MN

Để hệ phương trình có hai nghiệm thì đường tròn (C) phải cắt cung Elip nhỏ MN tại hai điểm phân biệt. Điều này tương đương

$$\begin{aligned} 2 < R \leq \frac{\sqrt{31}}{2} &\Leftrightarrow 2 < \sqrt{m^2 + 1} \leq \frac{\sqrt{31}}{2} \\ &\Leftrightarrow 4 < m^2 + 1 \leq \frac{31}{4} \Leftrightarrow 3 < m^2 \leq \frac{27}{4} \end{aligned}$$

Cách 2. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = m^2 + 1 & (2) \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 & (3) \end{cases}$

Giải hệ phương trình gồm (2), (3) ta được $\begin{cases} 5x^2 = 9m^2 - 27 \\ 5y^2 = 32 - 4m^2 \end{cases}$

Điều kiện để hệ phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} 5x^2 = 9m^2 - 27 > 0 \\ 5y^2 = 32 - 4m^2 \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m^2 < \frac{27}{4}$

Câu 12. Xác định tham số k để hệ sau có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq k & (1) \\ (x+1)^2 + y^2 \leq k & (2) \end{cases}$

Giải

Xem (1) là phương trình hình tròn (C_1) với tâm $I_1(0; -1)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{k}$ và (2) là phương trình hình tròn (C_2) có tâm $I_2(-1; 0)$ và bán kính $R_2 = \sqrt{k} > 0$.

Để hệ có nghiệm duy nhất thì đường tròn (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) và không tiếp xúc trong vì $R_1 = R_2$

$$\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{2} = 2\sqrt{k} \Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Câu 13. Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0 \end{cases} (*)$$

Có nghiệm? Xác định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

Giải

$$\text{Hệ phương trình } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 7 \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1; 7] \\ (x^2 - 2mx + m^2) - (x - m) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1; 7] \\ (x-m)^2 - (x-m) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1; 7] \\ (x-m)(x-m-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1; 7] \\ x \in [m; m+1] \end{cases}.$$

$$\text{Hệ } (*) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow [1; 7] \cap [m; m+1] \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 7 \\ m \leq 1 < 7 \leq m+1 \Leftrightarrow m \in [0; 7]. \\ m \leq 1 \leq m+1 \leq 7 \end{cases}$$

$$\text{Hệ } (*) \text{ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} m=7 \\ m+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=7 \\ m=0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} m=7 \Rightarrow x=7 \\ m=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}.$$

Câu 14. Tìm tham số m để hệ $\begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 \geq 3 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 \leq \frac{m}{m-1} \end{cases} (*)$ có nghiệm?

Giải

Phân tích. Ở bài toán này ta sẽ sử dụng điều kiện cần và đủ để xử lý nó.

Điều kiện cần. Giả sử hệ $(*)$ có nghiệm $(x; y)$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -5x^2 - 2xy + y^2 \leq -3 \\ 6x^2 + 6xy + 3y^2 \leq \frac{3m}{m-1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4xy + 4y^2 \leq \frac{3m}{m-1} - 3 \Leftrightarrow (x + 2y)^2 \leq \frac{3}{m-1} \Leftrightarrow m > 1.$$

Điều kiện đủ. Với $m > 1$ thì $\frac{m}{m-1} > 1$ nên nếu hệ phương trình sau có nghiệm thì phương trình $(*)$

sẽ có nghiệm $\begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 = 3 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x^2 - 2xy + y^2 = -3 \\ 6x^2 + 6xy + 3y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2y)^2 = 0 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 5y^2 = 1 \end{cases}. \text{ Rõ ràng hệ này có nghiệm.}$$

Vậy hệ có nghiệm khi $m > 1$.

Nhận xét. Mấu chốt ở đây là tại sao lại làm xuất hiện được $(x + 2y)^2$, với bài toán này thì ta chỉ cần cộng 2 vế vào với nhau là được, vậy các bài toán khác thì sao? Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu lớp bài toán hệ đẳng cấp chứa tham số thông qua ví dụ sau.

Câu 15. Tìm tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \geq 3 \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \leq \frac{2m-1}{2m+5} \end{cases}$ có nghiệm?

Giải

Hệ bất phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} -5x^2 + 4xy - 2y^2 \leq -3 \\ 21x^2 + 12xy + 6y^2 \leq 3 - \frac{18}{2m+5} \end{cases}$

Cộng 2 vế của hệ phương trình trên ta được

$$(4x + 2y)^2 = 16x^2 + 16xy + 4y^2 \leq -\frac{18}{2m+5}$$

Suy ra để hệ bất phương trình có nghiệm thì $-\frac{18}{2m+5} \geq 0 \Leftrightarrow 2m+5 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{2}$

Bây giờ ta sẽ đi chứng minh với $m < -\frac{5}{2}$ thì hệ đã cho có nghiệm.

Thật vậy ta xét hệ sau $\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 = 3 \\ 21x^2 + 12xy + 6y^2 = 3 \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{7} \\ y = \mp \frac{2}{7} \end{cases}$

Giả sử (x_0, y_0) là nghiệm của hệ phương trình $(*)$, khi đó ta có

$$\begin{cases} 5x_0^2 - 4x_0y_0 + 2y_0^2 = 3 \\ 21x_0^2 + 4x_0y_0 + 6y_0^2 = 3 < 3 - \frac{18}{2m+5} \end{cases}, \text{ với } m < -\frac{5}{2}$$

Suy ra (x_0, y_0) là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

| Các bài toán chứa tham số

Vậy với $m < -\frac{5}{2}$ thì hệ đã cho có nghiệm.

Nhận xét. Bài toán này đã không còn đơn giản như bài toán trên, mấu chốt của chúng ta chính là tìm ra được bất đẳng thức $(4x+2y)^2 = 16x^2 + 16xy + 4y^2 \leq -\frac{18}{2m+5}$, để làm được điều này ta làm như sau. Viết lại hệ đã cho dưới dạng

$$\begin{cases} -5x^2 + 4xy - 2y^2 \leq -3 \\ 7kx^2 + 4kxy + 2ky^2 \leq k \cdot \frac{2m-1}{2m+5}, (k > 0) \end{cases}$$

Cộng 2 vế của hệ phương trình trên ta được

$$(7k-5)x^2 + 4(k+1)xy + 2(k-1)y^2 \leq -3 + k \cdot \frac{2m-1}{2m+5}$$

Ta cần vế trái là dạng hằng đẳng thức, do đó ta cần có

$$\begin{cases} k > 0, 7k-5 > 0, k-1 > 0 \\ \sqrt{7k-5} \cdot \sqrt{2(k-1)} = 2(k+1) \Leftrightarrow 5k^2 - 16k + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = \frac{1}{5} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nếu lấy $k = 3$ thì ta sẽ có bất đẳng thức $(4x+2y)^2 = 16x^2 + 16xy + 4y^2 \leq -\frac{18}{2m+5}$.

Câu 16. Tìm tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 - x \leq m \\ x^2 - 2xy - 2x \leq m - 2 \end{cases}$ có nghiệm?

Giải

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 - x \leq m \\ x^2 - 2xy - 2x + 2 \leq m \\ 2(x^2 - xy + 2y^2 - x) + (x^2 - 2xy - 2x + 2) \leq 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 - x \leq m \\ x^2 - 2xy - 2x + 2 \leq m \\ 2(x-2y)^2 + 2(x-1)^2 \leq 3m \end{cases}$$

Suy ra để hệ có nghiệm thì ta cần $m \geq 0$.

Và ngược lại, nếu $m \geq 0$ thì hệ luôn có nghiệm $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Vậy $m \geq 0$ là giá trị cần tìm.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases} \quad (*)$$

Giải

Đặt $m = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105}$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = m \end{cases}$.

Do $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên đặt $y = tx$, ($x \neq 0$) thì hệ tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1-2t-3t^2) = 8 & (1) \\ x^2(2+4t+5t^2) = m & (2) \end{cases} \Rightarrow \frac{1-2t-3t^2}{2+4t+5t^2} = \frac{8}{m}$$

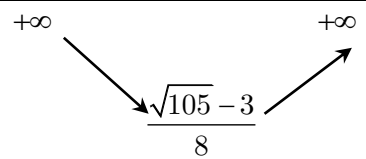
$$\Leftrightarrow \frac{m}{8} = \frac{(2+4t+5t^2)}{1-2t-3t^2} = f(t) \quad (3), \quad \forall t \neq -1; t \neq \frac{1}{3}.$$

Từ (2) $\Rightarrow 1-2t-3t^2 > 0 \Leftrightarrow t \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{5t^2+4t+2}{-3t^2-2t+1}$ trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

Ta có $f'(t) = \frac{2t^2+22t+8}{(-3t^2-2t+1)^2}$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{-11-\sqrt{105}}{2} \vee t_2 = \frac{-11+\sqrt{105}}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	t_1	-1	t_2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-	-	0	+
$f(t)$				$+\infty$  $\frac{\sqrt{105}-3}{8}$		

Dựa vào bảng biến thiên, để hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{m}{8} \geq \min_{\left(-1; \frac{1}{3}\right)} f(t) = \frac{\sqrt{105}-3}{8} \Leftrightarrow m \geq \sqrt{105}-3$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \geq \sqrt{105} - 3 \Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-3)(a^2-2a+3) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -1 \vee a \geq 3.$$

Vậy để hệ phương trình có nghiệm thì $a \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Câu 18. Tìm a để bất phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{1+a} (*) \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần. Giả sử hệ bất phương trình có nghiệm $(x_0; y_0)$ và a_0 là một trong các giá trị cần tìm.

Vậy thì

$$\begin{cases} x_0^2 + 2x_0y_0 - 7y_0^2 \geq \frac{1-a_0}{1+a_0} \\ 3x_0^2 + 10x_0y_0 - 5y_0^2 \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_0^2 - 4x_0y_0 + 14y_0^2 \leq 2 - \frac{4}{1+a_0} & (1) \\ 3x_0^2 + 10x_0y_0 - 5y_0^2 \leq -2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$x_0^2 + 6x_0y_0 + 10y_0^2 \leq -\frac{4}{1+a_0} \Leftrightarrow (x_0 + 3y_0)^2 \leq -\frac{4}{1+a_0} \Rightarrow 1+a_0 < 0 \Rightarrow a_0 < -1$$

Vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm là $a < -1$.

Điều kiện đủ. Với $a < -1$ thì $\frac{1-a}{1+a} < -1$.

Do đó nếu hệ phương trình (I): $\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1 \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 = -2 \end{cases}$ có nghiệm thì hệ bất phương trình đã cho có nghiệm.

Ta xét hệ (I) .
$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1 \\ (x + 3y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2}; y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2}; y = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Hệ (I) có nghiệm nên hệ bất phương trình đã cho có nghiệm.

Tóm lại, hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $a < -1$.

Câu 19. Giả sử x,y là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$ (*). Xác định a để tích $P = xy$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Phân tích. Ta thấy rằng trong hệ xuất hiện 2 biểu thức đối xứng theo x và y do đó ta sẽ nghĩ ngay tới phương pháp đặt ẩn phụ tổng – tích.

Biến đổi phương trình tương đương

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ (x + y)^2 - 2xy = a^2 + 2a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = x + y = 2a - 1 \\ P = xy = \frac{1}{2}(3a^2 - 6a + 4) \end{cases}$$

Để x, y là nghiệm hệ thì $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow 2a^2 - 8a + 7 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

Xét hàm số $P = f(a) = \frac{1}{2}(3a^2 - 6a + 4)$ trên đoạn $\left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Ta có $P' = f'(a) = 3a - 3$. Cho $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Bảng biến thiên

a	$-\infty$	1	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$P' = f'(a)$	-	0	+	+	+
$P = f(a)$					

Dựa vào bảng biến thiên $P_{\min} = \frac{11}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ khi $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x = y^2 + a \\ y = x^2 + b \end{cases}$ ẩn x,y với a,b là các tham số thực. Biết rằng hệ phương trình này có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) . Tính giá trị tích $P = x_0 y_0$.

Giải

Đầu tiên ta cùng xem qua lời giải sau

Giả sử với các giá trị a,b nào đó, hệ đã cho có nghiệm duy nhất là (x_0, y_0) .

Đặt $x_0 y_0 = k \in \mathbb{R}$.

- Nếu $x_0 = 0$ thì $y_0 = b$ và $b^2 + a = 0$, suy ra $a \leq 0$.

Trong hệ đã cho, thay y từ phương trình thứ hai lên phương trình thứ nhất, ta có

$$(x^2 + b)^2 + a = x \Leftrightarrow x^4 + 2bx^2 + b^2 + a = x \Leftrightarrow x(x^3 + 2bx - 1) = 0 (*)$$

Ta xét phương trình $x^3 + 2bx - 1 = 0$ và đặt $f(x) = x^3 + 2bx - 1, x \in \mathbb{R}$.

Ta thấy hàm này liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = -1 < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên $f(x) = 0$ hay phương trình $x^3 + 2bx - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương $x = x_1 > 0$.

Dễ thấy rằng điều kiện của x thỏa mãn đề bài là $x = y^2 + a \geq a$ nên cả hai nghiệm đã nêu $x = x_0 = 0, x = x_1$ của phương trình (*) đều thỏa mãn. Mỗi giá trị x cho ta đúng một giá trị y nên trong trường hợp này hệ có ít nhất hai nghiệm phân biệt, không đúng với đề bài.

- Nếu $y_0 = 0$ thì cũng xét tương tự như trên.
- Nếu $x_0, y_0 \neq 0$. Thay $y_0 = \frac{k}{x_0}$ vào hai phương trình của hệ đã cho, ta được

$$\begin{cases} x_0 = \frac{k^2}{x_0^2} + a \\ \frac{k}{x_0} = x_0^2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 = k^2 + ax_0^2 \\ k = x_0^3 + bx_0 \end{cases} \Rightarrow k = k^2 + ax_0^2 + bx_0 \Leftrightarrow k^2 - k + (ax_0^2 + bx_0) = 0$$

Hệ có nghiệm duy nhất nên phương trình bậc hai theo k cũng có nghiệm duy nhất, tức là $k = \frac{1}{2}$.

Vậy nếu hệ có nghiệm duy nhất thì tích $P = x_0 y_0 = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Lời giải trên tuy nhìn hợp lí nhưng thật ra đã có một sai lầm rất tinh vi, đó là cho rằng hệ đã cho và phương trình thu được sau phép thế, còn gọi là phương trình hệ quả, là tương đương với nhau. Ở đây, rõ ràng nếu hệ phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất thì chưa hẳn phương trình cuối theo biến k là $k^2 - k + (ax_0^2 + bx_0) = 0$ có nghiệm duy nhất, trong đó vẫn có thể có một nghiệm nhưng không thỏa đề bài. Cách biến đổi đại số dùng cho bài này khó có thể tìm ra được kết quả chính xác.

Lời giải đúng là như sau

Trong hệ phương trình đã cho, thay y bởi $x^2 + b$ vào phương trình trên, ta có.

$$x = (x^2 + b)^2 + a$$

Dễ thấy các nghiệm của phương trình này đều thỏa đề bài vì $x \geq a$, mà mỗi nghiệm như vậy cho ta một giá trị tương ứng của y nên điều kiện để hệ đã cho có nghiệm duy nhất là phương trình ẩn x trên có nghiệm duy nhất.

Phương trình bậc 4 có nghiệm duy nhất khi nó có nghiệm kép, điều đó có nghĩa là nghiệm đó cũng là nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0.

Gọi x_0 là nghiệm đó, tương ứng với giá trị y_0 , thì ta có hệ sau
$$\begin{cases} x_0 = (x_0^2 + b)^2 + a \\ 4x_0(x_0^2 + b) = 1 \end{cases}$$

Hơn nữa, do x_0 là nghiệm của hệ ban đầu nên $x_0^2 + b = y_0$, suy ra $x_0 y_0 = \frac{1}{4}$.

Vậy nếu hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì tích $P = x_0 y_0 = \frac{1}{4}$.

Câu 21. Tìm tất cả giá trị của tham số a để hệ phương trình $\begin{cases} x + 4|y| = |x| \\ |y| + |x - a| = 1 \end{cases}$ có đúng 2 nghiệm phân

biệt?

Giải

Ta xét hai trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** Nếu $x \geq 0$ thì $y = 0$. Khi đó
 - + Với $a > 1$ thì hệ có hai nghiệm phân biệt với $x \geq 0$ là $(a-1; 0), (a+1; 0)$
 - + Với $-1 \leq a \leq 1$ hệ chỉ có một nghiệm với $x \geq 0$ là $(a+1; 0)$.
 - + Với $a < -1$ thì hệ đã cho vô nghiệm.
- **Trường hợp 2.** Nếu $x < 0$, ta có $|y| = \frac{-x}{2}$ và $|x-a| = 1 + \frac{x}{2}$

$$\text{Hay } \begin{cases} 1 + \frac{x}{2} \geq 0 \\ x-a = 1 + \frac{x}{2} \\ x-a = -1 - \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = 2(1+a) \\ x = \frac{2(a-1)}{3} \end{cases}$$

Mặt khác $-2 \leq 2(a+1) < 0 \Leftrightarrow -2 \leq a < -1$ và $-2 \leq \frac{2}{3}(a-1) < 0 \Leftrightarrow -2 \leq a < 1$

Rõ ràng nếu $(x; y)$ là một nghiệm của hệ với $x < 0$ thì $y \neq 0$ và $(x; -y)$ cũng là một nghiệm của hệ.

Do đó.

+ Khi $a < -2$ thì hệ vô nghiệm.

+ Khi $a = -2$ ta có $x = 2(a+1) = -2$ và $x = \frac{2}{3}(a-1) = -2$ nên hệ có đúng hai nghiệm phân biệt $(2; \pm 1)$.

+ Khi $-2 < a < 1$ thì $2(a+1) \neq \frac{2}{3}(a-1)$ và hai giá trị này cho hệ có 4 nghiệm.

+ Khi $-1 < a < 1$ thì hệ có 3 nghiệm.

Tóm lại hệ đã cho có đúng hai nghiệm khi $\begin{cases} a \geq 1 \\ a = -2 \end{cases}$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} \leq a \end{cases} \quad (*)$ có nghiệm thỏa mãn điều kiện $x \geq 4$

Giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = \sqrt{y} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = x \\ v^2 = y \end{cases}. \text{ Do } x \geq 4 \Rightarrow u \geq 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Hệ phương trình } (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ \sqrt{u^2+5} + \sqrt{v^2+3} \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3-v \\ \sqrt{(3-v)^2+5} + \sqrt{v^2+3} \leq a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u=3-v \geq 2 \\ \sqrt{14-6v+v^2} + \sqrt{v^2+3} \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq v \leq 1 \\ \sqrt{v^2-6v+14} + \sqrt{v^2+3} \leq a \end{cases} \quad (1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(v) = \sqrt{v^2-6v+14} + \sqrt{v^2+3}$ trên đoạn $[0; 1]$.

$$\text{Ta có } f'(v) = \frac{v-3}{\sqrt{v^2-6v+14}} + \frac{v}{\sqrt{v^2+3}} = \frac{(v-3)\sqrt{v^2+3} + v\sqrt{v^2-6v+14}}{\sqrt{(v^2-6v+14)(v^2+3)}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Cho } f'(v) &= 0 \Leftrightarrow (v-3)\sqrt{v^2+3} + v\sqrt{v^2-6v+14} = 0 \\ &\Leftrightarrow (3-v)\sqrt{v^2+3} = v\sqrt{v^2-6v+14} \Leftrightarrow (3-v)^2(v^2+3) = v^2(v^2-6v+14) \\ &\Leftrightarrow 5v^2 = 3(v-3)^2 \Leftrightarrow 2v^2 + 18v - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{-9+\sqrt{135}}{2} \notin [0;1] \\ v_2 = \frac{-9-\sqrt{135}}{2} \notin [0;1] \end{cases}. \end{aligned}$$

Bảng biến thiên

v	$-\infty$	v_2	0	1	v_1	$+\infty$	
$f'(v)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(v)$				$\sqrt{14} + \sqrt{3}$ 	5		

Để(*) có nghiệm thỏa $x \geq 4$ thì hệ (1) phải có nghiệm. Dựa vào bảng biến thiên, để hệ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow a \geq \min_{[0;1]} f(v) \Leftrightarrow a \geq 5$.

Câu 23. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2y^2 + (1-m)\sqrt{1-x}} + 3m^2 - 2m = y + m \\ 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y \end{cases}$ có 2 nghiệm phân biệt khi thỏa mãn điều kiện $2y - x \leq 2023$.

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \leq 1 \\ 2y^2 + (1-m)\sqrt{1-x} + 3m^2 - 2m \geq 0 \end{cases}$

Xét phương trình $2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y, (2)$.

Ta đặt $a = \sqrt{1-x} \geq 0$ khi đó $x = 1 - a^2$ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2y^3 + 2(1-a^2)a &= 3a - y \Leftrightarrow (y-a)(2y^2 + 2ay + 2a^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = a \text{ do } 2y^2 + 2ay + 2a^2 + 1 = a^2 + y^2 + (a+y)^2 + 1 > 0. \end{aligned}$$

Với $y = a$ ta có $y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x = 1 - y^2 \end{cases}$.

Từ đó $\begin{cases} 2y - x \leq 2023 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)^2 \leq 45^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -46 \leq y \leq 44 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 44$

Lấy $y = \sqrt{1-x}$ thay vào phương trình đầu ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{2y^2 + (1-m)y + 3m^2 - 2m} &= y + m, (1) \\ \sqrt{2y^2 + (1-m)y + 3m^2 - 2m} &= y + m \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + (1-m)y + 3m^2 - 2m = (y+m)^2 \\ y \geq -m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + (1-3m)y + 2m^2 - 2m = 0 \\ y \geq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2m \\ y = m-1(3) \\ y \geq -m \end{cases} \end{aligned}$$

| Các bài toán chứa tham số

Để hệ thỏa mãn yêu cầu bài toán thì (3) phải có hai nghiệm y phân biệt thuộc $[0; 44]$ điều kiện

$$\text{là } \begin{cases} 0 \leq 2m \leq 44 \\ 0 \leq m-1 \leq 44 \\ 2m \geq -m \\ m-1 \geq -m \\ 2m \neq m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 22 \\ 1 \leq m \leq 45 \\ m \geq \frac{1}{2} \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 22$$

Nhận xét.

Ngoài cách xử lý phương trình (2) như ở trên thì ta có thể sử dụng phương pháp hàm đặc trưng để xử lý, ta thấy phương trình có dạng $f(y) = f(\sqrt{1-x}), f(t) = 2t^3 + t$ là hàm tăng trên $\mathbb{R}$ do đó $y = \sqrt{1-x}$

Câu 24. Xác định tham số a để hệ sau đây có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} (x+1)^2 = y+a & (1) \\ (y+1)^2 = x+a & (2) \end{cases} \quad (*)$$

Giải

Do vai trò của x và y là như nhau trong hệ 2 phương trình. Vì vậy, nếu $(x; y)$ là nghiệm hệ thì $(y; x)$ cũng là nghiệm hệ. Như vậy nếu $x = y$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất. Thay $x = y$ vào (1) ta được $(1) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - a = 0 \quad (3)$

Phương trình (3) có nghiệm duy nhất khi $\Delta = 4a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$.

Điều kiện đủ. Với $a = \frac{3}{4}$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = y + \frac{3}{4} \\ (y+1)^2 = x + \frac{3}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = y + \frac{3}{4} \\ (x+1)^2 - (y+1)^2 = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = y + \frac{3}{4} \\ (x-y)(x+y+3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (x+1)^2 = x + \frac{3}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ (x+1)^2 = -x - \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{2} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy $a = \frac{3}{4}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của k để hệ
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - k(\sqrt{x+y} - 1) = 1 \\ x + y = xy + 1 \end{cases} \quad (*)$$
 có nghiệm duy nhất?

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$.

Hệ phương trình $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - k(\sqrt{x+y} - 1) = 1 \\ x - 1 + y(1-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - k(\sqrt{x+y} - 1) = 1 \\ (x-1)(y-1) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - k(\sqrt{x+y} - 1) = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2} - k(\sqrt{y+1} - 1) = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - k(\sqrt{x+y} - 1) = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2} - k(\sqrt{x+1} - 1) = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì (1) có nghiệm duy nhất, còn (2) vô nghiệm hoặc ngược lại. Nhưng bản chất của hệ (1) và hệ (2) là giống nhau. Tức là (1) có nghiệm duy nhất thì (2) cũng có nghiệm duy nhất, hệ (1) vô nghiệm thì hệ (2) cũng vô nghiệm,... Do đó, không tồn tại giá trị k thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2.

Để ý vai trò của x và y là như nhau trong 2 phương trình của hệ (*). Vì vậy, nếu $(x; y)$ là nghiệm (*) thì $(y; x)$ cũng là nghiệm.

Hay nói cách khác, điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $x = y$.

Thay $x = y$ vào (*) ta được
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 1} - k(\sqrt{2x} - 1) = 1 \\ 2x = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 0 \end{cases}.$$

Điều kiện đủ. Thay $k = 0$ vào hệ ở câu a ta thu được 3 nghiệm. Do đó không tồn tại k để hệ có nghiệm duy nhất.

Câu 26. Tìm m để hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + m = 0 & (2) \end{cases}$$
 có nghiệm?

Giải

Cách 1. Phân tích nhân tử

Điều kiện
$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 2y - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (1) thành

$$\begin{aligned} x^3 - 3x &= (y - 1)^3 - 3(y - 1) \Leftrightarrow x^3 - (y - 1)^3 - 3(x - y + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y + 1) \left[x^2 + x(y - 1) + (y - 1)^2 - 3 \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y + 1) = 0 \\ x^2 + x(y - 1) + (y - 1)^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x + 1 \end{aligned}$$

Do
$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 \leq 1; x(y - 1) \leq 1; (y - 1)^2 \leq 1. \text{ Nên}$$

$$x^2 + x(y - 1) + (y - 1)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x(y - 1) = 1 \\ (y - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Thay $y = x + 1$ vào (2) ta được $x^2 - 2\sqrt{1 - x^2} + m = 0$

Đặt $v = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow v \in [0; 1] \Rightarrow (2)$ trở thành $v^2 + 2v - 1 = m (*)$

Hệ phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm trong đoạn $[0; 1]$.

| Các bài toán chứa tham số

Vẽ bảng biến thiên của hàm $g(v) = v^2 + 2v - 1$ ta tìm được $\min_{[0;1]} g(v) = -1; \max_{[0;1]} g(v) = 2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \in [-1; 2]$.

Cách 2. Hàm đặc trưng

Điều kiện $x \in [-1; 1]; y \in [0; 2]$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+1)^3 - 3(x+1)^2 = y^3 - 3y^2$ (3)

Vì $x \in [-1; 1] \Rightarrow x+1 \in [0; 2]$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2, t \in [0; 2] \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t < 0, \forall t \in (0; 2)$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[0; 2]$. Phương trình (3) có dạng $f(x+1) = f(y) \Rightarrow y = x+1$

Thay vào phương trình (2) ta được $x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0, x \in [-1; 1]$ (4)

Đặt $u = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [-1; 1] \Rightarrow u \in [0; 1]$, phương trình (4) trở thành $u^2 + 2u - 1 = m$ (5)

Xét hàm số $g(u) = u^2 + 2u - 1, u \in [0; 1] \Rightarrow g'(u) = 2u + 2 > 0, \forall u \in [0; 1]$

Lập bảng biến thiên ta thấy hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$.

Câu 27. Tìm m để hệ $\begin{cases} 1+|y|-\sqrt{x^2-2x+2}=0 \\ y^2+(m-1)(x^2-2x)=m^2-4m+3 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất ?

Giải

Phân tích. Để ý chút thì với bài này ở cả 2 phương trình ta sẽ dồn về 2 ẩn là $y, x-1$ đồng thời dễ dàng nhận ra nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $(2-x_0; -y_0)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình khi đó bài toán trở nên vô cùng đơn giản khi sử dụng điều kiện cần và đủ. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 1+|y|-\sqrt{(x-1)^2+1}=0 \\ y^2+(m-1)(x-1)^2=m^2-3m+2 \end{cases} \quad (1)$$

Ta thấy $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $(2-x_0; -y_0)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình.

Điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x_0 = 2-x_0 \\ y_0 = -y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

Thay vào (1) ta được $m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

Điều kiện đủ

- Với $m = 1$, ta có hệ $\begin{cases} 1+|y|-\sqrt{(x-1)^2+1}=0 \\ y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ - thỏa mãn
- Với $m = 2$, ta có hệ $\begin{cases} 1+|y|-\sqrt{(x-1)^2+1}=0 \\ y^2+(x-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ - thỏa mãn

Vậy $m = 1, m = 2$ là 2 giá trị cần tìm.

Câu 28. Tìm m nhỏ nhất để hệ $\begin{cases} (x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+4})=1 \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}=m \end{cases}$ có nghiệm ?

Giải

Đặt $a = x + \sqrt{x^2 + 1}, b = y + \sqrt{y^2 + 4}$. Do $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} > |x| \\ \sqrt{y^2 + 4} > |y| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + x > |x| + x \geq 0 \\ \sqrt{y^2 + 4} + y > |y| + y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$

Ta có $\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \sqrt{x^2 + 1} - x, \frac{4}{b} = \frac{4}{\sqrt{y^2 + 4} + y} = \sqrt{y^2 + 4} - y$

Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} ab = 1 & (1) \\ a + b + \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 2m & (2) \end{cases}$

Ta có $(2) \Leftrightarrow 2m = a + b + \frac{4a + b}{ab} = 5a + 2b \geq 2\sqrt{10ab} \geq 2\sqrt{10} \Rightarrow m \geq \sqrt{10}$

Với $m = \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} 5a = 2b \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{10}}{5} \\ b = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) = \frac{-3\sqrt{10}}{20} \\ y = \frac{1}{2} \left(b - \frac{4}{b} \right) = \frac{-3\sqrt{10}}{20} \end{cases}$

Vậy GTNN của m để hệ phương trình có nghiệm là $\sqrt{10}$.

Câu 29. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{y+2} = \frac{5m^2 + 15m + 10}{2(5m+1)} \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = \frac{5m^2 + 7m - 6}{2(5m+1)} \end{cases}$ có nghiệm ?

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 2 \end{cases}$. Cộng và trừ tương ứng hai vế của hai phương trình trong hệ ta được

$$\begin{cases} (\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}) + (\sqrt{y+2} + \sqrt{y-2}) = \frac{10m^2 + 22m + 4}{2(5m+1)} \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) + (\sqrt{y+2} - \sqrt{y-2}) = \frac{8m + 16}{2(5m+1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}) + (\sqrt{y+2} + \sqrt{y-2}) = m + 2 \\ \frac{4}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}} + \frac{4}{\sqrt{y+2} + \sqrt{y-2}} = \frac{8m + 16}{2(5m+1)} \end{cases} \quad (1).$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} \Rightarrow a \geq 2 \forall x \geq 1 \\ b = \sqrt{y+2} + \sqrt{y-2} \Rightarrow b \geq 2 \forall y \geq 2 \end{cases}$.

Phương trình (1) trở thành $\begin{cases} a + b = m + 2 \\ \frac{4}{a} + \frac{4}{b} = \frac{4(m+2)}{5m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = m + 2 \\ \frac{4(a+b)}{a.b} = \frac{4(m+2)}{5m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = m + 2 \\ a.b = 5m + 1 \end{cases} \quad (2)$

Hệ đã cho có nghiệm khi hệ (2) có nghiệm a, b thỏa mãn $a \geq 2, b \geq 2$, suy ra

$$\begin{cases} (a-2) + (b-2) \geq 0 \\ (a-2)(b-2) \geq 0 \\ (a+b)^2 \geq 4a.b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2) - 4 \geq 0 \\ (5m+1) - 2(m+2) + 4 \geq 0 \\ (m+2)^2 \geq 4(5m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ 3m \geq -1 \\ m^2 - 16m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 16$$

Vậy $m \geq 16$ thì hệ phương trình có nghiệm.

Câu 30. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{m-y^2} + y\sqrt{m-x^2} = m \\ 2x-y=3 \end{cases}$ có nghiệm ?

Giải

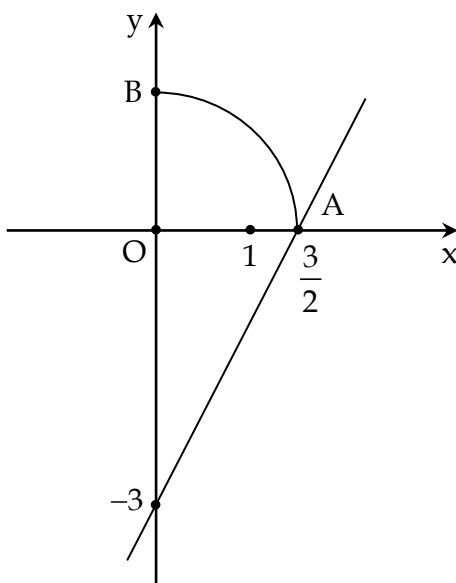
Điều kiện $\begin{cases} x^2 \leq m \\ y^2 \leq m \end{cases}$

Phương trình $x\sqrt{m-y^2} + y\sqrt{m-x^2} = m \Leftrightarrow (x-\sqrt{m-y^2})^2 + (y-\sqrt{m-x^2})^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{m-y^2} \\ y = \sqrt{m-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}, (1)$$

Phương trình $x^2 + y^2 = m$ ($m > 0$), là phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = \sqrt{m}$

Suy ra (1) biểu diễn trên hệ trục tọa độ Oxy , là dây cung AB như hình vẽ.



Để hệ có nghiệm thì đường thẳng $2x - y = 3$ cắt dây cung $AB \Leftrightarrow \sqrt{m} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{4}$.

Câu 31. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} (x^2 + mxy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185 & (1) \\ (x^2 - mxy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 65 & (2) \end{cases}$ có nghiệm ?

Giải

Cộng từng vế 2 phương trình ta được $2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 250 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$

Thay vào hệ ban đầu ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (25 + mxy) \cdot 5 = 185 \\ (25 - mxy) \cdot 5 = 65 \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{12}{m} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = \frac{12}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 25 \\ xy = \frac{12}{m} \end{cases} (*)$$

Đặt $S = x + y; P = xy$. Thay vào hệ trên ta có

$$S^2 - 2 \cdot \frac{12}{m} = 25 \Leftrightarrow S^2 \geq 0 \Leftrightarrow S \geq \frac{25m + 24}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{24}{25} \\ m > 0 \end{cases} (1)$$

$$\text{Hệ (*) có nghiệm } S^2 \geq 4P \Leftrightarrow \frac{25m+24}{m} \geq 4 \cdot \frac{12}{m} \Leftrightarrow \frac{25m-24}{m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq \frac{24}{25} \end{cases} (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{24}{25} \\ m \geq \frac{24}{25} \end{cases}$$

Câu 32. Tìm m để hệ $\begin{cases} \sqrt{2x+y} + \sqrt{x-2y} = 3 \\ \sqrt{2x+y} + 5x - 5y + \frac{1}{16} = m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất ?

Giải

Phân tích. Không khó để nhận ra ý tưởng đặt ẩn phụ từ hệ phương trình này.

$$\text{Đặt } a = \sqrt{2x+y}; b = \sqrt{x-2y} \Rightarrow a, b \in [0; 3]; b = 3 - a$$

$$\text{Rút ra được } x = \frac{2a^2 + b^2}{5} = \frac{3a^2 - 6a + 9}{5}; y = \frac{a^2 - 2b^2}{5} = \frac{-a^2 + 12a - 18}{5}.$$

Nhận thấy rằng với một giá trị của $a \in [0; 3]$ cho ta một giá trị $(x; y)$.

$$\text{Hệ phương trình đã cho có dạng } \begin{cases} a + b = 3 \\ a + a^2 + 3b^2 + \frac{1}{16} = m \end{cases} (2)$$

$$\text{Thế } b = 3 - a \text{ vào (2) ta có phương trình } 4a^2 - 17a + \frac{433}{16} = m (3)$$

Yêu cầu đề bài dẫn đến phương trình (3) có nghiệm duy nhất $a \in [0; 3]$.

$$\text{Lập bảng biến thiên của hàm số } f(a) = 4a^2 - 17a + \frac{433}{16}.$$

a	0	$\frac{17}{8}$	3
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	12,0625		27,0625
		9	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m = 9; 12,0625 < m \leq 27,0625$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Câu 33. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$ có nghiệm ?

Giải

Phân tích. Ý tưởng quá rõ ràng, ta sẽ đặt ẩn phụ để đưa hệ về bài toán tìm nghiệm của phương trình bậc 2. Đặt $u = \sqrt{x}; v = \sqrt{y}; u \geq 0; v \geq 0$

$$\text{Hệ đã cho trở thành } \begin{cases} u + v = 1 \\ u^3 + v^3 = 1 - 3m \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = m \end{cases}$$

Ta có u, v là hai nghiệm của phương trình. $X^2 - X + m = 0 (**)$

Hệ đã cho có nghiệm $(x; y) \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm $u \geq 0; v \geq 0 \Leftrightarrow$ Phương trình $(**)$ có hai nghiệm X

$$\text{không âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4m \geq 0 \\ 1 \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{4} \\ 1 \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$$

Câu 34. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} & (1) \\ \sqrt{2y^2+1} + y = m + \sqrt{x+4} & (2) \end{cases}$ có nghiệm ?

Giải

Phân tích. Ta dễ dàng thấy dáng dấp của bài toán hàm đặc trưng ở ngay phương trình đầu tiên, do đó ta có 2 hướng đi, một là sử dụng hàm đặc trưng, 2 là sử dụng cách phân tích nhân tử để rút mối liên hệ giữa 2 ẩn.

Điều kiện $-4 \leq x \leq 1$

Cách 1. Hàm đặc trưng.

Ta có phương trình $(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(\sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x}$.

Xét $f(t) = 2t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$. Dễ thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà từ (1) có

$$f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 1 - y^2, (y \geq 0)$$

Thay vào (2) ta có $m = \sqrt{2y^2+1} + y - \sqrt{5-y^2} \quad (3)$ với $0 \leq y \leq \sqrt{5}$.

Xét $g(y) = \sqrt{2y^2+1} + y - \sqrt{5-y^2}$ trên $[0; \sqrt{5}]$

Ta có $g'(y) = \frac{2y}{\sqrt{2y^2+1}} + 1 + \frac{y}{\sqrt{5-y^2}} > 0, \forall y \in (0; \sqrt{5})$ nên $g(y)$ đồng biến trên $[0; \sqrt{5}]$.

Hệ có nghiệm khi (3) có nghiệm $\Leftrightarrow g(0) \leq m \leq g(\sqrt{5})$, hay $1 - \sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{11} + \sqrt{5}$.

Cách 2. Sử dụng kiến thức lớp 10.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(\sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x}$.

Đặt $b = \sqrt{1-x}$, phương trình trở thành

$$2y^3 + y = 2b^3 + b \Leftrightarrow 2(y-b)(y^2 + yb + b^2) = b - y \Leftrightarrow \begin{cases} y = b \\ 2\left[\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] = -1(VN) \end{cases}$$

Vậy $y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 1 - y^2, (y \geq 0)$.

Thay vào (2) ta có $m = \sqrt{2y^2+1} + y - \sqrt{5-y^2} \quad (3)$ với $0 \leq y \leq \sqrt{5}$.

Xét $g(y) = \sqrt{2y^2+1} + y - \sqrt{5-y^2}$ trên $[0; \sqrt{5}]$

Dễ thấy $1 \leq \sqrt{2y^2+1} \leq \sqrt{11}; -\sqrt{5} \leq -\sqrt{5-y^2} \leq 0$, do đó

$$\min_{[0; \sqrt{5}]} g(y) = 1 - \sqrt{5} \Leftrightarrow y = 0; \max_{[0; \sqrt{5}]} g(y) = \sqrt{11} + \sqrt{5} \Leftrightarrow y = \sqrt{5}.$$

Hệ có nghiệm khi (3) có nghiệm $\Leftrightarrow g(0) \leq m \leq g(\sqrt{5})$, hay $1 - \sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{11} + \sqrt{5}$.

Câu 35. Tìm a để hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - a\sqrt{y^2 + 1} = 1 \\ x + y + \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} = a^2 \end{cases}$$
 có nghiệm ?

Giải

Phân tích. Một bài toán không quá khó, ta dễ dàng nhìn thấy ẩn phụ khi nhân liên hợp mẫu của phương trình 2, tuy nhiên ta sẽ tiếp cận bài toán này bằng phương pháp sử dụng điều kiện cần và đủ! Ta có hệ tương đương

$$\begin{cases} 3x - a\sqrt{y^2 + 1} = 1 \\ x + y + \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - a\sqrt{y^2 + 1} = 1 \\ x + \sqrt{y^2 + 1} = a^2 \end{cases} (I)$$

Điều kiện cần. Thấy rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì hệ cũng có nghiệm $(x_0, -y_0)$, bởi vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $y_0 = 0$. Thay $y_0 = 0$ vào (I) có

$$\begin{cases} 3x - a = 1 \\ x + 1 = a^2 \end{cases} \Rightarrow 3a^2 - a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Điều kiện đủ.

- Với $a = -1$, hệ (I) trở thành
$$\begin{cases} 3x + \sqrt{y^2 + 1} = 1 \\ x + \sqrt{y^2 + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$
- Với $a = \frac{4}{3}$, hệ (I) trở thành
$$\begin{cases} 3x - \frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 1} = 1 \\ x + \sqrt{y^2 + 1} = \frac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{9} \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy $a = -1; a = \frac{4}{3}$ là các giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36. Tìm m để hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y + m = 0 & (1) \\ \sqrt{xy} + y = 2 & (2) \end{cases}$$
 có nghiệm ?

Giải

Điều kiện $xy \geq 0$.

Cách 1. Ta có (1) $\Leftrightarrow x = y - m$. Thay $x = y - m$ vào (2) ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} + y = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{y(y-m)} + y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{y(y-m)} = 2 - y \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y \geq 0 \\ y(y-m) = (2-y)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2 \\ y^2 - my = y^2 - 4y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2 \\ (4-m)y = 4 \end{cases} (*) \end{aligned}$$

Nếu $4 - m = 0 \Leftrightarrow m = 4$ khi đó (*) $\Leftrightarrow 0 = 4$ (vô lý) $\Rightarrow m = 4$ không thỏa mãn.

Nếu $4 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$ khi đó (*) $\Leftrightarrow y = \frac{4}{4-m}$.

Do $y \leq 2$ nên $\frac{4}{4-m} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2m-4}{4-m} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m \leq 2 \end{cases}$.

Cách 2. Ta có $\sqrt{xy} + y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{xy} = 2 - y$ (*).

Do $y = 0$ không thỏa mãn phương trình (*) nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2 \\ x = \frac{y^2 - 4y + 4}{y} \end{cases}$.

Thay $x = \frac{y^2 - 4y + 4}{y}$ vào phương trình (1) ta được

$$\frac{y^2 - 4y + 4}{y} - y + m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4y - 4}{y} \quad (4).$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (4) có nghiệm $y \leq 2$.

Xét hàm số $f(y) = \frac{4y - 4}{y}$ với $y \leq 2$, ta có $f'(y) = \frac{4}{y} > 0$ với $\forall y \in (-\infty; 0)$ và $(0; 2]$.

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng chỉ ra phương trình (4) có nghiệm khi $\begin{cases} m \leq 2 \\ m > 4 \end{cases}$.

Câu 37. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4 - 2x - 3y^2} + x + y = 0 \\ (y^2 + 4y + 7)(x^2 + 1) = -m^4 + 2m^2 + 3 \end{cases}$ có nghiệm?

Giải

Phân tích. Một câu hệ khá là khó yêu cầu ta phải kết hợp điều kiện 2 phương trình của hệ với nhau để có thể xử lý nó.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4 - 2x - 3y^2} + x + y = 0 & (1) \\ (y^2 + 4y + 7)(x^2 + 1) = -m^4 + 2m^2 + 3 & (2) \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{4 - 2x - 3y^2} = -(x + y) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 0 \\ x^2 + 2(y + 1)x + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad (3)$

Để tồn tại x trong phương trình (3) ta phải có

$$\Delta'_x = (y + 1)^2 - 4y^2 + 4 = -3y^2 + 2y + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{5}{3}.$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow [(y + 1)^2 + 2(y + 1) + 4](x^2 + 1) = 3 - m^4 + 2m^2$

$$\Leftrightarrow [(y + 1)^2 + 2(y + 1) + 4](x^2 + 1) = 4 - (m^2 - 1)^2 \quad (4)$$

Với mọi x, y thỏa mãn $y \in \left[-1; \frac{5}{3}\right]$, $x + y \leq 0$ ta có

- $VT(4) = [(y + 1)^2 + 2(y + 1) + 4](x^2 + 1) \geq 4$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0, y = -1$
- $VP(4) = 4 - (m^2 - 1)^2 \leq 4$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m = \pm 1$

Do đó điều kiện cần để hệ có nghiệm thực là $m = \pm 1$.

Với $m = \pm 1$. Khi đó (4) $\Leftrightarrow [(y + 1)^2 + 2(y + 1) + 4](x^2 + 1) = 4 \Leftrightarrow x = 0, y = -1$ thỏa mãn (1)

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m sao cho hệ phương trình có nghiệm thực.

Câu 38. Tìm m để hệ $\begin{cases} (x + 1)^2 - y^2 = 4(\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{y^2 + 4}) & (1) \\ |x + 1| - |y| + m = x^2 - 4x + 3 & (2) \end{cases}$ có nghiệm?

Giải

Phân tích. Một bài toán với ý tưởng quen thuộc, ở phương trình 2 có ẩn thì chắc ta phải xử lý phương trình đầu, mà ở phương trình đầu ta dễ dàng nhìn thấy bóng dáng của hàm đặc trưng ở đó.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 5 - 4\sqrt{x^2 + 2x + 5} = y^2 + 4 - 4\sqrt{y^2 + 4} \quad (*)$$

Xét $f(t) = t^2 - 4t$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

Vì $x^2 + 2x + 5 \geq 4; y^2 + 4 \geq 4$ nên

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x^2 + 2x + 5}) = f(\sqrt{y^2 + 4}) \Leftrightarrow (x+1)^2 = y^2 \Leftrightarrow |x+1| = |y|$$

Thế vào (2) ta được $x^2 - 4x + 3 = m \quad (**)$

Hệ có nghiệm khi $(**)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq -1$.

Câu 39. Tìm m để hệ
$$\begin{cases} x^2 - 3x + \sqrt{100-y} + 1 - m^2 = 0 & (1) \\ x\sqrt{100-y} + \sqrt{y(100-x^2)} = 100 & (2) \end{cases} \quad (I)$$
 có nghiệm thỏa mãn $x + y \leq 80$?

Giải

Phân tích. Một câu hệ phương trình quá quen thuộc và được cover lại rất nhiều lần rồi nên ta không còn làm lạ gì với nó. Lần này để cho mới lạ chúng ta sẽ tiếp cận bài toán theo cách khác. Cách sử dụng bất đẳng thức các bạn có thể đọc ở các chương trên.

Đặt $t = \sqrt{100-y} \Rightarrow y = 100 - t^2, t \geq 0$.

Phương trình (2) trở thành

$$\begin{aligned} xt + \sqrt{(100-t^2)(100-x^2)} &= 100 \Leftrightarrow \sqrt{(100-t^2)(100-x^2)} = 100 - xt \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - xt \geq 0 \\ (100-t^2)(100-x^2) &= (100-xt)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - xt \geq 0 \\ -100x^2 - 100t^2 &= -200xt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - xt \geq 0 \\ (x-t)^2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ t = x \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ \sqrt{100-y} = x \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + \sqrt{100-y} + 1 - m^2 = 0 \\ \sqrt{100-y} = x \\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m^2 = 0 \\ y = 100 - x^2 \\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm m \\ y = 100 - x^2 \\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x + y \leq 80 \\ y = 100 - x^2 \\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + (100 - x^2) \leq 80 \\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow 5 \leq x \leq 10.$$

- Nếu $x = 1 - m$ thì $5 \leq 1 - m \leq 10 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -4$ - loại
- Nếu $x = 1 + m$ thì $5 \leq 1 + m \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq m \leq 9$.

Câu 40. Tìm m để hệ
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2018} + |y+1| = m \\ |x|\sqrt{y^2 + 2y + 2018} = \sqrt{2018 - x^2} - m \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất?

Giải

$$\text{Đặt } z = y + 1, \text{ hệ phương trình đã cho trở thành } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2018} + |z| = m \\ |x|\sqrt{z^2 + 2017} = \sqrt{2018 - x^2} - m \end{cases}$$

Nhận xét. Nếu hệ có nghiệm $(x_0; z_0)$ thì hệ cũng có nghiệm $(-x_0; -z_0)$

| Các bài toán chứa tham số

Do đó, hệ có nghiệm duy nhất khi $x_0 = z_0 = 0$. Thay vào hệ, ta có $m = \sqrt{2018}$.

Thử lại. Thay $m = \sqrt{2018}$ vào hệ phương trình, ta có

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2018} + |z| = \sqrt{2018} & (1) \\ |x|\sqrt{z^2 + 2017} = \sqrt{2018 - x^2} - \sqrt{2018} & (2) \end{cases}$$

Ta có $\sqrt{x^2 + 2018} + |z| \geq \sqrt{2018}$ nên phương trình (1) $\Leftrightarrow x = z = 0$.

Ta cũng có $x = z = 0$ thỏa mãn phương trình (2).

Suy ra hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2018} + |z| = \sqrt{2018} \\ |x|\sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{2018 - x^2} - \sqrt{2018} \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $x = z = 0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = \sqrt{2018}$.

Câu 41. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{(x^2 - 5x)^2 + 8x^2 - 40x + 16} - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0 \\ x^2 - 2(m-1)x + m(m-2) = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất?

Giải

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0 & (1) \\ x^2 - 2(m-1)x + m(m-2) = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) tương đương $|x^2 - 5x + 4| + (x^2 - 5x + 4) + 10x(|x| - x) = 0$ (3)

- Với $0 \leq x < 1$ hoặc $x > 4$, $VT > 0 \Rightarrow (3)$ vô nghiệm.
- Với $1 \leq x \leq 4$, $VT = 0 \Rightarrow (3)$ có nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 4]$.
- Với $x < 0$, $(3) \Leftrightarrow 18x^2 + 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy (1) có nghiệm là $x = -1$ hoặc $1 \leq x \leq 4$.

Xét phương trình (2). Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - m(m-2) = 1 > 0, \forall m$

Suy ra (2) luôn có nghiệm $x_1 = m; x_2 = m-2$. Ta đi xét các khả năng để hệ có nghiệm duy nhất, với

nhận xét x_1 và x_2 hơn nhau 2 đơn vị $\begin{cases} 2 < m-2 \leq 4 \\ -1 < m-2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m \leq 6 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$.

Vậy với $m \in (1; 3) \cup (4; 6] \cup \{-1\}$ hệ có nghiệm duy nhất.

Chú ý. Nếu bạn đọc không trực quan được trong bước lập luận trên, tốt nhất hãy vẽ trục số biểu diễn tập $x = -1, 1 \leq x \leq 4$ và di chuyển đoạn $[m-2; m]$ trên đó.

Câu 42. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3} + \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^3} = 27 & (1) \\ m\sqrt{x} = 2x+3 & (2) \end{cases}$ có nghiệm?

Giải

Phân tích. Hãy để ý ở cả 2 phương trình, ở phương trình 2 thì chỉ có 2 biến m và x , nếu như các bài toán khác thì ta sẽ tìm ngay được điều kiện của m , tuy nhiên phương trình 1 giúp ta tìm điều kiện của x để khảo sát hàm số.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}. \text{ Đặt } a = \sqrt{\frac{x+y}{2}}, b = \sqrt{\frac{x-y}{2}} \text{ thì } a, b \geq 0.$$

Từ (1) ta được $x = a^2 + b^2$ và $a^3 + b^3 = 27$

$$\text{Nên } \begin{cases} 0 \leq a \leq 3 \\ 0 \leq b \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 \leq 3a^2 \\ b^3 \leq 3b^2 \end{cases} \Rightarrow 3(a^2 + b^2) \geq a^3 + b^3 = 27 \Rightarrow x = a^2 + b^2 \geq 9.$$

Vậy $x \geq 9$ dấu bằng xảy ra khi $y = \pm 9$.

$$\text{Với } x \geq 9 \text{ thì (2) ta có } m = 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{3} + 3$$

Nhận xét. Để chứng minh $x \geq 9$, ta có thể làm cách khác như sau

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{2}}, (t > 0), \text{ ta tìm được } x = \frac{t^2}{3} + \frac{18}{t}.$$

$$\text{Nên ta có } x = \frac{t^2}{3} + \frac{18}{t} = \frac{t^2}{3} + \frac{9}{t} + \frac{9}{t} \geq 9.$$

Câu 43. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy - 2x + y + 1 = \sqrt{y+1} - \sqrt{x} \\ \sqrt{2x^2 - (6-m)y} = y + 1 + \sqrt{x-1} \end{cases}$ có nghiệm ?

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \\ 2x^2 - (6-m)y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình } x^2 - xy - 2x + y + 1 = \sqrt{y+1} - \sqrt{x} (*)$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ đưa phương trình thứ 2 trong hệ về dạng } \sqrt{6-m} = 0 \Leftrightarrow m = 6$$

$$\text{Nếu } \sqrt{x} + \sqrt{y+1} > 0, \text{ biến đổi phương trình về dạng } (x-y-1)\left(x-1 + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}}\right) = 0$$

$$\text{Từ điều kiện xác định của bài toán ta có } x-1 + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}} > 0.$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow x-y-1 = 0 \Leftrightarrow y = x-1$$

Thay vào phương trình còn lại trong hệ có

$$\sqrt{2x^2 - (6-m)(x-1) + m} = x + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{2(x-1)^2 - (2-m)(x-1) + 2} = x-1 + 1 + \sqrt{x-1}$$

Do $x=1$ không là nghiệm phương trình nên chia hai vế cho $\sqrt{x-1} > 0$ ta có

$$\sqrt{2\left[(x-1) + \frac{1}{(x-1)}\right] - 2 + m} = 1 + \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} (t \geq 2) \text{ khi đó có } x-1 + \frac{1}{x-1} = t^2 - 2$$

$$\text{Vậy phương trình có dạng } \sqrt{2(t^2 - 2) - 2 + m} = 1 + t \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 7$$

| Các bài toán chứa tham số

Xét hàm số $g(t) = -t^2 + 2t + 7 (t \geq 2)$ ta có $g'(t) = -2t + 2 < 0 \forall t \geq 2$

Do đó phương trình có nghiệm khi $m \leq g(2) = 7$

Câu 44. Tìm m để hệ $\begin{cases} x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2} & (1) \\ x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y} = m & (2) \end{cases}$ có nghiệm ?

Giải

Phân tích. Một câu lấy ý tưởng từ đề THPT Quốc Gia 2016.

Điều kiện. $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$. Phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x+y)^2 = x+2y+1+2\sqrt{(x-1)(2y+2)} \\ &\Leftrightarrow (x+y)^2 = x+2y+1+2\sqrt{(2x-2)(y+1)} \\ &\stackrel{AM-GM}{\leq} x+2y+1+(2x-2)+(y+1) = 3(x+y) \\ &\Rightarrow 0 \leq x+y \leq 3 \end{aligned}$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 2(x+y) + 2 + 8\sqrt{4-(x+y)} = m$

Đặt $x+y=t$. Ta có $m = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t}$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t}$, $t \in [0;3]$. Ta có

$$\begin{cases} f'(t) = 2t + 2 - \frac{4}{\sqrt{4-t}} \\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 - 7t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 - 2\sqrt{2} \\ t = 1 + 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng suy ra trên $[0;3]$ hàm $f(t)$ đồng biến

$$\Rightarrow \min_{x \in [0;3]} = f(0) = 18, \max_{x \in [0;3]} = f(3) = 25$$

Hệ phương trình có nghiệm khi $m \in [18;25]$.

Câu 45. Tìm m để hệ $\begin{cases} m \cdot (x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = xy \\ m \cdot (\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (m-1) \cdot \sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$ có nghiệm ?

Giải

Nếu $m = 0$ thì hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ -\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Nếu $m \neq 0$, đặt $t = \sqrt[3]{x}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot (t^6 + t^4 + t^2 + 1) = yt^3 \\ m \cdot (t^8 + t^6 + t^2 + 1) + (m-1)t^4 = 2yt^4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot (t^6 + t^4 + t^2 + 1) = yt^3 & (1) \\ m \cdot (t^8 + t^6 + t^4 + yt^3 + 1) = (2y+1)t^4 & (2) \end{cases}$$

Vì $t=0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên chia cả 2 vế của (1) cho t^3 và (2) cho t^4 ta được

$$\begin{cases} m\left(t^3 + \frac{1}{t^3} + t + \frac{1}{t}\right) = y \\ m\left(t^4 + \frac{1}{t^4} + t^2 + \frac{1}{t^2} + 1\right) = 2y + 1 \end{cases} \quad . \text{Tiếp tục đặt } a = t + \frac{1}{t} (|a| \geq 2) \text{ thì hệ trở thành}$$

$$\begin{cases} m(a^3 - 2a) = y \\ m(a^4 - 3a^2 + 1) = 2y + 1 \end{cases} \Rightarrow m(a^4 - 2a^3 - 3a^2 + 4a + 1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} = a^4 - 2a^3 - 3a^2 + 4a + 1 (*)$$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình (*) có nghiệm.

Đến đây bài toán trở nên vô cùng đơn giản, xin nhường lại cho bạn đọc!

Vậy với $m \leq -\frac{1}{3} \vee m > 0$ thì hệ phương trình có nghiệm thực.

Sau đây mình sẽ hướng dẫn các bạn cách giải quyết một số bài toán liên quan tới hệ đối xứng loại 2 chứa tham số.

Câu 46. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x^2 + x + 1} + \sqrt{3y^2 - y + 1} = m \\ \sqrt{3x^2 - x + 1} + \sqrt{3y^2 + y + 1} = m \end{cases}$ có nghiệm ?

Giải

Phân tích. Giống như cách giải với hệ đối xứng loại 2, ta sẽ lấy 2 phương trình trừ cho nhau. Ta được

$$\sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 - x + 1} = \sqrt{3y^2 + y + 1} - \sqrt{3y^2 - y + 1} \Leftrightarrow f(x) = f(y) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{3t^2 + t + 1} - \sqrt{3t^2 - t + 1}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t) = \frac{3\left(t + \frac{1}{6}\right)}{\sqrt{3\left(t + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}}} - \frac{3\left(t - \frac{1}{6}\right)}{\sqrt{3\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}}} = g\left(t + \frac{1}{6}\right) - g\left(t - \frac{1}{6}\right)$$

$$\text{Xét hàm số } g(z) = \frac{3z}{\sqrt{3z^2 + \frac{11}{12}}}, g'(z) = \frac{11}{\left(12z^2 + \frac{11}{3}\right)\sqrt{3z^2 + \frac{11}{12}}} > 0, \forall z \in \mathbb{R}$$

Do đó $g(z)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, từ đây suy ra

$$\Rightarrow t + \frac{1}{6} > t - \frac{1}{6} \Leftrightarrow g\left(t + \frac{1}{6}\right) > g\left(t - \frac{1}{6}\right) \Rightarrow f'(t) = g\left(t + \frac{1}{6}\right) - g\left(t - \frac{1}{6}\right) > 0$$

Vậy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Lúc này phương trình (*) tương đương $x = y$.

Thế vào phương trình đầu ta được $\sqrt{3x^2 + x + 1} + \sqrt{3x^2 - x + 1} = m$

$$\text{Đặt } g(x) = \sqrt{3x^2 + x + 1} + \sqrt{3x^2 - x + 1}, \text{ có } g'(x) = \frac{6x + 1}{2\sqrt{3x^2 + x + 1}} + \frac{6x - 1}{2\sqrt{3x^2 - x + 1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng chỉ ra $m \geq 2$ thì hệ phương trình có nghiệm.

Câu 47. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{7+x} + \sqrt{11-y} - 4 = m - \sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \\ \sqrt{7+y} + \sqrt{11-x} - 4 = m - \sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \end{cases}$ có nghiệm duy nhất ?

Giải

| Các bài toán chứa tham số

Điều kiện $-7 \leq x; y \leq 11$ và $\frac{74}{27} \leq m \leq \frac{10}{3}$.

Tương tự câu trên, ta trừ 2 vế của phương trình cho nhau ta được

$$\sqrt{7+x} - \sqrt{11-x} = \sqrt{7-y} - \sqrt{11-y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{7+t} - \sqrt{11-t}$ trên $[-7; 11]$.

Có $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{7+t}} + \frac{1}{\sqrt{11-t}} > 0, \forall t \in (-7; 11) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[-7; 11]$.

Từ đó dễ dàng suy ra được $x = y$. Thế vào phương trình đầu ta được

$$\sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} - 4 = m - \sqrt{4-3\sqrt{10-3m}}$$

Xét $g(x) = \sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} - 4$ trên $[-7; 11]$, ta có $f'(x) = \frac{\sqrt{11-x} - \sqrt{7+x}}{2\sqrt{7+x} \cdot \sqrt{11-x}} = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Lập bảng biến thiên ta dễ thấy để hệ có nghiệm duy nhất thì $m - \sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} = f(2) = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} = m - 2 \Leftrightarrow m^4 - 8m^3 + 16m^2 + 27m - 90 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)(m^2 - 7m + 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases}$$

So với điều kiện ta được $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 48. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 2^{|x|} + |x| - y - m \\ x^2 = 1 - y^2 \end{cases}$ có một nghiệm ?

Giải

Phân tích. Không khó để nhận ra bài toán này xử lý bằng phương pháp điều kiện cần và đủ là nhanh nhất! Giả sử tồn tại một số m_0 sao cho hệ đã cho có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì cặp số $(-x_0; y_0)$ cũng là một nghiệm của hệ. Theo đề ra hệ chỉ có một nghiệm nên phải có $x_0 = 0$. Thay giá trị này vào hệ đã cho ta

$$\text{thấy } \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}.$$

- Nếu $m = 0$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(0; 1)$.
- Nếu $m = 2$ thì hệ đã cho có nghiệm là $(0; -1), (1; 0)$.

Vậy tồn tại $m = 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất là $(0; 1)$.

Câu 49. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 7^{5x+\sqrt{x+1}} - 7^{5+\sqrt{x+1}} + 2012x \leq 2012 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 \end{cases}$ có một nghiệm ?

Giải

Điều kiện. $x \geq -1$

Ta có $7^{5x+\sqrt{x+1}} - 7^{5+\sqrt{x+1}} + 2012x \leq 2012 \Leftrightarrow 7^{\sqrt{x+1}}(7^{5x} - 7^5) \leq 2012(1-x)$ (*)

Nếu $x > 1$ thì $VP(*) < 0 < VT(*)$ - Vô lý

Bất phương trình (*) luôn đúng khi $-1 \leq x \leq 1$.

Hệ bất phương trình đã cho có nghiệm khi bất phương trình $x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0$ có nghiệm $x \in [-1; 1] \Leftrightarrow m(x-2) \leq x^2 - 2x + 3$ có nghiệm $x \in [-1; 1]$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \text{ có nghiệm } x \in [-1; 1] \Leftrightarrow m \geq \min_{x \in [-1; 1]} f(x) \text{ với } f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}.$$

Hàm số này được viết lại $f(x) = x + \frac{3}{x-2}, x \in [-1; 1]$

Ta có $f'(x) = 1 - \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \notin [-1; 1] \\ x = 2 - \sqrt{3} \in [-1; 1] \end{cases}$

Mặt khác $f(2 - \sqrt{3}) = 2 - 2\sqrt{3}$; $f(-1) = f(1) = -2$;

Do đó $\min_{x \in [-1; 1]} f(x) = f(-1) = f(1) = -2$.

Vậy $m \geq -2$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50. Tìm m để hệ $\begin{cases} 2y^3 + 3y = (4y^3 - 2xy^3) \cdot \sqrt{3-2x} + 4y^2 + 1 \\ \sqrt[4]{y^2 + 1} - \sqrt{x} = m \end{cases}$ có một nghiệm ?

Giải

Điều kiện $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Phân tích. Để ý thấy phương trình đầu được che giấu hàm đặc trưng khá kín, để làm xuất hiện hàm thì ta phải làm độc lập 2 biến bằng cách chia cả 2 vế cho y^3 .

Đương nhiên $y = 0$ không là nghiệm của nên phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned} 2 - \frac{4}{y} + \frac{3}{y^2} - \frac{1}{y^3} &= (1 + (3-2x))\sqrt{3-2x} \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{y}\right) + \left(1 - \frac{1}{y}\right)^3 &= \sqrt{3-2x} + (3-2x)\sqrt{3-2x} \Leftrightarrow f\left(1 - \frac{1}{y}\right) = f(\sqrt{3-2x}) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 1 + 3t^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Từ đó dễ dàng có $f\left(1 - \frac{1}{y}\right) = f(\sqrt{3-2x}) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{y} = \sqrt{3-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0 \vee y \geq 1 \\ x = 1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} \end{cases}$

Thế vào phương trình 2 ta được $\sqrt[4]{y^2 + 1} - \sqrt{1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2}} = m$.

Ứng với $y \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$ thì phương trình $x = 1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2}$ cho ta một nghiệm của x

Để hệ có nghiệm duy nhất thì phương trình trên phải cho một nghiệm y.

Ta có $f(y) = \sqrt[4]{y^2 + 1} - \sqrt{1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2}}$ ($y \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$)

$$f'(y) = \frac{y}{2\sqrt[4]{(y^2 + 1)^3}} + \frac{y-1}{2y^3 \sqrt{1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2}}} \text{ và } \begin{cases} y \in (-\infty; 0) \Rightarrow f'(y) < 0 \\ y \in (1; +\infty) \Rightarrow f'(y) > 0 \end{cases}$$

Đến đây lập bảng biến thiên cho hàm $f(y)$ dễ dàng suy ra được $m < \sqrt[4]{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$

Câu 51. Tìm tham số a để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} a(x-a)^2(x-2\sqrt{2}) + 1 \leq 0 \\ x > a > 0 \end{cases}$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Biến đổi hệ } \begin{cases} a(x-a)^2(x-2\sqrt{2})+1 \leq 0 \\ x > a > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 ax - 2\sqrt{2}a(x-a)^2 + 1 \leq 0 \\ x > a > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{(x-a)^2 a} \leq 2\sqrt{2} \\ x > a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(x-a) + \frac{1}{2}(x-a) + a + \frac{1}{(x-a)^2 a} \leq 2\sqrt{2} \\ x > a > 0 \end{cases} \quad (1) \\ &\quad \quad \quad (2) \end{aligned}$$

Do (2) nên $x-a$ và a là hai số dương,

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 4 số dương ta được

$$\frac{1}{2}(x-a) + \frac{1}{2}(x-a) + a + \frac{1}{(x-a)^2 a} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{2} \quad (3)$$

Do đó (1) chỉ đúng khi dấu đẳng thức xảy ra tại (3) tức là

$$\frac{1}{2}(x-a) = a = \frac{1}{(x-a)^2 a} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và nghiệm của hệ là $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 52. Giải hệ
$$\begin{cases} (x+y+z)(kx+y+z) = k^3 + 2k^2 \\ (x+y+z)(x+ky+z) = 4k^2 + 8k \\ (x+y+z)(x+y+kz) = 4k + 8 \end{cases}$$
 với $k \neq 1$ là tham số cho trước.

Giải

Đặt $s = x + y + z$ rồi cộng vế theo vế của từng phương trình với nhau ta được

$$s(kx + 2x + ky + 2y + kz + 2z) = k^3 + 6k^2 + 12k + 8 \Leftrightarrow s^2(k+2) = (k+2)^3.$$

- Với $s = 0$ thì $k = -2$ và nếu $k = -2$ thì $x = y = z = 0$.

Giả sử $s \neq 0$ và $k \neq -2$ ta có $s = \pm(k+2)$.

- Với $s = k+2$ thì hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} kx + y + z = k^2 \\ x + ky + z = 4k \\ x + y + kz = 4 \end{cases}$$

Giải hệ được $x = \frac{(k-2)(k+1)}{k-1}$; $y = \frac{3k-2}{k-1}$; $z = -\frac{k-2}{k-1}$.

- Với $s = -(k+2)$ thì hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} kx + y + z = -k^2 \\ x + ky + z = -4k \\ x + y + kz = -4 \end{cases}$$

Giải hệ được $x = -\frac{(k-2)(k+1)}{k-1}$; $y = -\frac{3k-2}{k-1}$; $z = \frac{k-2}{k-1}$.

Câu 53. Tìm m để hệ
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 16xy \\ y + z + \sqrt{yz} = 25yz \\ z + x + \sqrt{zx} = 36zx \\ \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = m\sqrt{xyz} \end{cases}$$
 có nghiệm $x, y, z > 0$.

Giải

Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ thì
$$(I) \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{xy}} = 16 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{yz}} = 25 \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{zx}} = 36 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = m \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{\sqrt{x}}; v = \frac{1}{\sqrt{y}}; w = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Điều kiện $u, v, w > 0$.

Hệ (I) trở thành
$$\begin{cases} u^2 + v^2 + uv = 4^2 \\ v^2 + w^2 + vw = 5^2 \\ w^2 + u^2 + wu = 6^2 \\ u + v + w = m \end{cases}$$

Trong mặt phẳng vẽ 3 đoạn thẳng $MA = u, MB = v, MC = w$ đôi một hợp với nhau góc 120° . Theo định lý hàm cosin ta dễ dàng có được $AB = 4, BC = 5, AC = 6$.

$\triangle ABC$ nhọn $\Rightarrow M$ nằm trong $\triangle ABC$.

Khi đó $S_{\triangle MAB} + S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MAC} = S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow (uv + vw + wu)\sin 120^\circ = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Suy ra $uv + vw + wu = 5\sqrt{21}$ (1)

Cộng vế theo vế của ba phương trình đầu trong hệ (I) ta được

$$2(u^2 + v^2 + w^2) + (uv + vw + wu) = 77 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có được $u + v + w = \sqrt{\frac{77 + 15\sqrt{21}}{2}}$.

Do đó hệ có nghiệm $(x; y; z)$ với $x, y, z > 0$ thì $m = \sqrt{\frac{77 + 15\sqrt{21}}{2}}$.

Câu 54. Cho $a, b, c > 0$. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} ax - aby + \frac{1}{xy} = bc^2 \\ abz - bc^2x + \frac{1}{xz} = a \\ bc^2y - az + \frac{1}{yz} = ab \end{cases}$$

Đề chọn đội tuyển PTNK Hồ Chí Minh

Giải

Điều kiện $xyz \neq 0$.

Ta sẽ giải hệ phương trình này bằng cách thay đổi vai trò giữa biến và tham số.

| Các bài toán chứa tham số

Đặt $a = A, ab = B, bc^2 = C$. Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} Ax - By + \frac{1}{xy} = C \\ Bz - Cx + \frac{1}{xz} = A \\ Cy - Az + \frac{1}{yz} = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax - By + \frac{1}{xy} = C \\ -A + Bz - Cx = -\frac{1}{xz} \\ -Az - B + Cy = -\frac{1}{yz} \end{cases}$$

Thay C từ phương trình thứ nhất của hệ vào phương trình thứ hai và ba, ta được

$$\begin{cases} -A + Bz - x \left(Ax - By + \frac{1}{xy} \right) = -\frac{1}{xz} \\ -Az - B + y \left(Ax - By + \frac{1}{xy} \right) = -\frac{1}{yz} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A + Bz - Ax^2 + Bxy - \frac{1}{y} = -\frac{1}{xz} \\ -Az - B - By^2 + Axy + \frac{1}{x} = -\frac{1}{yz} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(-1 - x^2) + B(z + xy) = \frac{1}{y} - \frac{1}{xz} \\ A(-z + xy) - B(1 + y^2) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{yz} \end{cases}$$

Nhân phương trình thứ nhất với $-z + xy$, nhân phương trình thứ hai với $1 + x^2$, ta có

$$\begin{cases} A(-1 - x^2)(-z + xy) + B(z + xy)(-z + xy) = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{xz} \right)(-z + xy) \\ A(-z + xy)(1 + x^2) - B(1 + y^2)(1 + x^2) = \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{yz} \right)(1 + x^2) \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình này lại, ta được

$$B(x^2y^2 - z^2 - x^2 - y^2 - 1 - x^2y^2) = \frac{(xz - y)(xy - z) - (yz + x)(1 + x^2)}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow -B(x^2 + y^2 + z^2 + 1) = \frac{-z^2 - y^2 - 1 - x^2}{yz} \Leftrightarrow B = \frac{1}{yz} \Leftrightarrow yz = \frac{1}{B}$$

Tương tự, ta tính được $zx = \frac{1}{A}, xy = \frac{1}{C}$.

Từ đó, suy ra $(xyz)^2 = \frac{1}{ABC} \Rightarrow xyz = \pm \frac{1}{\sqrt{ABC}}$.

Khi đó $x = \pm \sqrt{\frac{B}{CA}}, y = \pm \sqrt{\frac{A}{BC}}, z = \pm \sqrt{\frac{C}{AB}}$ hay

$$x = \pm \sqrt{\frac{ab}{abc^2}} = \pm \frac{1}{c}, y = \sqrt{\frac{a}{ab^2c^2}} = \pm \frac{1}{bc}, z = \sqrt{\frac{bc^2}{a^2b}} = \pm \frac{c}{a}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y, z) = \left(\frac{1}{c}, \frac{1}{bc}, \frac{c}{a} \right), \left(-\frac{1}{c}, -\frac{1}{bc}, -\frac{c}{a} \right)$.

Chương

6

Phương pháp bất đẳng thức

Phương trình – Hệ phương trình – Bất đẳng thức là hai lĩnh vực có mối quan hệ chặt chẽ với nhau. Đây cũng chính là những phần quan trọng nhất của chương trình toán THPT và rất được nhiều học sinh đam mê toán yêu thích. Không những thế vấn đề này còn thường xuyên xuất hiện trong kì thi THPT Quốc gia hay các kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh hay thậm chí VMO. Các bài toán phương trình không chính tắc thường được thiết kế và sáng tạo dưới ý tưởng của một bất đẳng thức nào đó đồng thời cũng là sự phối hợp của nhiều luồng kiến thức khác nhau yêu cầu người làm toán phải có một tư duy linh hoạt, sự tìm tòi củng cố kiến thức, liên hệ kiến thức đồng thời tập cho chúng ta nghiên cứu để có thể khám phá vẻ đẹp cũng như sử dụng thành thạo phương pháp này.

Các bất đẳng thức cơ bản cần nhớ

Bất đẳng thức AM – GM.

Cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ khi đó ta có $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

Bất đẳng thức AM – GM dạng cộng mẫu số cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$.
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz .

Cho 2 bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Khi đó ta có
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

Ngoài ra cần phải chú ý đến bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu Engel.

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}$$

Bất đẳng thức trên còn có thể gọi là bất đẳng thức Svachơ.

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. Riêng dạng cộng mẫu thì cần thêm điều kiện là $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$

Bất đẳng thức Minkowski.

Tổng quát. Cho mọi số thực $r \geq 1$ và mọi số dương $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ thì ta có

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r \right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^r \right]^{\frac{1}{r}} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

Ở đây chỉ xét trường hợp cho 2 bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Khi đó ta có

$$\sqrt[n]{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Bất đẳng thức Holder.

Cho các số dương $x_{i,j}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Khi đó với mọi số $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \geq 0$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ta có $\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{i,j} \right)^{\omega_j} \geq \sum_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^n x_{i,j}^{\omega_j} \right)$

Ở đây ta chỉ xét trường hợp đơn giản nhất cho 3 dãy số gồm $(a, b, c); (m, n, p); (x, y, z)$. Ta có

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3$$

Dấu “=” xảy ra khi 3 dãy tương ứng tỷ lệ.

I. Các bài toán về phương trình.

Đánh giá miền nghiệm.

Ý tưởng của phương pháp này rất đơn giản, đó là chứng minh loại trừ, có nghĩa là ngoài nghiệm duy nhất ra thì không còn nghiệm nào khác, ta sẽ đi chứng minh trường hợp $x > a, x < a$ thì phương trình vô nghiệm, sau đây ta sẽ đi tìm hiểu các bài toán dạng này!

Câu 1. Giải phương trình $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt[3]{x+8} = -x^3 + 1$.

Giải

Nhận xét $x = 0$ thỏa phương trình đã cho.

Với $x > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{x-1} + \sqrt[3]{x+8} > -1 + 2 = 1 \\ -x^3 + 1 < 1 \end{cases}$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $x < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{x-1} + \sqrt[3]{x+8} < -1 + 2 = 1 \\ -x^3 + 1 > 1 \end{cases}$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 2. Giải phương trình $3 + \sqrt[4]{7x+15} = x + \sqrt{2x}$.

Giải

Phân tích.

Do $x = 3$, là một nghiệm của phương trình. Nên khi đó. $\begin{cases} 3 = x \\ \sqrt[4]{7x+15} = \sqrt{2x} \end{cases}$

Ta viết lại phương trình thành $(x-3) + (\sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x}) = 0(*)$

Ta tìm nghiệm chung của các hệ bất phương trình.

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \begin{cases} 3-x > 0 \\ \sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ (x-3)(4x+5) < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 3 \\ \bullet \quad & \begin{cases} 3-x < 0 \\ \sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-3)(4x+5) > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3 \end{aligned}$$

+ Nếu $0 \leq x < 3$ thì $(3-x) + (\sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x}) > 0$ hay $(*)$ vô nghiệm.

+ Nếu $x > 3$ thì $(3-x) + (\sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x}) < 0$ hay $(*)$ vô nghiệm.

Hay phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với. $(x-3) + (\sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x}) = 0(*)$

Nhận thấy $x = 3$ là nghiệm của phương trình $(*)$.

Xét các hệ bất phương trình.

$$\bullet \quad \begin{cases} 3-x > 0 \\ \sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ (x-3)(4x+5) < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 3$$

| Các bài toán chứa tham số

$$\bullet \quad \begin{cases} 3-x < 0 \\ \sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-3)(4x+5) > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

Suy ra.

+ Nếu $0 \leq x < 3$ thì $(3-x) + (\sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x}) > 0$ hay (*) không có nghiệm $x \in [0; 3)$.

+ Nếu $x > 3$ thì $(3-x) + (\sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x}) < 0$ hay (*) không có nghiệm $x \in (3; +\infty)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Câu 3. Giải phương trình $\sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x} = x-6$.

Giải

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với. $(\sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x}) + (6-x) = 0 (*)$

Nhận thấy $x = 6$ là nghiệm của phương trình (*).

Xét các hệ bất phương trình.

$$\bullet \quad \begin{cases} 6-x > 0 \\ \sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6 \\ (x-6)(2x+1) < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 6$$

$$\bullet \quad \begin{cases} 6-x < 0 \\ \sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ (x-6)(2x+1) > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6$$

Suy ra.

+ Nếu $0 \leq x < 6$ thì $(\sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x}) + (6-x) > 0$ hay (*) không có nghiệm $x \in [0; 6)$

+ Nếu $x > 6$ thì $(\sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x}) + (6-x) < 0$ hay (*) không có nghiệm $x \in (6; +\infty)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 6$.

Câu 4. Giải phương trình $(x-1)^2 + \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(2x+1)^3} = 3 (*)$

Giải

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$.

Nhận thấy $x = 0$ là nghiệm của phương trình (*)

Xét các hệ bất phương trình.

$$\bullet \quad \begin{cases} \sqrt{(x+1)^3} > (x+1) \\ \sqrt{(2x+1)^3} > (2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(\sqrt{x+1}-1) > 0 \\ (2x+1)(\sqrt{2x+1}-1) > 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)x}{\sqrt{x+1}+1} > 0 \\ \frac{(2x+1)x}{\sqrt{2x+1}+1} > 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

$$\bullet \quad \begin{cases} \sqrt{(x+1)^3} < (x+1) \\ \sqrt{(2x+1)^3} < (2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(\sqrt{x+1}-1) < 0 \\ (2x+1)(\sqrt{2x+1}-1) < 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)x}{\sqrt{x+1}+1} < 0 \\ \frac{(2x+1)x}{\sqrt{2x+1}+1} < 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

Suy ra.

+ Nếu $x > 0$, ta có

$$\text{VT (*)} = (x-1)^2 + \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(2x+1)^3} > (x-1)^2 + (x+1) + (2x+1) \\ = x^2 + x + 3 > 3 = \text{VP (*)} \text{ hay (*) không có nghiệm } x \in (0; +\infty)$$

+ Nếu $-\frac{1}{2} \leq x < 0$, ta có

$$\text{VT (*)} = (x-1)^2 + \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(2x+1)^3} < (x-1)^2 + (x+1) + (2x+1) \\ = 3 + x(x+1) < 3 = \text{VP (*)} \text{ hay (*) không có nghiệm } x \in (0; +\infty)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 5. Giải phương trình $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0$

Giải

Phân tích..

Ta nhận định phương trình đã có nghiệm duy nhất $x = 3$ (có thể sử dụng sự hỗ trợ từ máy tính bỏ túi), từ đó chúng ta nảy sinh ý tưởng đánh giá xoay quanh giá trị $x = 3$.

Lại có $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 2(x-3)^2 + (x+3-3\sqrt[3]{4x-4})$ và nếu chúng ta chứng minh được rằng.

$(x+3-3\sqrt[3]{4x-4}) \geq 0$ bài toán sẽ được giải quyết, mà.

$(x+3-3\sqrt[3]{4x-4}) \geq 0 \Leftrightarrow x+3 \geq 3\sqrt[3]{4x-4} \Leftrightarrow (x-3)^2(x+15) \geq 0$ (*), lúc này (*) chỉ đúng với $x \geq -15$.

Từ đó ý tưởng xử lý vấn đề này là sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình để làm bé lại khoảng có nghiệm.

Thật vậy. phương trình $\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{4x-4} = 2x^2 - 11x + 21 > 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{4x-4} > 0 \Rightarrow x > 1$.

Và $\forall x > 1$ thì (*) hiển nhiên đúng.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với. $2(x-3)^2 + (x+3-3\sqrt[3]{4x-4}) = 0$

Từ phương trình ban đầu ta có $3\sqrt[3]{4x-4} = 2x^2 - 11x + 21 > 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{4x-4} > 0 \Rightarrow x > 1$.

Mà. $(x+3-3\sqrt[3]{4x-4}) \geq 0 \Leftrightarrow x+3 \geq 3\sqrt[3]{4x-4} \Leftrightarrow (x-3)^2(x+15) \geq 0$ luôn đúng $\forall x > 1$

Từ đó. $2(x-3)^2 + (x+3-3\sqrt[3]{4x-4}) \geq 0$, dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$.

Hay phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Chú ý. Trong một số bài toán việc sử dụng điều kiện có nghĩa là chưa đủ để chúng ta sử dụng đánh giá trong phương trình, từ đó ta nghĩ đến phương án tìm điều kiện có nghiệm của phương trình đó.

Bổ đề. Xét phương trình. $f(x) = g(x)$, $x \in D$ (*).

Nếu $f(x) \geq m$, $\forall x \in D$, thì để phương trình (*) có nghiệm ta cần phải có $g(x) \geq m$.

Nếu $f(x) \leq M$, $\forall x \in D$, thì để phương trình (*) có nghiệm ta cần phải có $g(x) \leq M$.

Câu 6. Giải phương trình $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x}$.

Giải

Phân tích. Bài toán nhìn có dáng dấp của hàm số, tuy nhiên phương pháp sử dụng hàm số với bài toán này là không đơn giản. Ta có thể liên tưởng đến việc sử dụng đánh giá để thay thế.

Xét các bất phương trình.

$$\sqrt{1+2x} \geq \sqrt[3]{1+3x} \Leftrightarrow (1+2x)^3 \geq (1+3x)^2 \Leftrightarrow x^2(3+8x) \geq 0$$

$$\sqrt{1-2x} \geq \sqrt[3]{1-3x} \Leftrightarrow (1-2x)^3 \geq (1-3x)^2 \Leftrightarrow x^2(3-8x) \geq 0$$

Với điều kiện xác định $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ không làm các bất phương trình trên nghiệm đúng, từ đó ta nảy sinh ý tưởng làm hẹp khoảng đánh giá này bằng cách sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình. Thật vậy.

Đặt $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x} = u$, ta có

$$u^2 = 2 + 2\sqrt{1-4x^2} \geq 2 \Rightarrow u \geq \sqrt{2}$$

$$u = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x} \quad (u \geq \sqrt{2}) \Rightarrow u^3 = 2 + 3u\sqrt[3]{1-9x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1-9x^2} = \frac{u^3 - 2}{3u} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Rõ ràng $\forall x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ các bất phương trình trên nghiệm đúng.

Lời giải

Đặt $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x} = u$, ta có

$$u^2 = 2 + 2\sqrt{1-4x^2} \geq 2 \Rightarrow u \geq \sqrt{2}$$

$$u = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x} \quad (u \geq \sqrt{2}) \Rightarrow u^3 = 2 + 3u\sqrt[3]{1-9x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1-9x^2} = \frac{u^3 - 2}{3u} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Suy ra các bất phương trình sau đây nghiệm đúng $\forall x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

$$\sqrt{1+2x} \geq \sqrt[3]{1+3x} \Leftrightarrow (1+2x)^3 \geq (1+3x)^2 \Leftrightarrow x^2(3+8x) \geq 0$$

$$\sqrt{1-2x} \geq \sqrt[3]{1-3x} \Leftrightarrow (1-2x)^3 \geq (1-3x)^2 \Leftrightarrow x^2(3-8x) \geq 0$$

Hay $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} \geq \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x}$, $\forall x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Kết luận. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 7. Giải phương trình $\sqrt{4x^3 - 6x^2 - x + 10} = 1 - x^2 \sqrt{x(x+1)(x-2)}$.

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4x^3 - 6x^2 - x + 10 \geq 0 \\ x(x+1)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Từ điều kiện này ta có ngay được $1 - x^2 \sqrt{x(x+1)(x-2)} \leq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.

Mặt khác từ điều kiện ta luôn có $\sqrt{4x^3 - 6x^2 - x + 10} \geq 1$.

Thật vậy, bình phương hai vế bất phương trình ta có

$$4x^3 - 6x^2 - x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(4x^2 - 10x + 9) \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.

Từ các đánh giá này ta có $\sqrt{4x^3 - 6x^2 - x + 10} \geq 1 \geq 1 - x^2 \sqrt{x(x+1)(x-2)}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Câu 8. Giải phương trình $x + 17 + 2(1-x)\sqrt[3]{2x+2} = 2(x-1)\sqrt{x+6}$

Giải

Nếu $x = 1$ thì vô lý. Do đó.

$$x + 17 + 2(1-x)\sqrt[3]{2x+2} = 2(x-1)\sqrt{x+6} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt{x+6} - \frac{x+17}{2(x-1)} = 0$$

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt{x+6} - \frac{x+17}{2(x-1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+2)^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x+6}} + \frac{9}{(x-1)^2} > 0$$

Khi đó $f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm trong khoảng $[-6; 1)$ và có tối đa 1 nghiệm trong khoảng $(1; +\infty)$ vì nó liên tục trên $[-6; 1)$ và $(1; +\infty)$. Chỉ ra 2 nghiệm này là $x = 3$ hoặc $x = -5$

Xem thêm ở phần giải phương trình bằng phương pháp hàm số !

Câu 9. Giải phương trình $(3x-11)\sqrt[4]{2-x} + 2(x-1)^2\sqrt{2x-1} = 2x^2 + x - 11$

Giải

Ta có Đặt $t = \sqrt[4]{2-x} \geq 0 \Rightarrow x = 2 - t^4$. Khi đó.

- $(3x-11)\sqrt[4]{2-x} - 5x + 13 = (-3t^4 - 5)t + 5t^4 + 3 = (3t^2 + 4t + 3)(1-t)^3$
- $2(x-1)^2(\sqrt{2x-1}-1) = \frac{4(x-1)^3}{\sqrt{2x-1}+1}$

Nếu $x > 1$ thì $0 \leq t < 1$ suy ra $\begin{cases} (3x-11)\sqrt[4]{2-x} - 5x + 13 > 0 \\ 2(x-1)^2(\sqrt{2x-1}-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ vô lý

Nếu $x < 1$ thì $t > 1$ suy ra $\begin{cases} (3x-11)\sqrt[4]{2-x} - 5x + 13 < 0 \\ 2(x-1)^2(\sqrt{2x-1}-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ vô lý

Lời giải chi tiết dành cho bạn đọc.

Kết luận. Phương trình có nghiệm $x = 1$.

Câu 10. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x-3} - 3x^2 + 3x + 20 = (2x-9)\sqrt{3x+4}$

Giải

Ta có $\sqrt[3]{2x-3} - 3x^2 + 3x + 20 = (2x-9)\sqrt{3x+4}$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-3} - x + 2 - (2x-9)\sqrt{3x+4} - 3x^2 + 4x + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-3} - x + 2) + (\sqrt{3x+4} - 3x + 7)(\sqrt{3x+4} + x + 2) = 0$$

Ta luôn có $\sqrt{3x+4} + x + 2 = \sqrt{3x+4} + \frac{3x+4}{3} + \frac{2}{3} > 0$

Nếu $x > \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ thì $\begin{cases} \sqrt{3x+4} - 3x + 7 < 0 \\ \sqrt[3]{2x-3} - x + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow VT < 0$

Nếu $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ thì $\begin{cases} \sqrt{3x+4} - 3x + 7 > 0 \\ \sqrt[3]{2x-3} - x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow VT > 0$

| Các bài toán chứa tham số

Nếu $1 \leq x < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ thì ta có $\sqrt[3]{2x-3}+1 > 0$. Suy ra.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2x-3}-3x^2+3x+20-(2x-9)\sqrt{3x+4} &> -3x^2+3x+19-(2x-9)\sqrt{3x+4} \\ &= \frac{1}{3}(3-\sqrt{3x+4})((3x+8)\sqrt{3x+4}+15x-3)+\frac{98}{3} > 0 \end{aligned}$$

Nếu $x < 1$ thì $\begin{cases} \sqrt{3x+4}-3x+7 > 0 \\ \sqrt[3]{2x-3}-x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow VT > 0$

Bài toán được giải quyết.

Câu 11. Giải phương trình $3\sqrt[3]{x-2}+x^2-x-6=(2x-3)\sqrt{x-2}$

Giải

Điều kiện $x \geq 2$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 3\sqrt[3]{x-2}+x^2-x-6 &= (2x-3)\sqrt{x-2} \\ \Leftrightarrow 3(\sqrt[3]{x-2}-1)+x^2-x-3-(2x-3)\sqrt{x-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(\sqrt[3]{x-2}-1)+(\sqrt{x-2}-1)(x\sqrt{x-2}-2+3) &= 0 \end{aligned}$$

Ta luôn có $x\sqrt{x-2}-x+3=\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\sqrt{x-2}+1 > 0; \forall x \geq 2$

Nếu $x > 3 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} > 1 \\ \sqrt{x-2} > 1 \end{cases} \Rightarrow VT > 0.$

Nếu $x < 3 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} < 1 \\ \sqrt{x-2} < 1 \end{cases} \Rightarrow VT < 0.$

Câu 12. Giải phương trình $(\sqrt[3]{2x+3}+2\sqrt{x+2})(x+3)=2x^2+11x+10$

Giải

Điều kiện $x \geq -2$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (\sqrt[3]{2x+3}+2\sqrt{x+2})(x+3) &= 2x^2+11x+10 \\ \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x+3}-x-1)(x+3)+2\sqrt{x+2}(x+3)-x^2-7x-7 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x+3}-x-1)(x+3)-\left(x+5-\sqrt{x+2}\right)(x+1-\sqrt{x+2}) &= 0 \end{aligned}$$

Ta luôn có $x+5-\sqrt{x+2}=\frac{(\sqrt{x+2}-1)^2}{2}+x+7 > 0$

Nếu $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x+3} < x+1 \\ \sqrt{x+2} < x+1 \end{cases}$ suy ra $VT < 0$

Nếu $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x+3} > x+1 \\ \sqrt{x+2} > x+1 \end{cases}$ suy ra $VT > 0$

Nếu $-2 \leq x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt[3]{2x+3}+1 \geq 0$. Vậy ta được.

$$\begin{aligned} &(\sqrt[3]{2x+3}+2\sqrt{x+2})(x+3)-2x^2-11x-10 \\ &\geq (2\sqrt{x+2}-1)(x+3)-2x^2-11x-10 \end{aligned}$$

$$= -\frac{(19\sqrt{x+2}+3)(\sqrt{x+2}-1)+(x-1)(2\sqrt{x+2}-1)^2}{2} > 0$$

Câu 13. Giải phương trình $x\sqrt[3]{x-1}+2\sqrt{2x-3}+2x^2-9x+6=0$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$

Ta có $x\sqrt[3]{x-1}+2\sqrt{2x-3}+2x^2-9x+6=0$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt[3]{x-1}-1)+(\sqrt{2x-3}-1)(x+(x-2)\sqrt{2x-3})=0$$

Ta luôn có $x+(x-2)\sqrt{2x-3}=\frac{1}{27}(3\sqrt{2x-3}+5)(3\sqrt{2x-3}-1)^2+\frac{76}{27}>0$

Nếu $x > 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} > 1 \\ \sqrt{2x-3} > 1 \end{cases}$ suy ra $VT > 0$

Nếu $\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} < 1 \\ \sqrt{2x-3} < 1 \end{cases}$ suy ra $VT < 0$

Câu 14. Giải phương trình $6\sqrt[3]{3x+2}-18\sqrt{x+2}=x^2-x-26$

Giải

Điều kiện $x \geq -2$

Ta có $6\sqrt[3]{3x+2}-18\sqrt{x+2}=x^2-x-26$

$$\Leftrightarrow 6(\sqrt[3]{3x+2}-x)=x^2-7x-26+18\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow 6(\sqrt[3]{3x+2}-x)=(\sqrt{x+2}-1)^2(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+4)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{3x+2}+1)^2(\sqrt[3]{3x+2}-2)+(\sqrt{x+2}-1)^2(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+4)=0$$

Nếu $x > 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+2} > 2 \\ \sqrt{x+2} > 1 \end{cases}$ suy ra $VT > 0$

Nếu $x < 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+2} < 2 \\ \sqrt{x+2} < 1 \end{cases}$ suy ra $VT \leq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = -1$

Câu 15. Giải phương trình $4x^2+16+2\sqrt[3]{2x^2-1}=(2x^2-2x+7)\sqrt{1-3x}$

Giải

Điều kiện $x \leq \frac{1}{3}$

Ta có $4x^2+16+2\sqrt[3]{2x^2-1}=(2x^2-2x+7)\sqrt{1-3x}$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{2x^2-1}+5x+4)=(\sqrt{1-3x}-2)(2x^2-2x+3-2\sqrt{1-3x})$$

Ta luôn có $\begin{cases} 2x^2-2x+3-2\sqrt{1-3x}=2x^2+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-3x}-\frac{3}{2}\right)^2 > 0 \\ 2x^2-1+(5x+4)^3=(x+1)(125x^2+177x+63) \end{cases}$

Nếu $-1 < x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x^2-1}+5x+4 > 0 \\ \sqrt{1-3x} < 2 \end{cases}$ suy ra $VT > VP$

$$\text{Nếu } x < -1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+2} + 5x + 4 < 0 \\ \sqrt{1-3x} > 2 \end{cases} \text{ suy ra } VT < VP$$

Câu 16. Giải phương trình $3\sqrt{x-1}\sqrt[3]{2x-3} = 2x^2 + 14x - 33$

Giải

Điều kiện $x \geq 1$

$$\text{Ta có } 3\sqrt{x-1}\sqrt[3]{2x-3} = 2x^2 + 14x - 33$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}(\sqrt[3]{2x-3} - 3x + 5) + 3(3x-5)\sqrt{x-1} - 2x^2 - 14x + 33 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}(\sqrt[3]{2x-3} - 3x + 5) + (\sqrt{x-1} - 1)(7x - 24 - (2x+9)\sqrt{x-1}) = 0$$

$$\text{Ta có } 7x - 24 - (2x+9)\sqrt{x-1} = -2\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1} - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{39}{8}\sqrt{x-1} - 17 < 0 \text{ và}$$

$$2x - 3 - (3x-5)^3 = -(x-2)(27x^2 - 81x + 61)$$

$$\text{Nếu } 1 \leq x < 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x-3} - 3x + 5 < 0 \\ \sqrt{x-1} > 1 \end{cases} \Rightarrow VT > 0$$

$$\text{Nếu } x > 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x-3} - 3x + 5 > 0 \\ \sqrt{x-1} < 1 \end{cases} \Rightarrow VT < 0$$

Câu 17. Giải phương trình $\sqrt[5]{x-3} + 2\sqrt{2x+1} = 4x-9$

Giải

Điều kiện $x \geq 3$

$$\text{Ta có } \sqrt[5]{x-3} + 2\sqrt{2x+1} = 4x-9 \Leftrightarrow (\sqrt[5]{x-3} - 2x + 7) = (\sqrt{2x+1} - 3)(\sqrt{2x+1} + 1)$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \sqrt[5]{x-3} - 2x + 7 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{(x-3)^4}} - 2.$$

$$\text{Vậy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{100000}} + 3$$

Lập Bảng biến thiên ta được.

- Nếu $x > 4$ thì $f(x) < 0 \Rightarrow VT < VP$
- Nếu $x < 4$ thì $f(x) > 0 \Rightarrow VT > VP$

Xem thêm ở phần giải phương trình bằng phương pháp hàm số

Câu 18. Giải phương trình $\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - 5}}}} = 5$

Giải

Điều kiện $x \geq 5$.

$$\text{Đặt } \sqrt{x - \sqrt{x - 5}} = t; (x \geq t \geq 0).$$

$$\text{Phương trình đã cho thành } \sqrt{x - \sqrt{x - t}} = 5.$$

- Nếu $t < 5$ thì $x - t > x - 5 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-t} > \sqrt{x-5} \Rightarrow x - \sqrt{x-t} < x - \sqrt{x-5} \Rightarrow \sqrt{x - \sqrt{x-t}} > \sqrt{x - \sqrt{x-5}} \Rightarrow t < 5$ - Vô lý
- Nếu $t > 5$ thì $0 \leq x - t < x - 5 \Rightarrow \sqrt{x-t} < \sqrt{x-5} \Rightarrow x - \sqrt{x-t} > x - \sqrt{x-5} \Rightarrow \sqrt{x - \sqrt{x-t}} > \sqrt{x - \sqrt{x-5}} \Rightarrow t > 5$ - Vô lý

Do đó, $t = 5$. Ta có $\sqrt{x - \sqrt{x - 5}} = 5 \Leftrightarrow x - 25 = \sqrt{x - 5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 25 \\ (x - 25)^2 = x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 30$.

Vậy $x = 30$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Câu 19. Giải phương trình $x\sqrt[6]{(1+x^2)^{11}} + \sqrt{2+3x^2}\sqrt[3]{3+5x^2}\sqrt[6]{1+2x^2} = 0$

Giải

Điều kiện $x < 0$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1+x^2)^2} \sqrt[3]{x^2(1+x^2)^2} \sqrt[6]{x^2(1+x^2)} = \sqrt{2+3x^2} \sqrt[3]{3+5x^2} \sqrt[6]{1+2x^2} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{1 + \frac{(1+x^2)^2}{2+3x^2}} - 1 \sqrt[3]{1 + \frac{x^2(1+x^2)^2}{3+5x^2}} - 1 \sqrt[6]{1 + \frac{x^2(1+x^2)}{1+2x^2}} - 1 = 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{1 + \frac{x^4 - x^2 - 1}{2+3x^2}} \sqrt[3]{1 + \frac{(x^2+3)(x^4 - x^2 - 1)}{3+5x^2}} \sqrt[6]{1 + \frac{x^4 - x^2 - 1}{1+2x^2}} = 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Nếu $x^4 - x^2 - 1 > 0 \Rightarrow VT(1) > 1$

Nếu $x^4 - x^2 - 1 < 0 \Rightarrow VT(1) < 1$

Như vậy $(1) \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Kỹ thuật đánh giá theo cụm

Tính chất. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ xác định trên D . Nếu.

- $\min_D f(x) = m_1; \min_D g(x) = m_2 \Rightarrow f(x) + g(x) \geq m_1 + m_2 \quad \forall x \in D$.
- $\max_D f(x) = M_1; \max_D g(x) = M_2 \Rightarrow f(x) + g(x) \leq M_1 + M_2 \quad \forall x \in D$.
- $\min_D f(x) = m; \max_D g(x) = m \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m \\ g(x) = m \end{cases}$.

Đầu tiên chúng ta sẽ đi vào tìm hiểu các bài toán sử dụng kỹ thuật phân tích tổng bình phương SOS. Đầu tiên để làm theo cách này ta sẽ làm theo các bước sau và chú ý rằng đang áp dụng cho đa số những bài các căn đang đứng đơn lẻ, đa thức trong các căn cùng bậc hoặc một số bài có thể không và có nghiệm kép

- **Bước 1.** Tìm nghiệm của phương trình
- **Bước 2.** Tìm nhân tử chứa nghiệm đơn cho từng căn
- **Bước 3.** Xác định dấu của vế trái và từng nhân tử, nếu tất cả cùng dấu thì khi đó phân tích phương trình thành $\alpha(\sqrt{f(x)} - a)^2 + \beta(\sqrt{f_1(x)} - b)^2 + \dots + \xi(\sqrt{f_n(x)} - z)^2 = 0$

Với $\alpha, \beta, \dots, \xi$ cùng dấu, $\sqrt{f(x)} - a; \sqrt{f_1(x)} - b$ là những nhân tử chứa nghiệm đơn vừa tìm được.

Sau đây chúng ta sẽ đi vào các ví dụ cụ thể!

Câu 1. Giải phương trình $\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} + \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} = 2x^2 + 2x + 2$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 lần 1 – THPT Chuyên ĐH Sư phạm – Hà Nội

Giải

Ta có nghiệm của phương trình là $x = -1$ và khi $x = -1$ thì $\begin{cases} \sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} = 1 \\ \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} = 1 \end{cases}$

Nhận thấy rằng $VT \leq 0$ nên ta sẽ tách phương trình thành.

Lời giải ngắn gọn của bài này như sau.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} + \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} &= 2x^2 + 2x + 2 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} - 1)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} - 1)^2 - \frac{1}{2}(x+1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $VT \leq 0$ nên dấu "=" chỉ xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} - 1 = 0 \\ \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$

Vậy $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 2. Giải phương trình $2\sqrt{x^2 - 2x - 1} + 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 3\sqrt{-x^2 + 2x + 3} = 0$

Giải

Biến đổi phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2 - 2x - 1} + 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 3\sqrt{-x^2 + 2x + 3} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - 1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 2\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - 1\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết!

Bài tập tương tự.

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$$

$$\text{Đ/s. } -\frac{1}{2}(\sqrt{x-2}-1)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{4-x}-1)^2 - (x-3)^2 = 0$$

$$\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{x+3} + 7\sqrt{2x+2} + 12\sqrt{5-x} = 2x + 41$$

$$\text{Đ/s. } -\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}-1)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{x+3}-2)^2 - \frac{7}{4}(\sqrt{2x+2}-2)^2 - 3(\sqrt{5-x}-2)^2 = 0$$

Câu 3. Chứng minh rằng. $f(x) = \frac{x^4 + x + 1 + 32\sqrt[4]{x^3 - 4x^2 + 7x - 12}}{x^4 + x^2 + 16x - 11} - 1 \leq 0; \quad \forall x \in [3; +\infty)$

Giải

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\left(2\sqrt[4]{x-3} - \sqrt[4]{x^2-x+4}\right)^2 - 32\left(\sqrt{x-3}-1\right)^2 - 2\left(\sqrt{x^2-x+4}-4\right)^2}{x^4 + x^2 + 16x - 11} \leq 0$$

$$\text{Do đó dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt[4]{x-3} - \sqrt[4]{x^2-x+4} = 0 \\ \sqrt{x-3} - 1 = 0 \\ \sqrt{x^2-x+4} - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 4. Giải phương trình $12x^2 + 16x + 1 - 2\sqrt{24x^3 + 12x^2 - 6x} - 4\sqrt{x^2 - x} = 4\sqrt{8x^3 + 9x^2 + x}$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Điều kiện. } & \begin{cases} 24x^3 + 12x^2 - 6x \geq 0 \\ x^2 - x \geq 0 \\ 8x^3 + 9x^2 + x \geq 0 \end{cases} \\ & \left(6x - 2\sqrt{6x(4x^2 + 2x - 1)} + 4x^2 + 2x - 1\right) + \left(1 - 2\sqrt{4x^2 - 4x} + 4x^2 - 4x\right) \\ & \quad + \left[4x^2 + 4x - 2\sqrt{(4x^2 + 4x)(1 + 8x)} + 1 + 8x\right] = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt{6x} - \sqrt{4x^2 + 2x - 1}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{4x^2 - 4x}\right)^2 + \left(\sqrt{4x^2 + 4x} - \sqrt{1 + 8x}\right)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6x} - \sqrt{4x^2 + 2x - 1} = 0 \\ 1 - \sqrt{4x^2 - 4x} = 0 \\ \sqrt{4x^2 + 4x} - \sqrt{1 + 8x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 5. Giải phương trình $3x + \frac{1}{\sqrt{2x-7}} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} = 2\left(\sqrt[4]{2x-7} + \sqrt[4]{x-3} + 5\right)$

Giải

$$\text{Điều kiện. } \begin{cases} 2x-7 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}.$$

Phương trình

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \left[(2x-7) - 2\sqrt[4]{2x-7} + \frac{1}{\sqrt{2x-7}}\right] + \left[(x-3) - 2\sqrt[4]{x-3} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}\right] = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\left(\sqrt[4]{2x-7}\right)^2\right)^2 - 2\sqrt[4]{2x-7} + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x-7}}\right)^2 + \left(\left(\sqrt[4]{x-3}\right)^2\right)^2 - 2\sqrt[4]{x-3} + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x-3}}\right)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[4]{2x-7}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{2x-7}}\right]^2 + \left[\left(\sqrt[4]{x-3}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{x-3}}\right]^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[4]{2x-7}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{2x-7}} = 0 \\ \left(\sqrt[4]{x-3}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{x-3}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[4]{2x-7}\right)^3 = 1 \\ \left(\sqrt[4]{x-3}\right)^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Câu 6. Giải phương trình $\sqrt{9x^3 - 18x^2} + \sqrt{36x^2 - 9x^3} = x^2 + 9$.

Giải

$$\text{Đặt. } a = \sqrt{9x^3 - 18x^2}; \quad b = \sqrt{36x^2 - 9x^3} \quad (a, b \geq 0) \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{18} = x^2$$

$$\text{Ta có } a + b = \frac{a^2 + b^2}{18} + 9 \Leftrightarrow (a^2 - 18a + 81) + (b^2 - 18b + 81) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 9)^2 + (b - 9)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 9.$$

Các bài toán trên đều là các bài toán đơn giản, vậy câu hỏi đặt ra là nếu các bài toán khó hơn và chặt hơn thì các hệ số đứng trước các tổng bình phương có thể 1 vài số bị âm hoặc không thể đưa về dạng tổng SOS thì sao? Dưới đây ta sẽ tìm hiểu một cách khác mà mình gọi là SOS không hoàn toàn. Nguyên tắc của phương pháp này là ta sẽ xử lý các biểu thức chứa nghiệm kép từ đơn giản tới phức tạp để giải quyết các bài toán. Các bước làm như sau. Ta xét phương trình $f(x) = 0$.

- **Bước 1.** Sắp xếp độ phức tạp của các căn trong phương trình tăng dần, ví dụ trong phương trình có 2 căn là $\sqrt{x+1}, \sqrt{x^2+1}, \sqrt[3]{x^4+1}$ thì phức tạp tăng từ trái qua phải.
- **Bước 2.** Tìm biểu thức chứa nghiệm kép cho các biểu thức đơn giản trước, nếu có 3 biểu thức thì ta tìm cho 2 biểu thức trước. Chú ý ta chỉ lấy những nhân tử cùng dấu với vế trái của phương trình, những nhân tử không cùng dấu ta sẽ xử lý bằng bước thứ 3.
- **Bước 3.** Ta dồn tất cả phần còn lại vào một biểu thức và chứng minh biểu thức đó cùng dấu với vế trái ta đang xét có thể bằng phân tích nhân tử hoặc đạo hàm, bất đẳng thức!

Để hiểu rõ hơn phương pháp ta đi vào các ví dụ cụ thể!

Câu 7. Giải phương trình $\frac{4\sqrt{1-x}}{x} + \frac{\sqrt{2x-1}}{1-x} = 3\sqrt{3}$

Giải

$$\text{Điều kiện. } \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Bước đầu tiên bao giờ cũng là đi tìm nghiệm. Ta được 1 nghiệm $x = \frac{2}{3}$.

Kiểm tra nghiệm bội ta có

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{3}x(1-x)}{3x-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{3}x(1-x)}{(3x-2)^2} \neq 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ là nghiệm kép.}$$

Tìm nhân tử từng cụm, giả sử nhân tử có dạng. $\begin{cases} 4(1-x)\sqrt{1-x} + ax + b = 0 \\ x\sqrt{2x-1} + cx + d = 0 \end{cases}$.

Khi đó sẽ tìm được 2 nhân tử là
$$\begin{cases} x\sqrt{2x-1} - \sqrt{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{9} = 0 \\ 4(1-x)\sqrt{1-x} + 2\sqrt{3}x - \frac{16\sqrt{3}}{9} = 0 \end{cases}.$$

Phân tích nhân tử từng cụm 1 sử dụng công thức chia 2 căn ta được.

$$\begin{aligned} 1. \quad & 4(1-x)\sqrt{1-x} + 2\sqrt{3}x - \frac{16\sqrt{3}}{9} = \left(\frac{4}{9}\sqrt{1-x} + \frac{2\sqrt{3}}{27}\right)(3\sqrt{1-x} - \sqrt{3})^2 \\ 2. \quad & x\sqrt{2x-1} - \sqrt{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{(3\sqrt{2x-1} - \sqrt{3})^3}{54} \end{aligned}$$

Nhìn vào rõ ràng thấy nhân tử thứ 2 không có cùng dấu với bài toán do chứa nghiệm bội 3 nên ta sẽ làm mạnh tay hơn là phân tích nhân tử cả cụm.

$$\begin{aligned} & -3\sqrt{3}x(1-x) - 2\sqrt{3}x + \frac{16\sqrt{3}}{9} + x\sqrt{2x-1} \text{ với hy vọng cả cụm đó sẽ luôn dương. Thật vậy ta được.} \\ & -3\sqrt{3}x(1-x) - 2\sqrt{3}x + \frac{16\sqrt{3}}{9} + x\sqrt{2x-1} \\ & = \left(\sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \left(2\sqrt{2x-1} + \frac{(9x-4)\sqrt{3}}{6}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy lời giải là.

$$\begin{aligned} & 4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} = 3\sqrt{3}x(1-x) \\ & \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \underbrace{\left(2\sqrt{3}\sqrt{1-x} + 1\right)}_{>0} + \left(\sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \underbrace{\left(2\sqrt{2x-1} + \frac{(9x-4)\sqrt{3}}{6}\right)}_{>0} = 0 \end{aligned}$$

Để thấy $VT \geq 0$ nên dấu “=” xảy ra khi
$$\begin{cases} \sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \\ \sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Nhận xét. Ở đây chúng ta đã sử dụng hướng phân tích nhân tử, tuy nhiên đang sử dụng một chút máy tính, tất nhiên các bạn có thể đặt từng cái căn một rồi thế vào cụm đi theo nó để đưa nó trở thành đa thức rồi phân tích nhân tử, cuối cùng thế ngược lại thì cũng được, tuy nhiên sẽ khá mất thời gian. Vì thế lời khuyên cho những bạn nào không dùng máy tính đoạn về sau là các bạn có thể sử dụng đạo hàm để xử lý các cụm nhân tử đó!

Câu 8. Giải phương trình $(x-3)\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{x}\right) = (x-1)\sqrt{2x+1} + 3\sqrt{x} - 11.$

Giải

Điều kiện $x \geq 0$.

phương trình tương đương với. $(x-3)(x+2\sqrt{x}) = 2(x-1)\sqrt{2x+1} + 6\sqrt{x} - 22.$

$$\Leftrightarrow \left[(x-1)^2 - 2(x-1)\sqrt{2x+1} + 2x+1\right] + (2x\sqrt{x} - 3x - 12\sqrt{x} + 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1-\sqrt{2x+1})^2 + (2x\sqrt{x} - 3x - 12\sqrt{x} + 20) = 0 \quad (*)$$

Đặt $\sqrt{x} = a$ ($a \geq 0$), xét hàm số $f(a) = 2a^3 - 3a^2 - 12a + 20$, $a \geq 0$

Ta có $f'(a) = 6a^2 - 6a - 12 \Rightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ (do $a \geq 0$)

| Các bài toán chứa tham số

Lập bảng biến thiên cho ta $\min_{[0;+\infty)} f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ hay.

$$2x\sqrt{x} - 3x - 12\sqrt{x} + 20 \geq 0, \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{Từ đó ta có } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{2x+1} \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Nhận xét. Bài toán này phân tích được đều nhờ dấu hiệu của biểu thức đứng trước căn và chứng minh phần còn lại cùng dấu với một vế đang xét bằng phương pháp đạo hàm như bài toán mình đã nói ở trên.

Bài tập tương tự.

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 3 = \sqrt{2x+2} + \sqrt[4]{2x-1}$$

$$\text{Đ/s. } (x-1)^2 + \frac{1}{4}(\sqrt{2x+2}-2)^2 + \frac{(\sqrt[4]{2x-1}-1)^2(\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+3)}{4} = 0$$

$$x + \frac{4}{x} + 3x^2 = 2\sqrt{x^3-4} + 4\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^3+4x}$$

$$\text{Đ/s. } (x-\sqrt{x^3-4})^2 + (x-2\sqrt{x-1})^2 + \frac{1}{x}(\sqrt{x^3+4x}-2x)((2x+3)\sqrt{x^3+4x}+2x^2+6x) = 0$$

$$x^2 + 12x + 1 = 4\sqrt{x^3+x} + 2x\sqrt{4x-1} + 2\sqrt{4x-x^2}$$

$$\text{Đ/s. } (\sqrt{4x-x^2}-1)^2 + (x-\sqrt{4x-1})^2 + \frac{(x^2-4x+1)^2}{x^2+4x+1+4\sqrt{x^3+x}} = 0$$

Câu 9. Giải phương trình $\frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 4 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

Giải

Điều kiện $x > 0$.

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với. } \left(3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 6\right) + \left(2 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\right) + \left(\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \frac{3(x-1)^2}{(2\sqrt{x^2-x+1}+x+1)\sqrt{x^2-x+1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 10. Giải phương trình $\sqrt{3x-7} + (4x-7)\sqrt{7-x} = 32$.

Giải

$$\text{Điều kiện } \frac{7}{3} \leq x \leq 7.$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{7-x} \quad \left(0 \leq a \leq \sqrt{\frac{14}{3}}\right).$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{14-3a^2} - 4a^3 + 21a - 32 = 0. \text{ Ta có } 0 \leq f(a) = \sqrt{14-3a^2} \leq \sqrt{14}$$

$$\text{Ta có } g(a) = -4a^3 + 21a - 32, \quad 0 \leq a \leq \sqrt{\frac{14}{3}}$$

$$\Rightarrow g'(a) = -12a^2 + 21 \Rightarrow -32 = g(0) \leq g(a) \leq g\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = -32 + 7\sqrt{7}$$

Do đó $f(a) + g(a) \leq -32 + 7\sqrt{7} + \sqrt{14} < 0$. Hay phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 11. Giải phương trình $\frac{4}{4-x^2} + \frac{5+3\sqrt{1-x^2}}{8\sqrt{1-x^2}+8-2x^2} = \frac{13}{2+\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}}$

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Ta có

$$2\sqrt{2} \leq \sqrt{5-x} + \sqrt{3+x} \leq \sqrt{(1+1)(5-x+3+x)} = 4 \Rightarrow \frac{13}{6} \leq \frac{13}{2+\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}} = f(x)$$

Hay $\min_{[-1;1]} f(x) = \frac{13}{6} \Leftrightarrow x = 1$ (1). Đặt $\sqrt{1-x^2} = a$ ($a \geq 0$), ta có

$$\frac{4}{4-x^2} + \frac{5+3\sqrt{1-x^2}}{8\sqrt{1-x^2}+8-2x^2} = \frac{4}{3+a^2} + \frac{5+3a}{8a+6+2a^2} = \frac{4}{3+a^2} + \frac{1}{a+3} + \frac{1}{2(a+1)}.$$

Xét hàm số $g(a) = \frac{4}{3+a^2} + \frac{1}{a+3} + \frac{1}{2(a+1)}$, $a \geq 0$.

Ta có $g'(a) = -\frac{8a}{(a^2+3)^2} - \frac{1}{2(a+1)^2} - \frac{1}{(a+3)^2} < 0$, $\forall a \geq 0$

Hay hàm số nghịch biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó $g(a) \leq g(0) = \frac{13}{6}$ tức là $\frac{4}{4-x^2} + \frac{5+3\sqrt{1-x^2}}{8\sqrt{1-x^2}+8-2x^2} \leq \frac{13}{6}$ (2)

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \pm 1$. Kết hợp (1), (2) cho ta nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Câu 12. Giải phương trình $4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4(x\sqrt{5x-1} + \sqrt{9-5x})$

Giải

Điều kiện. $1 \leq x \leq \frac{9}{5}$.

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} - 4x\sqrt{5x-1} - 4\sqrt{9-5x} &= 0 \\ \Leftrightarrow (4x^2 - 2.2x.\sqrt{5x-1} + 5x - 1) + [4 - 2.2.\sqrt{9-5x} + 9 - 5x] + \sqrt{x-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - \sqrt{5x-1})^2 + (2 - \sqrt{9-5x})^2 + \sqrt{x-1} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{5x-1} = 0 \\ 2 - \sqrt{9-5x} = 0 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Câu 13. Giải phương trình $x^3 - 3x + (4x^2 - 2\sqrt{3}x + 2)\sqrt{1+x^2} = 0$

Giải

Ta có VT $\Leftrightarrow x^3 - 3x + \left[3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + x^2 + 1\right]\sqrt{x^2+1} \Rightarrow VT \geq x^3 - 3x + (x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + (x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

Ta có $f'(x) = 3(x^2 - x + x\sqrt{x^2+1})$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta được $\min f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$

Hay $f(x) \geq 0 = VP \Rightarrow VT \geq VP$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0$ và $f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$. Suy ra $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ứng dụng của phương pháp vector

Kiến thức cần nhớ

cho 2 vecto $\vec{u}, \vec{v}$. Khi đó, ta có

- $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.
- $|\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{u} - \vec{v}|$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.

Mở rộng $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ cùng phương.

Sau đây chúng ta sẽ đi vào các ví dụ cụ thể!

Câu 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 5$

Nguyễn Mai Hoàng Anh

Giải

$$\text{Ta xét } \begin{cases} \vec{u} = (x+2; 3) \\ \vec{v} = (1-x; 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(x+2)^2 + 3^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(1-x)^2 + 1^2} \end{cases}$$

$$\text{Lại có } \vec{u} + \vec{v} = (3; 4) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\text{Mà } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + 3^2} + \sqrt{(1-x)^2 + 1^2} \geq 5$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x+2}{1-x} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow x+2 = 3(1-x) \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{4}$.

Câu 2. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 5x + 6} + \sqrt{x^2 + 4x + 8} = \sqrt{2(x^2 + 3) + 5x + 2(x+2)\sqrt{x+2}}$

Nguyễn Mai Hoàng Anh

Giải

Điều kiện $x \geq -2$.

Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 5x + 6} + \sqrt{x^2 + 4x + 8} &= \sqrt{2x^2 + 5x + 6 + 2(x+2)\sqrt{x+2}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + x+2} + \sqrt{(x+2)^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x+2} + x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Ta xét } \begin{cases} \vec{u} = (x+2; \sqrt{x+2}) \\ \vec{v} = (-2; x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(x+2)^2 + (\sqrt{x+2})^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (x+2)^2} \end{cases}$$

Lại có $\vec{u} + \vec{v} = (x; \sqrt{x+2} + x + 2) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x+2} + x + 2)^2}$

Mà $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (\sqrt{x+2})^2} + \sqrt{(-2)^2 + (x+2)^2} \geq \sqrt{x^2 + (\sqrt{x+2} + x + 2)^2}$

Dấu “=” xảy ra $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x+2}{-2} = \frac{\sqrt{x+2}}{x+2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = -2\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + 2\sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -2$.

Câu 3. Giải phương trình $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{17x^2}{4} - x + 1} + \sqrt{\frac{17x^2}{4} - 4x + 1}$

Nguyễn Mai Hoàng Anh

Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{2} - \sqrt{\frac{17x^2}{4} - 4x + 1} = \sqrt{\frac{17x^2}{4} - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} + 4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{1 - x + \frac{x^2}{4} + 4x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (-1)^2} - \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2x-1)^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + (2x)^2}$$

Ta xét $\begin{cases} \vec{u} = (1; -1) \\ \vec{v} = \left(\frac{x}{2}; 2x-1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2x-1)^2} \end{cases}$

Lại có $\vec{u} - \vec{v} = \left(1 - \frac{x}{2}; 2x\right) \Rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + (2x)^2}$

Mà $|\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{u} - \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (-1)^2} - \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2x-1)^2} \leq \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + (2x)^2}$

Dấu “=” xảy ra $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{x}{2}} = \frac{-1}{2x-1} \Leftrightarrow 2x-1 = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{2}{5}$.

Câu 4. Giải phương trình $(3-x)\sqrt{x-1} + \sqrt{5-2x} = \sqrt{-x^3 + 10x^2 - 34x + 40}$

Giải

Điều kiện. $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$.

Ta xét $\begin{cases} \vec{u} = (3-x; 1) \\ \vec{v} = (\sqrt{x-1}; \sqrt{5-2x}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(3-x)^2 + 1^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(x-1) + (5-2x)} \end{cases}$

| Các bài toán chứa tham số

$$\text{Lại có } \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = (3-x)\sqrt{x-1} + \sqrt{5-2x} \\ |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{(3-x)^2 + 1} \sqrt{4-x} = \sqrt{-x^3 + 10x^2 - 34x + 40} \end{cases}$$

$$\text{Mà } \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Leftrightarrow (3-x)\sqrt{x-1} + \sqrt{5-2x} \leq \sqrt{-x^3 + 10x^2 - 34x + 40}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{3-x}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{5-2x}} \Leftrightarrow (3-x)\sqrt{5-2x} = \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ (x-2)(2x^2 - 13x + 23) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Câu 5. Giải hệ phương trình $-x\sqrt{2-3x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{x^2+1}\sqrt{3-4x}$

Đề nghị 30/4 – THPT chuyên Long An – Tỉnh Long An

Giải

Điều kiện. $x \leq \frac{2}{3}$.

$$\text{Ta xét } \begin{cases} \vec{u} = (-x; 1) \\ \vec{v} = (\sqrt{2-3x}; \sqrt{1-x}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{x^2+1} \\ |\vec{v}| = \sqrt{3-4x} \end{cases}$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = -x\sqrt{2-3x} + \sqrt{1-x} \\ |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{x^2+1}\sqrt{3-4x} \end{cases}$$

$$\text{Mà } \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Leftrightarrow -x\sqrt{2-3x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{x^2+1}\sqrt{3-4x}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2-3x}}{-x} = \frac{\sqrt{1-x}}{1} \Leftrightarrow \sqrt{2-3x} = -x\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ (x-2)(x^2+x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 6. Giải phương trình $\sqrt{1-2x} = \sqrt{3(2x^2+1)} + 2x\sqrt{x+1}$

Nguyễn Mai Hoàng Anh

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2x} - 2x\sqrt{x+1} &= \sqrt{3(2x^2+1)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2\left(\frac{1}{2}-x\right)} - 2x\sqrt{x+1} &= \sqrt{\frac{3}{2}(4x^2+2)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}-x} + (-2x)\sqrt{x+1} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{4x^2+2} \end{aligned}$$

$$\text{Ta xét } \begin{cases} \vec{u} = (\sqrt{2}; -2x) \\ \vec{v} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}-x}; \sqrt{x+1}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{4x^2+2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{1-2x} - 2x\sqrt{x+1} \\ |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{\frac{3}{2}}(4x^2+2) \end{cases}$$

$$\text{Mà } \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{1-2x} - 2x\sqrt{x+1} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}(4x^2+2)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}-x}} = \frac{-2x}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow -2x\sqrt{\frac{1}{2}-x} = \sqrt{2(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x^3 - x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ (2x+1)(x^2-x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 7. Giải phương trình $\left| \sqrt{x^2+2x+5} - \sqrt{x^2-4x+40} \right| = x^2+5x + \frac{45}{4}$

Giải

Xét các vectơ $\vec{u} = (x+1; -2)$, $\vec{v} = (2-x; 6)$. Suy ra. $\vec{u} + \vec{v} = (3; 4)$.

Khi đó $\left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right| \leq |\vec{u} + \vec{v}| = 5$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ hoặc $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng

Hai trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{0}$ không thể xảy ra.

Suy ra $\frac{x+1}{2-x} = \frac{-2}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$. Khi đó $x^2+5x + \frac{45}{4} \leq 5 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$.

Vậy $x = -\frac{5}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Các bài toán sử dụng bất đẳng thức cổ điển

Câu 1. Giải phương trình $13\sqrt{x^2-x^4} + 9\sqrt{x^2+x^4} = 16$

Tiến sĩ Trần Nam Dũng – Đại học khoa học tự nhiên – ĐHQG TP.HCM
Đề nghị Olympic 30/4/2011 – THPT Chuyên Lê Hồng Phong – TH.HCM

Giải

Với $\alpha, \beta > 0$. Ta sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned} 13\sqrt{x^2-x^4} &= \frac{13}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 x^2 (1-x^2)} \leq \frac{13}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 x^2 + (1-x^2)}{2} = \frac{13(\alpha^2-1)x^2 + 13}{2\alpha} \\ 9\sqrt{x^2+x^4} &= \frac{9}{\beta} \sqrt{\beta^2 x^2 (1+x^2)} \leq \frac{9}{\beta} \cdot \frac{\beta^2 x^2 + (1+x^2)}{2} = \frac{9(\beta^2+1)x^2 + 9}{2\beta} \\ \Rightarrow 13\sqrt{x^2-x^4} + 9\sqrt{x^2+x^4} &\leq \left[\frac{13(\alpha^2-1)}{2\alpha} + \frac{9(\beta^2+1)}{2\beta} \right] x^2 + \frac{13}{2\alpha} + \frac{9}{2\beta} \end{aligned}$$

| Các bài toán chứa tham số

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow (\alpha^2 + 1)x^2 = (\beta^2 - 1)x^2 = 1$

Chọn $\alpha, \beta > 0$ thỏa mãn $\begin{cases} \alpha^2 + 1 = \beta^2 - 1 \\ \frac{13(\alpha^2 - 1)}{2\alpha} + \frac{9(\beta^2 + 1)}{2\beta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow VT \leq 16 = VP$

Dấu “=” xảy ra $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ngoài ra ta có thể dùng đạo hàm giải bài này. Đặt $f(x) = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}$ hàm $f(x)$ liên tục

trên $[0; 1]$. Ta có $f'(x) = \frac{13(-2x^3 + x)}{\sqrt{x^2 - x^4}} + \frac{9(2x^3 + x)}{\sqrt{x^2 + x^4}}$.

$$f'(x) = \frac{13(-2x^3 + x)}{\sqrt{x^2 - x^4}} + \frac{9(2x^3 + x)}{\sqrt{x^2 + x^4}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 13(2x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 9(2x^2 + 1)\sqrt{1 - x^2} \\ x = 0(L) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right] \\ (5x^2 - 4)(200x^4 + 160x^2 - 22) = 0 \end{cases}$$

Dễ thấy với $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$ thì $200x^4 + 160x^2 - 22 \geq 108 > 0$, nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Do hàm $f'(x)$ đổi dấu từ $(+) \Rightarrow (-)$ khi qua $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ nên đạt cực đại tại

$$x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow f(x) \leq f\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 16 = VP.$$

Bài toán đã được giải quyết!

Câu 2. Giải phương trình $x^3 - 3x^2 - 8x + 40 - 8\sqrt[4]{4x + 4} = 0$

Trích đề thi HSG Quốc Gia – Bảng A – 1995

Giải

Điều kiện $x \geq -1$.

Ta dễ dàng thấy phương trình có nghiệm $x = 3$ nên ta sẽ dùng bất đẳng thức AM - GM để khử căn.

Ta có $8\sqrt[4]{4x + 4} = \sqrt[4]{(4x + 4) \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16} \stackrel{AM-GM}{\leq} x + 13$.

Khi đó $VT \geq x^3 - 3x^2 - 8x + 40 - (x + 13) = (x - 3)^2(x + 3) \geq 0; \quad \forall x \geq -1$.

Vậy dấu “=” xảy ra khi $x = 3$

Câu 3. Giải phương trình $x\sqrt{x} + \frac{32}{x\sqrt{x}} = 6\sqrt[3]{3x - 4}$

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Nhìn vào phương trình ta thấy $VT > 0$ nên điều kiện có nghiệm là $x > \frac{4}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $x\sqrt{x} + \frac{32}{x\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{2} + \frac{32}{x\sqrt{x}} \stackrel{AM-GM}{\geq} 6\sqrt{x}$

Khi đó ta cần chứng minh $\sqrt{x} \geq \sqrt[3]{3x - 4} \Leftrightarrow x\sqrt{x} \geq 3x - 4 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2(\sqrt{x} + 1) \geq 0$ luôn đúng.

Vậy $VT \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 4$

Câu 4. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{-x^2 + x + 1} = x^2 - x + 2$

Giải

Điều kiện .
$$\begin{cases} x^2 + x - 1 \geq 0 \\ -x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Cách 1. Dùng bất đẳng thức dạng $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Ta có
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{1 \cdot (x^2 + x - 1)} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{x^2 + x}{2} \\ \sqrt{-x^2 + x + 1} = \sqrt{1 \cdot (-x^2 + x + 1)} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{-x^2 + x + 2}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow VT \leq x + 1$. Dấu “=” xảy ra khi
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 1} = 1 \\ \sqrt{-x^2 + x + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Lại có $VP = x^2 - 2x + 1 + x + 1 = (x - 1)^2 + (x + 1) \geq x + 1$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$. Nên $VT \leq VP$. Dấu “=” xảy ra tại $x = 1$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cách 2. Dùng bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Ta có
$$\begin{cases} VT = 1 \cdot \sqrt{x^2 + x - 1} + 1 \cdot \sqrt{-x^2 + x + 1} \stackrel{Cauchy-Schwarz}{\leq} \sqrt{(1^2 + 1^2)(x^2 + x - 1 + x - x^2 + 1)} = 2\sqrt{x} \\ VP - 2\sqrt{x} = x^2 - x + 2 - 2\sqrt{x} = x^2 - 2x + 1 + x - 2\sqrt{x} + 1 = (x - 1)^2 + (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Do đó dấu “=” chỉ xảy ra khi $x = 1$.

Cách 3. Phân tích tổng bình phương SOS.

Ta có $x^2 - x + 2 - \sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{-x^2 + x + 1} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + x - 1} - 1)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{-x^2 + x + 1} - 1)^2 + (x - 1)^2 = 0$$

Dễ dàng nhận thấy $VP - VT \geq 0$. Nên dấu “=” xảy ra khi
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 1} = 1 \\ \sqrt{-x^2 + x + 1} = 1 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 5. Giải phương trình $\sqrt{8 - x^2} + \sqrt{\frac{x^2 - 2}{2x^2}} = 5 - \frac{1 + x^2}{x}$.

Phân tích .

Với bài toán này ta dễ dàng thấy rằng phương trình có nghiệm kép $x = 2$. Do đó ta sẽ sử dụng bất đẳng thức AM – GM sao cho dấu đẳng thức phải xảy ra tại $x = 2$.

Để có được điều đó ta phân tích như sau
$$\sqrt{8 - x^2} = 2\sqrt{\frac{m}{4} \cdot \frac{8 - x^2}{m}} \leq \frac{m}{4} + \frac{8 - x^2}{m}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\frac{m}{4} = \frac{8 - x^2}{m} \Leftrightarrow m^2 = 4(8 - x^2).$$

Với $x = 2 \Rightarrow m = 4$. Từ đó ta có
$$\sqrt{8 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(8 - x^2)} \leq \frac{4 + 8 - x^2}{4} = 3 - \frac{x^2}{4}.$$

$$\sqrt{\frac{x^2 - 2}{2x^2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{4} \cdot \frac{x^2 - 2}{2mx^2}} \leq \frac{m}{4} + \frac{x^2 - 2}{2mx^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi.
$$\frac{m}{4} = \frac{x^2 - 2}{2mx^2} \Leftrightarrow 2m^2x^2 = 4(x^2 - 2).$$

Cho $x = 2 \Rightarrow m = 1$ nên ta có $\sqrt{\frac{x^2-2}{2x^2}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{x^2-2}{2x^2}\right)} \leq \frac{x^2-2}{2x^2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2}$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 8-x^2 \geq 0 \\ \frac{x^2-2}{2x^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có các đánh giá.

$$\sqrt{8-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(8-x^2)} \leq \frac{4+8-x^2}{4} = 3 - \frac{x^2}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi. $8-x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$$\sqrt{\frac{x^2-2}{2x^2}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{x^2-2}{2x^2}\right)} \leq \frac{x^2-2}{2x^2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi. $\frac{x^2-2}{2x^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Với hai đánh giá này từ phương trình đã cho ta có

$$5 - \frac{x^2+1}{x} \leq 3 + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi. } \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 6. Giải phương trình $\sqrt{\frac{2(x^2+1)}{3}} = x\sqrt{x-\frac{1}{3}} + \sqrt{1-x}$

Giải

Điều kiện $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$

Bài này khá là cơ bản áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz là ra ngay. Ta có

$$x\sqrt{x-\frac{1}{3}} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{(x^2+1)\left(x-\frac{1}{3}+1-x\right)} = \sqrt{\frac{2(x^2+1)}{3}} = VT$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \frac{x}{\sqrt{x-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x\sqrt{x-1} = \sqrt{x-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -2x^3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 7. Giải phương trình $x^4 - 12x^3 + 38x^2 - 12x - 67 + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} = 0$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – Lần 2 – Chuyên Vĩnh Phúc

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 7$.

Cách 1. Dùng bất đẳng thức Cauchy.

$$\text{Ta có } \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x+1} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7-x} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x+5}{2} + \frac{11-x}{2} \right) = 4.$$

Khi đó $VT \leq (x-3)^2(x^2-6x-7) = (x-3)^2(x+1)(x-7) \leq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{x+1}=2 \\ \sqrt{7-x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Cách 2. Phân tích tổng bình phương.

Ta có

$$\begin{aligned} x^4 - 12x^3 + 38x^2 - 12x - 67 + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(\sqrt{x+1}-2)^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{7-x}-2)^2 - (x-3)^2(x+1)(7-x) &= 0 \end{aligned}$$

Không khó để nhận ra với $x \in [-1; 7]$ thì $VT \leq 0$. Do đó dấu “=” xảy ra khi $x=3$

Vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 8. Giải phương trình $3\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} + \sqrt[4]{3-2x} = 5$.

Giải

Điều kiện $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức AM – GM ta có các đánh giá.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x} &\leq \frac{(\sqrt{x+1})}{2} \leq \frac{x+3}{4} \Rightarrow 3\sqrt[4]{x} \leq \frac{3(x+3)}{4} \\ \sqrt[4]{2-x} &\leq \frac{\sqrt{2-x+1}}{2} \leq \frac{5-x}{4} \\ \sqrt[4]{3-2x} &\leq \frac{\sqrt{3-2x+1}}{2} \leq \frac{6-2x}{4} \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế các đánh giá này ta thu được. $3\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} + \sqrt[4]{3-2x} \leq 5$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Câu 9. Giải phương trình $9\sqrt{x+2} + \frac{32(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})}{(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})^2} = 24$

Giải

Điều kiện $-2 \leq x \leq 1$.

Ý tưởng của bài toán này vẫn như các bài toán khác, ta vẫn sẽ đánh giá $VT \geq 24$. Nhưng tuy nhiên để nguyên như thế này thì chưa làm ăn được gì, ta sẽ liên hợp tử của phân thức.

Ta có

$$\begin{aligned} 9\sqrt{x+2} + \frac{32(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})}{(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})^2} &= 24 \Leftrightarrow 9\sqrt{x+2} + \frac{96}{(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})^2(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})} = 24 \\ \Leftrightarrow 6(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}) + 3(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}) + \frac{96}{(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})^2(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})} &= 24 \end{aligned}$$

Khi đó áp dụng Cauchy cho 4 số. $6a = 6(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})$; $\frac{3}{2}b = \frac{3}{2}(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})$

$\frac{3}{2}b = \frac{3}{2}(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})$; $\frac{96}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})^2} = \frac{96}{ab^2}$ ta được.

$$6a + \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}b + \frac{96}{ab^2} \stackrel{AM-GM}{\geq} 4\sqrt[4]{\frac{6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 96 \cdot a \cdot b \cdot b}{ab^2}} = 24 = VP$$

Vậy dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} 6a = \frac{3}{2}b \\ 6a = \frac{96}{ab^2} \end{cases} \Leftrightarrow b = 4a \Leftrightarrow x = 2$

Câu 10. Giải phương trình

$$12x^2 + 16x + 1 - 2\sqrt{24x^3 + 12x^2 - 6x} - 4\sqrt{x^2 - x} - 4\sqrt{8x^3 + 9x^2 + x} = 0$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned} &12x^2 + 16x + 1 - 2\sqrt{24x^3 + 12x^2 - 6x} - 4\sqrt{x^2 - x} - 4\sqrt{8x^3 + 9x^2 + x} = 0 \\ \Leftrightarrow &12x^2 + 16x + 1 - 2\sqrt{6x(4x^2 + 2x - 1)} - 2\sqrt{4(x^2 - x)} - 2\sqrt{4(x^2 + x)(8x + 1)} = 0 \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 4x^2 + 2x - 1 \\ 4(x^2 - x) = 1 \\ 8x + 1 = 4(x^2 + x) \end{cases}$. Nên ta áp dụng bất đẳng thức

AM – GM ta được. $\begin{cases} 2\sqrt{6x(4x^2 + 2x - 1)} \leq 4x^2 + 8x - 1 \\ 2\sqrt{4(x^2 - x)} \leq 4(x^2 - x) + 1 \\ 2\sqrt{4(x^2 + x)(8x + 1)} \leq 4x^2 + 4x + 8x + 1 \end{cases}$

Khi đó $VT \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Ngoài ra nếu không thích ta có thể sử dụng cách ghép hằng đẳng thức như sau.

$$\begin{aligned} &12x^2 + 16x + 1 - 2\sqrt{24x^3 + 12x^2 - 6x} - 4\sqrt{x^2 - x} - 4\sqrt{8x^3 + 9x^2 + x} = 0 \\ \Leftrightarrow &6x - 2\sqrt{6x(4x^2 + 2x - 1)} + 4x^2 + 2x - 1 + 1 - 2\sqrt{4x^2 - 4x} + 4x^2 - 4x \\ &+ 4x^2 + 4 - 2\sqrt{(4x^2 + 4x)(8x + 1)} + 8x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow &(\sqrt{6x} - \sqrt{4x^2 + 2x - 1})^2 + (\sqrt{4x^2 - 4x} - 1)^2 + (\sqrt{4x^2 + 4x} - \sqrt{8x + 1})^2 = 0 \end{aligned}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết!

Câu 11. Giải phương trình $2(2x+1)\sqrt{x+1} + (4-x)\sqrt{2-2x} = 6\sqrt{x^2+2}$.

Giải

Điều kiện. $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Nhận xét với $x = \pm 1$ không thỏa phương trình đã cho.

Với $-1 < x < 1$, ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\sqrt{2}(2x+1)\sqrt{x+1} + (4-x)\sqrt{2-2x} \leq \sqrt{(2(2x+1)^2 + (4-x)^2)(2x+2+2-2x)} = 6\sqrt{x^2+2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\sqrt{2}(2x+1)}{\sqrt{2x+2}} = \frac{4-x}{\sqrt{2-2x}} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}} = \frac{4-x}{\sqrt{2-2x}}$

$$\Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{2-2x} = (4-x)\sqrt{x+1} \Rightarrow (2x+1)^2(2-2x) = (4-x)^2(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 6x + 14 = 0 \quad (1)$$

Với (1) ta có $x^3 - 3x^2 + 6x + 14 = (x-1)^3 + (3x+15)$.

Mà với. $-1 < x < 1 \Rightarrow -8 < (x-1)^3 < 0$; $12 < 3x+15 < 18 \Rightarrow 4 < (x-1)^3 + 3x+15 < 18$.

Do đó (1) vô nghiệm nên dấu đẳng thức không xảy ra.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 12. Giải phương trình $(x+3)\sqrt{x+1} + x^2 + x + 4 = (2\sqrt{2}+3)(x^2 - x^3 + 2x)$

Giải

Điều kiện $x \geq -1$.

Ở đây do $VT - VP \geq 0$ mà nếu sử dụng Cauchy cho $\sqrt{x+1}$ thì bất đẳng thức bị ngược chiều, để khắc phục ta sẽ tìm nhân tử cho $(x+3)\sqrt{x+1}$, ta được $(x+3)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{2}(x+1)$. Nhân tử này cùng chiều với bài toán nên ta sẽ dùng Cauchy để chứng minh.

$$\text{Ta có } (x+3)\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1})^3 + 2\sqrt{x+1} \stackrel{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{2(\sqrt{x+1})^3 \sqrt{x+1}} = 2\sqrt{2}(x+1)$$

$$\text{Khi đó } VT - VP = (x-1)^2 \left[(2x+2)\sqrt{2} + 3x+4 \right] \geq 0$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } (\sqrt{x+1})^3 = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 13. Giải phương trình $\sqrt[4]{x^4 + x^2 - 1} + \sqrt[4]{x^4 - x^2 + 1} = 2x$

Giải

$$\text{Cách 1. Đặt } \begin{cases} \sqrt[4]{x^4 + x^2 - 1} = a \\ \sqrt[4]{x^4 - x^2 + 1} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2x \\ a^4+b^4=2x^4 \end{cases} \Rightarrow (a+b)^4 = 8(a^4+b^4)$$

$$\text{Ta có } \frac{(a+b)^4}{8} = \frac{(a^2+2ab+b^2)^2}{8} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{(a^2+b^2)^2}{2} = \frac{a^4+b^4+2a^2b^2}{2} \leq a^4+b^4$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } a=b \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4 + x^2 - 1} = \sqrt[4]{x^4 - x^2 + 1} \Leftrightarrow x = 1$$

Cách 2.

Ta có

- $\left(\sqrt[4]{x^4 + x^2 - 1} + \sqrt[4]{x^4 - x^2 + 1} \right)^2 \stackrel{Cauchy-Schwarz}{\leq} 2 \left(\sqrt{x^4 + x^2 - 1} + \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \right)$
- $2 \left(\sqrt{x^4 + x^2 - 1} + \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \right) \stackrel{Cauchy-Schwarz}{\leq} 2\sqrt{2(x^4 + x^2 - 1 + x^4 - x^2 + 1)} = 4x^2$
- Do đó $VT \leq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

Câu 14. Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 3 = \sqrt{2x+2} + \sqrt[4]{2x-1}$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x+1)} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \frac{4+2x+2}{2} = \frac{3+x}{2} \\ \sqrt[4]{2x-1} = 1.1.1.1 \cdot \sqrt[4]{2x-1} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{2x-1+3}{4} = \frac{x+1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } VT - \frac{x+3}{2} - \frac{x+1}{2} = \frac{2(x-1)^4}{2} \geq 0$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = 1$$

Câu 15. Giải phương trình $x + \frac{4}{x} + 3x^2 = 2\sqrt{x^3 - 4} + 4\sqrt{x - 1} + 2\sqrt{x^3 + 4x}$

Giải

Đầu tiên ta sẽ nhân x lên để tiện đánh giá. Khi đó phương trình trở thành.

$$3x^3 + x^2 + 4 = 2x\sqrt{x^3 - 4} + 4x\sqrt{x - 1} + 2x\sqrt{x^3 + 4x}$$

Bây giờ ta cần phải chứng minh $VT - VP \geq 0$. Ta sẽ biến đổi như sau.

$$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 + 4 &= 2x\sqrt{x^3 - 4} + 4x\sqrt{x - 1} + 2x\sqrt{x^3 + 4x} \\ \Leftrightarrow 3x^3 + x^2 + 4 - 2x\sqrt{x^3 - 4} - 4x\sqrt{x - 1} - 2x\sqrt{x^3 + 4x} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{x^3 - 4} + x^3 - 4 + x^2 + 4x\sqrt{x - 1} + 4(x - 1) + 2x^3 - x^2 - 4x + 12 - 2x\sqrt{x^3 + 4x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x^3 - 4}\right)^2 + \left(x - 2\sqrt{x - 1}\right)^2 + 2x^3 - x^2 - 4x + 12 - 2x\sqrt{x^3 + 4x} &= 0 \end{aligned}$$

Ta đi chứng minh $2x^3 - x^2 - 4x + 12 - 2x\sqrt{x^3 + 4x} \geq 0$.

Thật vậy.

$$2x^3 - x^2 - 4x + 12 - 2x\sqrt{x^3 + 4x} \stackrel{AM-GM}{\geq} 2x^3 - x^2 - 4x + 12 - \frac{4x^2 + x^3 + 4x}{2} = \frac{(x - 2)^2(3x + 6)}{2} \geq 0$$

Khi đó $VT \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi
$$\begin{cases} x - \sqrt{x^3 - 4} = 0 \\ x - 2\sqrt{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ 2x = \sqrt{x^3 + 4x} \end{cases}$$

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Bài toán đã được giải quyết!

Câu 16. Giải phương trình $6\sqrt[3]{x - 1} + 6\sqrt[4]{2x - 3} + 5\sqrt[5]{(x - 1)(2x - 3)} = 8x + 1$

Giải

Ta sẽ đi chứng minh
$$\begin{cases} 6\sqrt[3]{x - 1} \leq 2x + 2 \\ 6\sqrt[4]{2x - 3} \leq 3x \\ 5\sqrt[5]{(x - 1)(2x - 3)} \leq 3x - 1 \end{cases}$$

Thật vậy, ta có
$$\begin{cases} 6\sqrt[3]{x - 1} \stackrel{AM-GM}{\leq} 6 \cdot \frac{x - 1 + 1 + 1}{3} = 2x + 2 \\ 6\sqrt[4]{2x - 3} \stackrel{AM-GM}{\leq} 6 \cdot \frac{2x - 3 + 3}{4} \\ 5\sqrt[5]{(x - 1)(2x - 3)} \stackrel{AM-GM}{\leq} 5 \cdot \frac{x - 1 + 2x - 3 + 3}{5} = 3x - 1 \end{cases}.$$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên ta sẽ được $VT \leq VP$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2$.

Câu 17. Giải phương trình $2(x + 5)\sqrt{1 - 3x} + 3x - 10 = \frac{5(x^2 + 4x + 9)}{2\sqrt{10 - 6x} + \sqrt{4 + 3x} + 1}$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned} 1. \quad 2\sqrt{10 - 6x} + \sqrt{4 + 3x} &= 2\sqrt{10 - 6x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6x + 8} \stackrel{Bunhiacopzki}{\leq} \sqrt{18} \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = 9 \\ 2. \quad \text{Do đó } \frac{1}{2\sqrt{10 - 6x} + \sqrt{4 + 3x} + 1} &\geq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{5(x^2 + 4x + 9)}{2\sqrt{10 - 6x} + \sqrt{4 + 3x} + 1} \geq \frac{x^2 + 4x + 9}{2} \end{aligned}$$

Lại có $\frac{x^2+4x+9}{2}-2(x+5)\sqrt{1-3x}+3x-10=\frac{(x+5-2\sqrt{1-3x})^2}{2}\geq 0$

Nên $VT \leq VP$

Dấu “=” xảy ra khi $x = -1$

Câu 18. Giải phương trình.

$$(x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+(1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}+(2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}=3$$

Giải

Cách 1.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+1} \\ b = \sqrt{2x+1} \\ c = \sqrt{1-3x} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 3.$

Phương trình trở thành. $a^3b + ac^3 + cb^3 = 3 \Leftrightarrow 3(a^3b + ac^3 + cb^3) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$

Đặt $\begin{cases} b = x + a \\ c = y + a \end{cases}$ để đưa về phương trình bậc 2 ẩn a, phương trình trở thành .

$$(x^2 - xy + y^2)a^2 - (x^3 - 5x^2y + 4xy^2 + y^3)a + x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 + y^4 = 0$$

Có $\Delta = (x^3 - 5x^2y + 4xy^2 + y^3)^2 - 4(x^2 - xy + y^2)(x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 + y^4)$. Do đang ở dạng đẳng cấp nên

ta có thể đặt $t = \frac{x}{y}$. Quy về giải phương trình.

$$-3t^6 + 6t^5 + 9t^4 - 18t^3 - 6t^2 + 12t - 3 = 0$$

Nhưng tuy nhiên phương trình này có nghiệm thuộc phương trình bậc 3 nên có thể giả sử

$$-3t^6 + 6t^5 + 9t^4 - 18t^3 - 6t^2 + 12t - 3 = -3(t^3 + at^2 + bt + c)^2$$

Đồng nhất hệ số ta sẽ có $\Delta = -3(x^3 - x^2y - 2xy + y^3)^2 \leq 0$. Do đó $VT \leq VP$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$

Ngoài cách đồng nhất hệ số ta có thể tìm đủ 3 nghiệm của phương trình rồi dùng viet cho phương trình bậc 3

Cách 2.

Bài toán xuất phát từ đẳng thức sau.

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) = \sum_{cyc} \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + bc + ca - c^2)^2 \geq 0$$

Chứng minh.

Đặt $\begin{cases} x = a^2 - ab + bc \\ y = b^2 - cb + ca \\ z = c^2 - ca + ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + yz + xz = a^3b + b^3c + c^3a \\ x + y + z = a^2 + b^2 + c^2 \end{cases}$

Khi đó có

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) &= (x + y + z)^2 - 3(xy + yz + xz) \\ &= \frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2 + \frac{1}{2}(x - z)^2 \\ &= \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + bc + ca - c^2)^2 + \frac{1}{2}(b^2 - 2bc + ca + ab - a^2)^2 + \frac{1}{2}(c^2 - 2ca + ab + bc - b^2)^2 \end{aligned}$$

Bây giờ ta áp dụng. Đặt $a = \sqrt{x+1}; b = \sqrt{2x+1}; c = \sqrt{1-3x}$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
 & (x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + (1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + (2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x} = 3 \\
 & \Leftrightarrow 6(x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + 6(1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + 6(2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x} - 18 = 0 \\
 & \Leftrightarrow -\left(4x - 2\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}\sqrt{1-3x} + \sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}\right)^2 \\
 & \quad - \left(x + \sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}\sqrt{1-3x} - 2\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}\right)^2 \\
 & \quad - \left(5x - \sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x+1}\sqrt{1-3x} - \sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}\right)^2 = 0 \\
 & \Leftrightarrow x = 0
 \end{aligned}$$

Cách 3.

Ta có

$$\begin{aligned}
 & (x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + (1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + (2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x} \\
 & \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{\left[(x+1)^2 + (2x+1)^2 + (1-3x)^2\right] \left[(x+1)(2x+1) + (2x+1)(1-3x) + (1-3x)(x+1)\right]} \\
 & = \sqrt{9-7x^2(14x^2-3)}
 \end{aligned}$$

Nếu $14x^2 - 3 \geq 0$ thì bài toán coi như được giải quyết!

$$\text{Nếu } 14x^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; -\sqrt{\frac{3}{14}}\right].$$

1. Khi đó áp dụng AM – GM ta có

$$\begin{aligned}
 & (x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + (1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + (2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x} \\
 & \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{(x+1)(3x+2)}{2} + \frac{(2x+1)(2-x)}{2} + (1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} \\
 & = (1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 = 3 - \frac{1}{8}(7\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + 17x - 1)(\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + x - 1)
 \end{aligned}$$

$$2. \quad \text{Lại có} \cdot \begin{cases} \sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + x - 1 \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{2-2x}{2} + x - 1 = 0 \\ 7\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + 17x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1; \frac{-8-14\sqrt{7}}{109}\right) \end{cases}$$

3. Nên $VT \leq 3 \Rightarrow$ đpcm

Cách 4.

Ta có

$$\begin{aligned}
 & (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) = \left[\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2\right] + 3\left[\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc\right] - 3\left[\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc\right] \\
 & \bullet 3\left[\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc\right] = 3\left[\sum_{cyc} b^3c - \sum_{cyc} a^2bc\right] = -3\sum_{cyc} bc(a^2 - b^2) \\
 & \quad = -3\sum_{cyc} bc(a^2 - b^2) + \sum_{cyc} (ab + bc + ca)(a^2 - b^2) \\
 & \quad = \sum_{cyc} (a^2 - b^2)(ab + ca - 2bc) \\
 & \bullet 3\left[\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc\right] = \frac{1}{2}\sum_{cyc} (ab + ac - 2bc)^2 \\
 & \bullet \sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2 = \frac{1}{2}\sum_{cyc} (a^2 - b^2)^2
 \end{aligned}$$

Vậy ta thu được đẳng thức.

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a^2 - b^2)^2 + \frac{1}{2} \sum_{cyc} (ab + ac - 2bc)^2 - \sum_{cyc} (a^2 - b^2)(ab + ac - 2bc) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a^2 - b^2 - ab - ac + 2bc)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 19. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+3x} + \sqrt[4]{1-3x} = \sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1-2x} + \sqrt[4]{1+4x} + \sqrt[4]{1-4x}$$

Giải

Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

Thật ra, nét tinh ý của bài toán chính là hai nhận xét.

- $\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} \geq \sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1-2x}$ với mọi $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.
- $\sqrt[4]{1+3x} + \sqrt[4]{1-3x} \geq \sqrt[4]{1+4x} + \sqrt[4]{1-4x}$ với mọi $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Ta chứng minh $\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} \geq \sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1-2x}$ (1) với mọi $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Thật vậy, bình phương hai vế của (1) ta được

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2\sqrt[4]{1-x^2} \geq \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} + 2\sqrt[4]{1-4x^2}$$

Mặt khác, dễ thấy rằng $1-x^2 \geq 1-4x^2$ cho nên ta cần chứng minh

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \geq \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 1-4x^2.$$

Điều này luôn đúng, suy ra ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét thứ (2) ta chứng minh hoàn toàn tương tự. Từ đó suy ra $VT \geq VP$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy $x = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Nhận xét. Có thể thấy bài toán xuất phát từ ý tưởng của những đánh giá dạng $x^2 \geq 0, \forall x \in D$.

Những lớp bài như thế không nhiều nhưng lời giải đẹp và tự nhiên. Từ lời giải trên, ta rút ra được bất đẳng thức khá thú vị. $\sqrt[4]{1+nx} + \sqrt[4]{1-nx} \geq \sqrt[4]{1+2nx} + \sqrt[4]{1-2nx}, n \in \mathbb{N}$. Ngoài ra, lớp căn thức của đề bài cho ta nhớ đến một bộ đề bất đẳng thức nhỏ, có nhiều ứng dụng “Cho $a, b \geq 0$ ta có $\sqrt{a+4} + \sqrt{b+4} \geq 2 + \sqrt{a+b+4}$ ” từ đây, ta liên hệ đến sự thay đổi căn thức, có thể cho những bài toán khá đẹp.

Câu 20. Giải phương trình $\frac{\sqrt{2x+1}}{x+2} + \frac{49\sqrt{x-3}}{2x+6} = \frac{11x-8}{9}$

Giải

Do bài toán có nghiệm $x = 4$ nên ta sẽ dùng bất đẳng thức Cauchy như sau.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{2x+1} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{x+5}{3} \\ 49\sqrt{x-3} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{49(x-2)}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } VT - VP \leq \frac{x+5}{x+2} + \frac{49(x-2)}{2x+6} - \frac{11x-8}{9} = -\frac{(x-4)^2(44x+87)}{18(x+2)(2x+6)} \leq 0.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 4$.

$$\text{Câu 21. Giải phương trình } \sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}(7x^2-x+4)$$

Giải

Ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho toàn bộ vế trái của phương trình

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} &\stackrel{\text{Bunhiacopski}}{\leq} \sqrt{(1^2+1^2+x^2)(3x^2-1+x^2-x+x^2+1)} \\ &\Rightarrow \sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)} \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(5x^2-x) \cdot 2(x^2+2)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7x^2-x+4}{2} = VP$$

Nên dấu “=” chỉ xảy ra khi $x = -1$

$$\text{Câu 22. Giải phương trình } \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}}{x+5 + \sqrt{2(x^2+1)}} = \sqrt{(1-x)^3} + \frac{3-2\sqrt{x}}{2}$$

Giải

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt{(1-x)^3} + \frac{3-2\sqrt{x}}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3x^2+6x-3}{2\sqrt{(1-x)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0.$$

$$\text{Nên } f(x) \text{ nghịch biến trên } [0;1] \Rightarrow f(x) \geq f(1) = \frac{1}{2}.$$

Theo bất đẳng thức AM – GM và Cauchy – Schwarz ta có

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} 2\sqrt{2(x+1)} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} x+3 = \frac{x+5+x+1}{2} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \frac{x+5+\sqrt{2(x^2+1)}}{2}$$

$$\text{Khi đó } VT \leq \frac{1}{2} \leq VP.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$

$$\text{Câu 23. Giải phương trình } \frac{576x}{(x+\sqrt{x^2+8})^3} = 3x - \frac{26}{x} + 8\sqrt{x+\frac{15}{x^2}}$$

Giải

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{x}{(x+\sqrt{x^2+8})^3} \text{ với } x > 0.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+8})^3 - 3(x+\sqrt{x^2+8})^2 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\right)x}{(x+\sqrt{x^2+8})^6} = \frac{1 - \frac{3x}{\sqrt{x^2+8}}}{(x+\sqrt{x^2+8})^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+8} = 3x \Leftrightarrow x^2+8 = 9x^2 \Leftrightarrow x = 1 \quad (x > 0)$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta thấy } \max f(x) = f(1) = \frac{1}{64}, \quad \forall x > 0$$

Suy ra $f(x) \leq \frac{1}{64} \Leftrightarrow 576f(x) \leq 9, \forall x > 0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Mặt khác theo bất đẳng thức B.C.S ta có

$$\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}}{x}\right)^2 \leq (1+15) \left[(\sqrt{x})^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{x}\right)^2 \right] = 16 \left(x + \frac{15}{x^2}\right)$$

Từ đó ta có $x = \frac{15}{x^2} \geq \frac{1}{16} \left(\sqrt{x} + \frac{15}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{15}{x^2}} \geq \frac{1}{4} \left(\sqrt{x} + \frac{15}{x}\right)$

Vậy $3x - \frac{26}{x} + 8\sqrt{x + \frac{15}{x^2}} \geq 3x - \frac{26}{x} + 2 \left(\sqrt{x} + \frac{15}{x}\right) = 3x + 2\sqrt{x} + \frac{4}{x}$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta lại có $3x + 2\sqrt{x} + \frac{4}{x} = 3 \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) \geq 6 + 3 = 9$.

Do đó $3x - \frac{26}{x} + 8\sqrt{x + \frac{15}{x^2}} \geq 9$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{15}}{\frac{\sqrt{15}}{x}} \\ x = \frac{1}{x} \\ \sqrt{x} = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $\frac{576x}{\left(x + \sqrt{x^2 + 8}\right)^3} \leq 9 \leq 3x - \frac{26}{x} + 8\sqrt{x + \frac{15}{x^2}}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Câu 24. Giải phương trình $3x^3 + x^2 - 2x + 4 = 2\sqrt{3(x^5 + x^4 + 1)}$

Giải

Để thấy nếu áp dụng bất đẳng thức AM – GM luôn thì ta được.

$$2\sqrt{3(x^5 + x^4 + 1)} \stackrel{AM-GM}{\leq} x^5 + x^2 + 4.$$

Khi đó $VT - VP \geq 3x^3 + x^2 - 2x + 4 - x^5 - x^2 - 4 = (x-1)^2(-x^3 - 3x^2 - 2x)$, ta chưa thể xác định được dấu của bất đẳng thức. Do đó nảy ra ý tưởng phân tích đa thức trong căn thành nhân tử thì khi đó sẽ dễ dàng dùng bất đẳng thức đánh giá được. Để phân tích được ta sẽ làm như sau.

Do $f(x) = x^5 + x^4 + 1 = 0$ không có nghiệm hữu tỷ tức là không phân tích được dưới dạng $(ax+b).f(x)$ nên ta sẽ giả sử $f(x) = (x^2 + ax + 1)(x^3 + bx + c + 1)$. Có thể giả sử như vậy do.

1. Phương trình chỉ có 1 nghiệm lẻ duy nhất mà nghiệm này không cùng thuộc 1 phương trình bậc 2 nào nên nếu phân tích được dưới dạng một đa thức bậc 2 nhân với một đa thức bậc 3 thì đa thức bậc 2 phải vô nghiệm.
2. Do hệ số tự do bằng 1 và kết hợp với lí do trên ta sẽ viết được phương trình dưới dạng trên.

Khi đó có

$$(x^2 + ax + 1)(x^3 + bx + c + 1) = x^5 + x^4 + (a+b)x^3 + (ab+c+1)x^2 + x(a+c) + 1$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta được. } \begin{cases} a+b=1 \\ ab+c+1=0 \\ ac+b+1=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c+b-bc+c=0 \\ 2b-c^2-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(1-c)=0 \\ 2b-c^2-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$$

| Các bài toán chứa tham số

Vậy $x^5 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được.

$$2\sqrt{3(x^5 + x^4 + 1)} = 2\sqrt{3(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)} \stackrel{AM-GM}{\leq} 2 \cdot \frac{x^2 + x + 1 + 3(x^3 - x + 1)}{2} = VT$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } x^2 + x + 1 = 3(x^3 - x + 1) \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \\ x = -\frac{1 + \sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy bài toán đã được giải quyết!

Nhận xét

Ngoài cách đồng nhất hệ số như trên ta có thể dùng Casio phân tích nhân tử.

Chuyển máy sang môi trường số phức $\boxed{MODE}\boxed{2}$. Khi đó dùng thuật toán lặp Newton – Rapshon ta sẽ phân tích phương trình này. Trước hết ta cần biết.

1. Xét dãy $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ và một hằng số x_0 cho trước.
2. Khi đó nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} k = k$ thì k là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Do đó để phân tích phương trình này ta cần tính $f'(x) = 5x^4 + 4x^3$ của hàm $f(x) = x^5 + x^4 + 1$.

Tiếp theo nhập vào máy biểu thức. $X = X - \frac{X^5 + X^4 + 1}{5X^4 + 4X^3}$. Do phương trình có nghiệm phức nên ta sẽ

$\boxed{CALC}$ $X = i$. Bấm khoảng hơn 20 lần ta thấy nó về $-\frac{1}{2} - 0,8660254038i \rightarrow A$.

Sau đó dùng Viet để tìm ra phương trình bậc 2. Ấn $\boxed{SHIFT}\boxed{2}\boxed{2}$ máy hiển thị chữ *Conjg*(. Cái này nghĩa là tính năng chỉ ra số phức liên hợp. Do phương trình bậc 2 thì sẽ có 2 nghiệm liên hợp nên ta

sẽ tính $\begin{cases} A \text{ Conjg}(A=1 \\ A + \text{Conjg}(A=-1 \end{cases} \Rightarrow$ Nhân tử bậc 2 cần tìm là $x^2 + x + 1$. Đến đây chia đa thức là xong!

Chú ý.

1. Những bạn có VINACAL thì phải nhớ khi nhập thì phải nhập là $X = X - \frac{X^3 X^2 + X^3 X + 1}{5X^3 X + 4X^3}$ bởi vì dòng máy này ko tính được giá trị $(i)^4$ trở lên. Nên ta sẽ đưa về dạng $(i)^3$.
2. Đây là trường hợp may mắn khi ta tìm được nghiệm phức của phương trình bậc 2. Giả sử nếu là nghiệm phức của phương trình bậc 3 thì sao? Ta vẫn làm tương tự. Dùng Viet cho phương

trình bậc 3 ta sẽ có
$$\begin{cases} x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$
 Khi đó chỉ cần tìm được 1 nghiệm phức và một

nghiệm thực ta sẽ suy ra phương trình bậc 3 cần tìm. Nhớ là tìm nghiệm thực trước. Ta cũng có thể bình phương tung tóe bài này lên, ta được.

$$3x^3 + x^2 - 2x + 4 = 2\sqrt{3(x^5 + x^4 + 1)} \Rightarrow (3x^3 + x^2 - 2x + 4)^2 = 12(x^5 + x^4 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(3x^2+2x-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (t/m)} \\ x=\frac{-1+\sqrt{7}}{3} \text{ (t/m)} \\ x=-\frac{1+\sqrt{7}}{3} \text{ (t/m)} \end{cases}$$

Câu 25. Giải phương trình $\sqrt[6]{x^6+x^3-2x-1} + \sqrt[6]{x^6-x^3+2x+1} = 2x$

Giải

Đặt
$$\begin{cases} \sqrt[6]{x^6+x^3-2x-1} = a \text{ (} a > 0 \text{)} \\ \sqrt[6]{x^6-x^3+2x+1} = b \text{ (} b > 0 \text{)} \end{cases} \Rightarrow (a+b)^6 = 32(a^6+b^6)$$

Dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức sau.

$$\frac{(a+b)^6}{32} \leq a^6+b^6 \Leftrightarrow 32\left[(a^2)^3+(b^2)^3\right] \geq (a+b)^6$$

Sử dụng bất đẳng thức $4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3 \Leftrightarrow 3(a-b)^2(a+b) \geq 0$ ta cần chứng minh được.

$$8(a^2+b^2)^3 \geq (a^2+b^2+2ab)^3.$$

Theo AM – GM có $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Từ đó suy ra được dấu “=” xảy ra khi $\sqrt[6]{x^6+x^3-2x-1} = \sqrt[6]{x^6-x^3+2x+1} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Câu 26. Giải phương trình $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

MO Yugoslavia

Giải

Ta có
$$\begin{cases} \sqrt{x - \frac{1}{x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{1+x - \frac{1}{x}}{2} \\ \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}(x-1)} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{\frac{1}{x} + x - 1}{2} \end{cases}$$

Khi đó $VP \leq x$. Dấu “=” xảy ra khi
$$\begin{cases} 1 = x - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Câu 27. Giải phương trình $\sqrt[4]{3(x+5)} - \sqrt[4]{11-x} = \sqrt[4]{13+x} - \sqrt[4]{3(3-x)}$.

Giải

Phương trình đã cho ta sẽ biến đổi phương trình về phương trình.

$$\sqrt[4]{3(x+5)} + \sqrt[4]{3(3-x)} = \sqrt[4]{13+x} + \sqrt[4]{11-x} \quad (1)$$

Đặt. $a = \sqrt[4]{3(x+5)}$; $b = \sqrt[4]{3(3-x)}$; $c = \sqrt[4]{13+x}$; $d = \sqrt[4]{11-x}$, ($a, b, c, d \geq 0$)

Khi đó (1) trở thành.
$$\begin{cases} a+b=c+d \\ a^4+b^4=c^4+d^4 \end{cases} \quad (*)$$

Sử dụng hằng đẳng thức. $(m+n)^4 = m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4$.

Ta có $a^4 + b^4 = c^4 + d^4 \Leftrightarrow (a+b)^4 - 2ab(2a^2 + 3ab + 2b^2) = (c+d)^4 - 2cd(2c^2 + 3cd + 2d^2)$

$$\Rightarrow ab[2(a+b)^2 - ab] = cd[2(c+d)^2 - cd]$$

$$\Rightarrow (ab - cd)[(a+b)^2 - ab + (c+d)^2 - cd] = 0 \quad (2)$$

Có được tất cả các phép biến đổi đó là nhờ sử dụng $a+b=c+d$.

Tới đây ta chú ý rằng. $(a+b)^2 \geq 4ab \geq ab$; $(c+d)^2 \geq 4cd \geq cd$.

Do đó ta có (2) tương đương với
$$\begin{cases} ab = cd \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow ab = cd \text{ vì } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Ta có $ab = cd \Leftrightarrow \sqrt[4]{9(x+5)(3-x)} = \sqrt[4]{(13+x)(11-x)}$

$$\Leftrightarrow -9x^2 - 18x + 135 = -x^2 + 2x + 143 \Leftrightarrow x = -1.$$

Cách 2. Đặt.
$$\begin{cases} a = \sqrt[4]{15+3x} \\ b = \sqrt[4]{9-3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 = 15+3x \\ b^4 = 9-3x \end{cases} \Rightarrow a^4 + b^4 = 24, (a, b \geq 0).$$

Ta có $x+13 = \frac{1}{3}[2(15+3x)+9-3x] = \frac{2a^4+b^4}{3}$, $11-x = \frac{1}{3}[15+3x+2(9-3x)] = \frac{a^4+2b^4}{3}$

Kết hợp từ điều kiện và phương trình đã cho ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} a^4 + b^4 = 24 \\ a+b = \sqrt[4]{\frac{2a^4+b^4}{3}} + \sqrt[4]{\frac{a^4+2b^4}{3}} \end{cases}$$

Ta có với mọi số thực m, n, p ta luôn có $m^2 + n^2 + p^2 \geq \frac{1}{3}(m+n+p)^2$

Thật vậy ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức.

$$3(m^2 + n^2 + p^2) \geq (m+n+p)^2 \Leftrightarrow 2(m^2 + n^2 + p^2) - 2(mn + np + mp) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-n)^2 + (n-p)^2 + (p-m)^2 \geq 0$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi. $m = n = p$

Áp dụng bất đẳng thức này ta có

$$\frac{2a^4+b^4}{3} = \frac{a^4+a^4+b^4}{3} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}(a^2+a^2+b^2)^2 \geq \frac{1}{9} \left[\frac{1}{3}(a+a+b)^2 \right]^2 = \frac{1}{81}(2a+b)^4$$

Hay ta có $\sqrt[4]{\frac{2a^4+b^4}{3}} \geq \frac{1}{3}(2a+b)$.

Thiết lập tương tự ta có $\sqrt[4]{\frac{a^4+2b^4}{3}} \geq \frac{1}{3}(a+2b)$

Từ đó ta có $\sqrt[4]{\frac{2a^4+b^4}{3}} + \sqrt[4]{\frac{a^4+2b^4}{3}} \geq a+b$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi. $a=b$.

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^4+b^4=24 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=2\sqrt{3} \\ b^2=2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{15+3x}=2\sqrt{3} \\ \sqrt{9-3x}=2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x=-1$.

Cách 3. Điều kiện. $-5 \leq x \leq 3$.

Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình sau.

$$\sqrt[4]{15+3x} + \sqrt[4]{9-3x} = \sqrt[4]{15+(x-2)} + \sqrt[4]{9-(x-2)} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[4]{15+t} + \sqrt[4]{9-t}$, $\forall t \in [-15;9]$

Ta có $f'(t) = \frac{1}{(\sqrt[4]{15+t})^3} - \frac{1}{(\sqrt[4]{9-t})^3}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt[4]{15+t})^3} = \frac{1}{(\sqrt[4]{9-t})^3} \Leftrightarrow t = -3$.

Khi đó ta có $f'(t) \leq 0$, $\forall t \in [-15;-3]$, $f'(t) \geq 0$, $\forall t \in [-3;9]$

Mặt khác $3x$, $x-2 \in [-15;-3]$ khi $x \in [-5;-1]$, $3x$, $x-2 \in [-3;9]$ khi $x \in [-1;3]$

Từ đó từ (3) ta có $f(3x) = f(x-2) \Leftrightarrow 3x = x-2 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Câu 28. Giải phương trình $x^4 + x^2 + 1 = \sqrt{3(x^7 + x^3 + x^2)}$

Giải

Bài này tương tự như bài 14. Ta sẽ phân tích $x^7 + x^3 + x^2 = x^2(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= \sqrt{3(x^7 + x^3 + x^2)} \\ \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) &= \sqrt{3x^2(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)} \\ \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} &= \sqrt{3x^2(x^3 - x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned} 1. \quad \sqrt{3x^2(x^3 - x^2 + 1)} &\stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{\sqrt{3}(x^3 + 1)}{2} = \frac{\sqrt{3}(x+1)(x^2 - x + 1)}{2} \\ 2. \quad \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{\sqrt{3}(x+1)}{2} &= \frac{\frac{1}{4}(x-1)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{\sqrt{3}(x+1)}{2}} \geq 0 \\ 3. \quad (x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} &= \sqrt{3x^2(x^3 - x^2 + 1)} \leq \frac{\sqrt{3}(x+1)(x^2 - x + 1)}{2} \end{aligned}$$

Nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ngoài ra nếu để ý ta thấy bài này có thể đưa về bài toán giống bài 19 bằng cách đặt $a = x^2; b = x; c = 1$.

Khi đó phương trình trở thành. $a^2 + b^2 + c^2 = \sqrt{3(a^3b + b^3c + c^3a)}$

Ta biết rằng. $(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) = \sum_{cyc} \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + bc + ca - c^2)^2 \geq 0$

| Các bài toán chứa tham số

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 29. Giải phương trình $4x + \sqrt{x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 1} + \sqrt{x^2 + (1 - \sqrt{2})x + 1} = 2\sqrt{5x + 1}$

Giải

Ta có $4x - 2\sqrt{5x + 1} \stackrel{AM-GM}{\geq} -x - 2$

Khi đó ta có

$$\sqrt{x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 1} + \sqrt{x^2 + (1 - \sqrt{2})x + 1} \geq x + 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1} \geq -x^2 + 2x + 2$$

Nếu $x \in \left[1 - \sqrt{3}; -\frac{1}{5}\right] \cup [1 + \sqrt{3}; +\infty)$ thì bài toán đã được giải quyết

Nếu $x \in \left[-\frac{1}{5}; 1 + \sqrt{3}\right]$ ta có

$$2\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1} \geq -x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow x^2(3x^2 + 12x + 4) \geq 0 \forall x \in \left[-\frac{1}{5}; 1 + \sqrt{3}\right]$$

Từ đó suy ra $VT \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$

Bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!

Câu 30. Giải phương trình $(x-1)^2(x-2)^2 + \sqrt[4]{x^2 - 3x + 3} + \frac{x-5}{4} = 0$

Giải

Xét $x \leq -5$ ta có

$$(x-1)^2(x-2)^2 + \frac{x-5}{4} = \frac{4(x+5)^4 - 103(x+5)^3 + 1001(x+5)^2 - 4337(x+5) + 7046}{4} > 0$$

$\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm trên $(-\infty; -5]$

Xét $x \geq -5$, ta đi chứng minh $\sqrt[4]{x^2 - 3x + 3} \geq \frac{5-x}{4}$

- Nếu $x \geq 5$ thì bài toán đã được chứng minh.
- Nếu $x \in [-5; 5]$ ta có

$$\sqrt[4]{x^2 - 3x + 3} \geq \frac{5-x}{4} \Leftrightarrow -x^4 + 20x^3 + 106x^2 - 268x + 143 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(-x^2 + 18x + 143) \geq 0$$

Không khó để nhận ra bất đẳng thức cuối luôn đúng với $x \in [-5; 5]$.

Vậy $VT \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$.

Câu 31. Giải phương trình $\frac{1 + 2\sqrt{x} - x\sqrt{x}}{3 - x - \sqrt{2-x}} = 2\left(\frac{1 + x\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

Giải

Cách 1.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{2-x} \end{cases}; a, b \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2$.

Phương trình đã cho biến đổi thành $\frac{1 + 2a - a^3}{3 - a - b} = 2\frac{a^3 + 1}{a^2 + 1}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+1)(a^2 - a - 1)}{a^2 + b - 3} = 1 + \frac{(a-1)^2}{a^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a^2 + 1} = \frac{a+b-2}{b^2 - b + 1} (*)$$

Từ giả thiết $a^2 + b^2 = 2 \Rightarrow a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} = 2$.

Do đó vế trái $(*) \geq$ vế phải $(*)$.

Nên phương trình đã cho có nghiệm tương đương $\begin{cases} a=1 \\ a=b \end{cases} \Rightarrow x=1$.

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Cách 2.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x} \\ b=\sqrt{2-x} \end{cases}; a, b \geq 0$

Từ phép đặt trên cho ta $a^2 + b^2 = 2$

Ta viết lại phương trình đã cho thành $\frac{1+2a-a(2-b^2)}{3-(2-b^2)-b} = 2 \frac{1+a^3}{1+a^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1+ab^2}{b^2-b+1} = 2 \frac{1+a^3}{1+a^2} \Leftrightarrow 1+ab^2+a^2+a^3b^2=2b^2-2b+2+2a^3b^2-2a^3b+2a^3$$

$$\Leftrightarrow a^3(b^2-2b+1)+b^2-2b+1+b^2-ab^2+a^3-a^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a^3+1)(b-1)^2+(a-1)(a^2-b^2)=0 \Leftrightarrow (a^3+1)(b-1)^2+2(a-1)(a^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (a^3+1)(b-1)^2+2(a-1)^2(a+1)=0$$

Mà từ điều kiện $a, b \geq 0$ nên ta có $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Câu 32. Giải phương trình $x^2 + 4x + 5 - \frac{3x}{x^2 + x + 1} = (x-1) \left(1 - \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \right)$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – Chuyên Quốc học Huế

Giải

Phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 5 - \frac{3x}{x^2 + x + 1} &= (x-1) \left(1 - \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + x + 1) - 3x}{x^2 + x + 1} &= \frac{(x-1)(\sqrt{x^2 + x + 1} - 2\sqrt{1-x})}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \\ \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 5)(x^2 + x + 1) - 3x &= (x-1)(x^2 + x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x + 1}\sqrt{1-x}) \\ \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 6x + 6 + 2(x-1)\sqrt{x^2 + x + 1}\sqrt{1-x} &= 0 \end{aligned}$$

Để ý thấy $2(x-1)\sqrt{x^2 + x + 1}\sqrt{1-x} \geq 2 \cdot (x-1) \cdot \frac{x^2 + 2}{2}$.

Nên $VT \geq (x+1)^2(x^2 + x + 1) \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = -2$

Câu 33. Giải phương trình $\frac{2}{(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{1}{x+\sqrt{2x-1}} = \frac{2}{1+\sqrt{x(2x-1)}}$.

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – Lần 1 – THPT Minh Châu – Hưng Yên

Giải

| Các bài toán chứa tham số

Bài này đã cố tình che giấu đi mẫu của phân thức thứ 2 để làm đánh lạc hướng người làm do đó ta cần có 1 bước biến đổi $x + \sqrt{2x-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{2x-1} + 1)^2$.

Khi đó phương trình tương đương $\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2x-1}+1)^2} = \frac{1}{1+\sqrt{x(2x-1)}}$.

Nhìn thế này ta sẽ nghĩ ngay tới bất đẳng thức AM – GM dạng cộng mẫu số, ta có

$$\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2x-1}+1)^2} \geq \frac{4}{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{2x-1}+1)^2}$$

Bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được

$$\begin{aligned} & \frac{4}{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{2x-1}+1)^2} \geq \frac{1}{1+\sqrt{x(2x-1)}} \\ \Leftrightarrow & \frac{3-3x+4\sqrt{x(2x-1)}-2(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}{(1+\sqrt{x(2x-1)})[(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{2x-1}+1)^2]} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}-1)(2\sqrt{x}+5\sqrt{2x-1}-1)}{2(1+\sqrt{x(2x-1)})[(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{2x-1}+1)^2]} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2(\sqrt{x}-1)^2 \left[\frac{4x-1}{2\sqrt{x}+1} + 5\sqrt{2x-1} \right]}{2 \left[\frac{4x-1}{2\sqrt{x}+1} + \sqrt{2x-1} \right] 2(1+\sqrt{x(2x-1)})[(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{2x-1}+1)^2]} \geq 0 \end{aligned}$$

Dễ thấy bất đẳng thức cuối đúng với $x \geq \frac{1}{2}$ nên $VT \geq VP$, dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Ngoài ra nếu ta đặt $\begin{cases} \sqrt{x}=a \\ \sqrt{2x-1}=b \end{cases}$ thì khi đó ta cần chứng minh $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$.

Ta có đẳng thức sau đây $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} - \frac{1}{1+ab} = \frac{ab(a-b)^2 + (1-ab)^2}{(a+1)^2(b+1)^2(1+ab)} \geq 0$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Ta cũng có thể dùng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz chứng minh được. Ta có

$$\begin{cases} (ab+1)\left(\frac{a}{b}+1\right) \geq (a+1)^2 \\ (ab+1)\left(\frac{b}{a}+1\right) \geq (b+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(a+1)^2} \geq \frac{b}{(a+b)(ab+1)} \\ \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{a}{(a+b)(ab+1)} \end{cases}$$

Cộng lại có điều cần chứng minh!

Nếu áp dụng luôn thì phương trình ban đầu trở thành.

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{2x-1}(\sqrt{x}-\sqrt{2x-1})^2 + (1-\sqrt{x(2x-1)})^2}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{2x-1}+1)^2(1+\sqrt{x(2x-1)})} = 0$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{2x-1}=0 \\ 1-\sqrt{x(2x-1)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Câu 34. Giải phương trình $\frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{2-x}+x-3} = \frac{2x-2\sqrt{x}+2}{x+1}$

Giải

Điều kiện $0 \leq x \leq 2$.

Phương trình đã cho được biến đổi tương đương thành phương trình.

$$\begin{aligned} \frac{x\sqrt{x}+x-x-\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{2-x}+x-3} &= \frac{2(1+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)}{1+x} \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}-1)}{\sqrt{2-x}+x-3} &= \frac{2(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{1+x} \\ \Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{2-x}+x-3} &= \frac{2x-2\sqrt{x}+2}{1+x} \quad (1). \end{aligned}$$

Để ý rằng $\sqrt{2-x}+x-3 < 0, \forall x \in [0;2]$. $x-\sqrt{x}-1 \geq \sqrt{2-x}+x-3$

Mặt khác, ta có $\frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{2-x}+x-3} \leq 1, \forall x \in [0;2]$ (2).

Thật vậy, ta có (2) tương đương với $\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{x} \leq 2$ (3)

Dễ thấy rằng (3) luôn đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\sqrt{2-x}+\sqrt{x} \leq \sqrt{(1^2+1^2)(2-x+x)} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi. $\sqrt{2-x}=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=1$. Lại có $\frac{2x-2\sqrt{x}+2}{1+x} \geq 1, \forall x \in [0;2]$ (4)

Thật vậy, (4) tương đương với $2x-2\sqrt{x}+2 \geq 1+x \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$.

Dấu đẳng thức ở (4) xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

$$\text{Vậy ta có } \begin{cases} \frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{2-x}+x-3} \leq 1 \\ \frac{2x-2\sqrt{x}+2}{x+1} \geq 1 \end{cases}; \forall x \in [0;2] \text{ nên (1) xảy ra khi và chỉ khi } x=1.$$

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 35. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{3x+1}+1} = 1$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM dạng cộng mẫu ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{3x+1}+1} \geq \frac{4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}+2} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1} \leq 2\sqrt{2x+1}$.

$$\text{Khi đó } VT \geq \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1} = \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}+1}.$$

Bây giờ nhiệm vụ của chúng ta là phải chứng minh được.

$$\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}+1} \geq 1 \Leftrightarrow x+2 \geq \sqrt{2x+1}+1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{2x+1}-1)^2 \geq 0$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Dấu “=” xảy ra khi $x=0$.

Câu 36. Giải phương trình $\frac{x^2+x+1}{(x^2+\sqrt{x+1})^2} + \frac{x^2+x+2}{(x^2+\sqrt{x+2})^2} + \frac{x^2+x+3}{(x^2+\sqrt{x+3})^2} = 3.$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Ta có $\frac{x^2+x+1}{(x^2+\sqrt{x+1})^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2+x+1 \leq (x^2+\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow x^2\sqrt{x+1}((x-1)\sqrt{x+1}+2) \geq 0.$

Nếu $x \geq 1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu $x < 8$ thì $(x-1)\sqrt{x+1}+2 = \frac{-x^3+x^2+x+3}{2+(1-x)\sqrt{x+1}} = \frac{x^2(1-x)+x+3}{2+(1-x)\sqrt{x+1}} > 0.$

Do đó $\frac{x^2+x+1}{(x^2+\sqrt{x+1})^2} \leq 1.$ Thiết lập các bất đẳng thức còn lại tương tự ta cũng sẽ được.

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+\sqrt{x+2})^2} \leq 1; \frac{x^2+x+3}{(x^2+\sqrt{x+3})^2} \leq 1$$

Cộng 3 bất đẳng thức ta được VT $\leq$ VP. Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$

Câu 37. Giải phương trình $\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2} = 1$

Giải

Đầu tiên ta sẽ chứng minh $\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} \geq 2$

Bất đẳng thức biến đổi thành $\frac{\sqrt{x-2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}-2\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})} \geq 0$ đúng với $x \geq 2.$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2} + 1 - 1 \geq \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} - 1 \geq 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 2.$

Cách 2.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\frac{4\frac{x-2}{x+2}}{3\frac{x-2}{x+2}+1}} + \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\right)^2} = 1$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}, (t \geq 0)$ ta được phương trình.

$$\begin{aligned} \frac{2t}{\sqrt{3t^2+1}} + \frac{1}{(1+t^2)} &= 1 \Leftrightarrow \frac{2t}{\sqrt{3t^2+1}} = \frac{t^2+2t}{(t+1)^2} \Leftrightarrow \frac{4t^2}{3t^2+1} = \frac{(t^2+2t)^2}{(t+1)^4} \\ &\Leftrightarrow t^3(t^3+4t^2+11t+12) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2.$

Câu 38. Giải phương trình $\frac{3}{\sqrt{x^2+2x-2}} + \sqrt{-x^2+2x+3} = \sqrt{85-60x}$.

Giải

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-2} \cdot 1 \leq \frac{x^2+2x-1}{2} \\ \frac{1}{5} \cdot 5\sqrt{85-60x} \leq 11-6x \end{cases}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} VT - VP &\geq \frac{6x^3 + x^2 - 28x + 17 + (x^2 + 2x - 1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}{x^2 + 2x - 1} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{-x^2 + 2x + 3})((6x + 15)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - x^2 + 10x + 31)}{(x - 1)^2((6x + 15)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - x^2 + 10x + 31)} \\ &= \frac{(x^2 + 2x - 1)(2 + \sqrt{-x^2 + 2x + 3})}{(x^2 + 2x - 1)} \end{aligned}$$

Để ý thấy với $x \in \left[-1 + \sqrt{3}; \frac{17}{12}\right]$ thì $\begin{cases} 6x + 15 > 0 \\ -x^2 + 10x + 31 > 0 \\ x^2 + 2x - 1 > 0 \end{cases}$ nên $VT \geq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

Câu 39. Giải phương trình $(1 + \sqrt{3x+1})(1 + \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{5x}) = (1 + \sqrt[3]{15x^3 + 35x^2 + 10x})$.

Giải

Nhìn thấy dạng tích là sẽ nghĩ ngay tới bất đẳng thức Holder, trước hết ra sẽ đi chứng minh nó.

Có bổ đề sau. Cho các số thực dương $a, b, c, x, y, z, m, n, p$ khi đó ta luôn có.

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3$$

Chứng minh. Theo AM – GM ta có.

$$\begin{aligned} 1. \quad &\frac{a^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{m^3}{m^3 + n^3 + p^3} + \frac{x^3}{x^3 + y^3 + z^3} \geq \frac{3axm}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3 + c^3)(m^3 + n^3 + p^3)(x^3 + y^3 + z^3)}} \\ 2. \quad &\frac{b^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{n^3}{m^3 + n^3 + p^3} + \frac{y^3}{x^3 + y^3 + z^3} \geq \frac{3byn}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3 + c^3)(m^3 + n^3 + p^3)(x^3 + y^3 + z^3)}} \\ 3. \quad &\frac{c^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{p^3}{m^3 + n^3 + p^3} + \frac{z^3}{x^3 + y^3 + z^3} \geq \frac{3cpz}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3 + c^3)(m^3 + n^3 + p^3)(x^3 + y^3 + z^3)}} \end{aligned}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên có điều phải chứng minh.

Quay lại bài, ta để ý thấy $15x^3 + 35x^2 + 10x = 5x(3x+1)(x+2)$. Nên sẽ đặt $\begin{cases} a = \sqrt{3x+1} \\ b = \sqrt{x+2} \\ c = \sqrt{5x} \end{cases}$.

Khi đó phương trình trở thành $(a+1)(b+1)(c+1) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$.

Theo bất đẳng thức Holder ta có. $\prod_{cyc} \left(\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 + (\sqrt[3]{a})^3 \right) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$.

Vậy dấu "=" xảy ra khi $a = b = c \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+2} = \sqrt{5x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Câu 40. Giải phương trình $x\sqrt{x^2+x-2}+3x\sqrt{x^5-1}=\sqrt{(x^2+3)(3x^7-2x^2+x-2)}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có.

$$x\sqrt{x^2+x-2}+3x\sqrt{x^5-1}=x\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3x\sqrt{x^5-1}}\leq\sqrt{(x^2+3)(3x^7-2x^2+x-2)}=VP$$

Nhìn có vẻ dễ nhưng đến đây mới có vấn đề nảy sinh. Dấu “=” xảy ra khi.

$$\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x}=x\sqrt{x^5-1}\Leftrightarrow x^9-x^4-x^2-x+2=0$$

Phương trình không thật sự dễ giải cho lắm, chắc phải dùng đến hàm số.

Đặt $f(x)=x^9-x^4-x^2-x+2$ liên tục trên $[1;+\infty)$.

$$\Rightarrow f'(x)=9x^8-4x^3-2x-1=9x^8-9x^3+2x^3-2x+3x^3-1>0, \forall x\geq 1$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Lại có $f(1)=0$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bên cạnh hàm số ta cũng có thể phân tích $f(x)$ thành nhân tử. Ta được

$$\begin{aligned} f(x) &= x^9 - x^4 - x^2 - x + 2 = (x-1)(x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 - x - 2) \\ x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 - x - 2 &= x^8 + x^7 + (x^6 + x^5 - 2) + x(x-1)(x^2 + x + 1) > 0, \forall x \geq 1 \end{aligned}$$

Khi đó phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Câu 41. Giải phương trình $x^2\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3-x}\leq\left(\frac{x^2-8x+8}{3x^2-8x+8}\right)^2-\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}}$.

Giải

Bất phương trình tương đương $x^2\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3-x}+\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}}=\left(\frac{x^2-8x+8}{3x^2-8x+8}\right)^2$

$$\text{Ta sẽ đi chứng minh } \begin{cases} x^2\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3-x}+\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}}\geq 1 \\ \left(\frac{x^2-8x+8}{3x^2-8x+8}\right)^2\leq 1 \end{cases}$$

Xét đánh giá đầu tiên ta có $\sqrt{2-x}\left(x^2\sqrt{x+2}+\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{3-x+1}}-\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}}\right)\geq 0$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{\sqrt{3-x+1}}\geq\frac{1}{1+\sqrt{x^2-x+3}}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+3}\geq\sqrt{3-x}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(3-x)}\geq\sqrt{3-x}$

Dễ dàng thấy bất đẳng thức cuối luôn đúng, do vậy đánh giá đầu tiên đúng.

$$\text{Xét đánh giá thứ 2 ta có } \begin{cases} \frac{x^2-8x+8}{3x^2-8x+8}=1-\frac{2x^2}{x^2+2(x-2)^2}\leq 1 \\ \frac{x^2-8x+8}{3x^2-8x+8}=-1+\frac{4(x-2)^2}{x^2+2(x-2)^2}\leq -1 \end{cases}$$

Vậy ta có 2 đánh giá luôn đúng, khi đó $VT\geq 1\geq VP$, dấu “=” xảy ra khi $x=0; x=2$

Câu 42. Giải phương trình $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{\frac{3x-13}{4}}$.

Giải

Để căn bậc 3 thì hơi khó đánh giá nên ta sẽ lũy thừa lên. Ta có.

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{\frac{3x-13}{4}} \Leftrightarrow (\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1})^3-\frac{3x-13}{4}=0$$

Theo AM – GM ta có

$$VT \leq \left(\frac{x-1}{2} - \sqrt{x+1} \right)^3 - \frac{3x-13}{4} = \frac{1}{8} (\sqrt{x+1}-2)^2 (x^2-4x+1-2(x+1)\sqrt{x+1})$$

Đến đây ta sẽ cần chứng minh $f(x) = x^2 - 4x + 1 - 2(x+1)\sqrt{x+1} < 0$, nhưng có vẻ ta cần tìm thêm điều kiện thì mới có thể chứng minh được.

Để ý thấy $\sqrt{x-2} < x+1$ nên điều kiện có nghiệm sẽ là $x \in \left[2; \frac{13}{3} \right]$.

Ta có $f'(x) = 2x - 4 - 3\sqrt{x+1} = \frac{4x^2 - 25x + 7}{2x - 4 + 3\sqrt{x+1}} < 0, \forall x \in \left[2; \frac{13}{3} \right]$.

Từ đó suy ra $f\left(\frac{13}{3}\right) \leq f(x) \leq f(2)$. Mà $\begin{cases} f\left(\frac{13}{3}\right) \approx -22,189 \\ f(2) = -3 - 6\sqrt{3} \end{cases}$ nên $f(x) < 0$. Vậy $VT \leq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 3$.

Câu 43. Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} \leq 2, \forall a, b > 0$.

Giải

Do bất đẳng thức đang ở dạng đẳng cấp nên ta sẽ chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{b}$ và đặt $x = \sqrt{\frac{a}{b}} (x > 0)$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau.

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{3x}+1} \leq 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(3x+1)} - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}) \geq 0$$

Bài này khá là nhiều căn nên ta sẽ nghĩ cách làm giảm bớt căn, tuy nhiên khá là bế tắc. Ở bài này sẽ dùng bất đẳng thức $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$. Ta có

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} \leq \sqrt{2(4x+4)} = 2\sqrt{2}\sqrt{x+1}$$

Khi đó $VT \geq 2\sqrt{(x+3)(3x+1)} - 2\sqrt{2}\sqrt{x+1}(\sqrt{x}+1) = f(x)$.

Ta có $f(x) = \frac{4(\sqrt{x}-1)^4}{2\sqrt{(x+3)(3x+1)} + 2\sqrt{2}\sqrt{x+1}(\sqrt{x}+1)} \geq 0$.

Do đó dấu “=” xảy ra khi $x=1 \Leftrightarrow a=b$. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh!

Ngoài ra ta có thể đánh giá bằng AM – GM như sau. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}} &\leq \frac{a}{a+b} + \frac{a+b}{a+3b}; \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} \leq \frac{1}{2} + \frac{2b}{a+3b} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} \leq \frac{3}{4} + \frac{a}{2(a+b)} \\ \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} &\leq \frac{b}{a+b} + \frac{a+b}{b+3a}; \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b+3a}} \leq \frac{1}{2} + \frac{2a}{b+3a} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} \leq \frac{3}{4} + \frac{b}{2(a+b)} \end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên với nhau ta có điều phải chứng minh. Ngoài ra ta có thể giải phương trình bằng liên hợp như sau. Nhận thấy phương trình đang có 3 căn nên có thể đặt $a = \sqrt{x}$ để giảm bớt độ phức tạp của phương trình. Đặt $a = \sqrt{x} (a \geq 0)$ phương trình trở thành.

$$2\sqrt{3a^4+10a^2+3} - (a+1)(\sqrt{3a^2+1} + \sqrt{a^2+3}) = 0$$

Ta tìm được nghiệm kép $a=1$ nên sẽ tìm được 2 biểu thức liên hợp là $\begin{cases} \sqrt{3a^2+1}-\frac{3}{2}a-\frac{1}{2} \\ \sqrt{a^2+3}-\frac{1}{2}a-\frac{3}{2} \end{cases}$. Khi đó tiến

hành nhân liên hợp ta được.

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{3a^4+10a^2+3}-(a+1)(\sqrt{3a^2+1}+\sqrt{a^2+3})=0 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{3a^4+10a^2+3}-2a^2-4a-2-(a+1)\left(\sqrt{3a^2+1}-\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\right)-(a+1)\left(\sqrt{a^2+3}-\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}\right)=0 \\ \Leftrightarrow & \frac{8(a-1)^2(a+1)}{2\sqrt{3a^4+10a^2+3}+2a^2+4a+2}-\frac{3(a+1)(a-1)^2}{4\sqrt{3a^2+1}+6a+2}-\frac{3(a+1)(a-1)^2}{4\sqrt{a^2+3}+2a+6}=0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a=1 \\ \frac{8(a+1)}{2\sqrt{3a^4+10a^2+3}+2a^2+4a+2}-\frac{3(a+1)}{4\sqrt{3a^2+1}+6a+2}-\frac{3(a+1)}{4\sqrt{a^2+3}+2a+6}=0(*) \end{cases} \end{aligned}$$

Nhiệm vụ là sẽ đi chứng minh phương trình (*) vô nghiệm.

Để ý thấy

$$1. \quad \frac{1}{2}-\frac{3(a+1)}{4\sqrt{3a^2+1}+6a+2}=\frac{48a^2}{(4\sqrt{3a^2+1}+4)(8\sqrt{3a^2+1}+12a+4)}>0 \forall a \geq 0.$$

$$2. \quad \frac{1}{2}-\frac{3(a+1)}{4\sqrt{a^2+3}+2a+6}=\frac{48a^2}{(4\sqrt{a^2+3}+4a)(8\sqrt{a^2+3}+4a+12)}\geq 0 \forall a \geq 0.$$

3. Còn lại ta có.

$$\frac{8(a^2+1)}{2\sqrt{3a^4+10a^2+3}+2a^2+4a+2}-1=\frac{(24a^2+24)(a-1)^2}{(2\sqrt{3a^4+10a^2+3}+2a^2+4a+2)(6a^2-4a+6+2\sqrt{3a^4+10a^2+3})}\geq 0$$

Nên do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$

Câu 44. Giải phương trình $\frac{4\sqrt{1-x}}{x}+\frac{\sqrt{2x-1}}{1-x}=3\sqrt{3}$

Giải

Cách 1.

Đầu tiên nhìn thấy bài này có dạng phân số nên ta sẽ thử dùng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng

cộng mẫu số Engel. Ta có bổ đề sau. $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$.

Chứng minh. $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}=\frac{1}{x+y}(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2})\left[\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{y}}\right)^2\right]\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$

Áp dụng vào bài ta có.

$$VT-VP=\frac{(2\sqrt{1-x})^2}{x\sqrt{1-x}}+\frac{(\sqrt{2x-1})^2}{(1-x)\sqrt{2x-1}}-3\sqrt{3}\geq\frac{(2\sqrt{1-x}+\sqrt{2x-1})^2}{\sqrt{1-x}(x+\sqrt{(1-x)(2x-1)})}-3\sqrt{3}$$

Ta cần chứng minh $f(x)=(2\sqrt{1-x}+\sqrt{2x-1})^2-3\sqrt{3}\sqrt{1-x}(x+\sqrt{(1-x)(2x-1)})\geq 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{Đặt } g(x) &= \frac{3\sqrt{3}\sqrt{1-x}-4}{2\left(2\sqrt{(1-x)(2x-1)}+x\right)} + \frac{27x+9}{2\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)} \\
 &= \frac{2\left(3\sqrt{3}\sqrt{1-x}-4\right)\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)+2(27x+9)\left(2\sqrt{(1-x)(2x-1)}+x\right)}{4\left(2\sqrt{(1-x)(2x-1)}+x\right)\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)} \\
 &= \frac{36\sqrt{3}(1-2x)\sqrt{1-x}-162x^2+162x-48+54x^2+18x+4(27x+9)\sqrt{(1-x)(2x-1)}}{4\left(2\sqrt{(1-x)(2x-1)}+x\right)\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)} \\
 &= \frac{-108x^2+180x-48+\sqrt{(1-x)(2x-1)}\left(-36\sqrt{3}\sqrt{2x-1}+4(27x+9)\right)}{4\left(2\sqrt{(1-x)(2x-1)}+x\right)\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)} \\
 &= \frac{-108x^2+180x-48+\sqrt{(1-x)(2x-1)}\left[\frac{11664x^2+5184}{36\sqrt{3}\sqrt{2x-1}+4(27x+9)}\right]}{4\left(2\sqrt{(1-x)(2x-1)}+x\right)\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)}
 \end{aligned}$$

Ta luôn có. $-108x^2+180x-48=-12(3x-4)(3x-1)>0 \forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. Nên $g(x)>0$. Do đó $f(x)\geq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $x=\frac{2}{3}$

Cách 2.

Bước đầu tiên bao giờ cũng là đi tìm nghiệm. Ta được 1 nghiệm $x=\frac{2}{3}$.

Kiểm tra nghiệm bội ta có.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{4(1-x)\sqrt{1-x}+x\sqrt{2x-1}-3\sqrt{3}x(1-x)}{3x-2} &= 0 \\
 \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{4(1-x)\sqrt{1-x}+x\sqrt{2x-1}-3\sqrt{3}x(1-x)}{(3x-2)^2} &\neq 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x=\frac{2}{3}$ là nghiệm kép.

Tìm nhân tử từng cụm, giả sử nhân tử có dạng. $\begin{cases} 4(1-x)\sqrt{1-x}+ax+b=0 \\ x\sqrt{2x-1}+cx+d=0 \end{cases}$.

Khi đó sẽ tìm được 2 nhân tử là. $\begin{cases} x\sqrt{2x-1}-\sqrt{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{9}=0 \\ 4(1-x)\sqrt{1-x}+2\sqrt{3}x-\frac{16\sqrt{3}}{9}=0 \end{cases}$.

Phân tích nhân tử từng cụm 1 sử dụng công thức chia 2 căn ta được.

$$\begin{aligned}
 1. \quad 4(1-x)\sqrt{1-x}+2\sqrt{3}x-\frac{16\sqrt{3}}{9} &= \left(\frac{4}{9}\sqrt{1-x}+\frac{2\sqrt{3}}{27}\right)\left(3\sqrt{1-x}-\sqrt{3}\right)^2 \\
 2. \quad x\sqrt{2x-1}-\sqrt{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{9} &= \frac{\left(3\sqrt{2x-1}-\sqrt{3}\right)^3}{54}
 \end{aligned}$$

Nhìn vào rõ ràng thấy nhân tử thứ 2 không có cùng dấu với bài toán do chứa nghiệm bội 3 nên ta sẽ làm mạnh tay hơn là phân tích nhân tử cả cụm.

| Phương pháp bất đẳng thức

$-3\sqrt{3}x(1-x) - 2\sqrt{3}x + \frac{16\sqrt{3}}{9} + x\sqrt{2x-1}$ với hy vọng cả cụm đó sẽ luôn dương. Thật vậy ta được.

$$\begin{aligned} & -3\sqrt{3}x(1-x) - 2\sqrt{3}x + \frac{16\sqrt{3}}{9} + x\sqrt{2x-1} \\ &= \left(\sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \left(2\sqrt{2x-1} + \frac{(9x-4)\sqrt{3}}{6} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy lời giải là.

$$\begin{aligned} & 4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} = 3\sqrt{3}x(1-x) \\ & \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \underbrace{\left(2\sqrt{3}\sqrt{1-x} + 1 \right)}_{>0} + \left(\sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \underbrace{\left(2\sqrt{2x-1} + \frac{(9x-4)\sqrt{3}}{6} \right)}_{>0} = 0 \end{aligned}$$

Để thấy $VT \geq 0$ nên dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \\ \sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Cách 3.

1. Tìm nghiệm. Phương trình có nghiệm kép $x = \frac{2}{3}$
2. Tìm nhân tử chứa nghiệm. $2\sqrt{1-x} + \sqrt{2x-1} - \sqrt{3}$
3. Chia căn ta được kết quả.

$$\frac{f(x)}{2\sqrt{1-x} + \sqrt{2x-1} - \sqrt{3}} = \underbrace{-x\sqrt{3}\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1-x}\sqrt{2x-1} + \frac{\sqrt{3}(x+2)}{2}\sqrt{2x-1} - \frac{3x-2}{2}}_{g(x)}$$

4. Để ý thấy với $x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$ thì $g(x) < 0$. Nên phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm!

Cách 4. Liên hợp

$$\begin{aligned} & 4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} = 3\sqrt{3}x(1-x) \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\sqrt{1-x} + \frac{2\sqrt{3}}{27} \right) (3\sqrt{1-x} - \sqrt{3})^2 + \frac{1}{54} (3\sqrt{2x-1} - \sqrt{3})^3 + \frac{\sqrt{3}}{3} (3x-2)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2)^2 = 0 \\ \frac{12\sqrt{1-x} + 2\sqrt{3}}{3(3\sqrt{1-x} + \sqrt{3})^2} + \frac{4(3x-2)}{(3\sqrt{2x-1} + \sqrt{3})^3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0(*) \end{cases} \end{aligned}$$

1. Để ý thấy.

$$\frac{4(3x-2)}{(3\sqrt{2x-1} + \sqrt{3})^3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{12(3x-2) + \sqrt{3}(3\sqrt{2x-1} + \sqrt{3})^3}{3(3\sqrt{2x-1} + \sqrt{3})^3} \geq \frac{36x-15}{3(3\sqrt{2x-1} + \sqrt{3})^3}$$

2. Nên phương trình (*) vô nghiệm.

3. Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{2}{3}$.

Cách 5. Liên hợp

$$\begin{aligned}
 & 4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} = 3\sqrt{3}x(1-x) \\
 & \Leftrightarrow 4(1-x)\left(\sqrt{1-x} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + x\left(\sqrt{2x-1} - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \sqrt{3}\left(6x^2 - 8x + \frac{8}{3}\right) = 0 \\
 & \Leftrightarrow 4(1-x)\frac{-\frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{2}\right)} + x\frac{-3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)} + 6\sqrt{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{2}\right)} - \frac{x}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)} + 2\sqrt{3} = 0(*) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nhận thấy

1. $g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{2}\right)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ nên $g(x) \geq g(1) = \frac{\sqrt{3}}{6}$
 2. $v(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ nên $v(x) \geq v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$
- + Khi đó $f(x) > \frac{x-1}{\frac{\sqrt{3}}{6}} - \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{6}} + 2\sqrt{3} = 0$

Cách 6. Bất đẳng thức.

- Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \\ b = \sqrt{1-x} \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2b^2 = 1$. Phương trình trở thành. $\frac{a}{b^2} + \frac{4b}{a^2 + b^2} = 3\sqrt{3}$
- Ta có.

$$\begin{aligned}
 \frac{a^4}{a^2 \cdot b^2 \cdot b^2} & \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{a^4}{\frac{(a^2 + b^2 + b^2)^3}{27}} = \frac{a^4}{\frac{1}{27}} \Rightarrow \frac{a^2}{b^4} \geq 27a^4 \Rightarrow \frac{a}{b^2} \geq 3\sqrt{3}a^2 \\
 \frac{16b^4}{2b^2(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)} & \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{16b^4}{\left(\frac{2b^2 + a^2 + a^2 + b^2 + b^2}{3}\right)^3} = \frac{16b^4}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \\
 & \Rightarrow \frac{16b^2}{(a^2 + b^2)^2} \geq 108b^4 \Rightarrow \frac{4b}{a^2 + b^2} \geq 3\sqrt{3} \cdot 2b^2
 \end{aligned}$$

- Cộng lại ta được $VT \geq 3\sqrt{3} = VP$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

Câu 45. Giải phương trình $105x^4 + 1120x^2 + 256 = 128\sqrt{(1+x)^7} + 128\sqrt{(1-x)^7}$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \rightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Nhận xét. Ta nhận xét thấy nếu thay x bởi $-x$ thì phương trình không thay đổi. Suy ra ta chỉ cần

xét $x \in [0; 1]$. Xét hàm số. $f(x) = 105x^4 + 1120x^2 + 256 - 128\sqrt{(1+x)^7} - 128\sqrt{(1-x)^7}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= 420x^3 + 2240x - 128 \left[\frac{7(1+x)^6}{2\sqrt{(1+x)^7}} - \frac{7(1-x)^6}{2\sqrt{(1-x)^7}} \right] \\ &\Rightarrow f'(x) = 420x^3 + 2240x - 126 \left[\frac{7(1+x)^6}{2\sqrt{(1+x)^7}} - \frac{7(1-x)^6}{2\sqrt{(1-x)^7}} \right] \\ &\Rightarrow f''(x) = 1260x^2 + 2240 - 448 \left[\frac{5(1+x)^4}{2\sqrt{(1+x)^5}} + \frac{5(1-x)^4}{2\sqrt{(1-x)^5}} \right] \\ &\Rightarrow f''(x) = 1260x^2 + 2240 - 1120 \left[\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} \right] \end{aligned}$$

Mặt khác theo AM – GM ta có.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{(1+x)^3} &= \sqrt{(1+x)(1+x)(1+x) \cdot 1} \leq \sqrt{\left(\frac{1+x+1+x+1+x+1}{4} \right)^4} = \left(1 + \frac{3x}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 1. \\ \bullet \quad \sqrt{(1-x)^3} &= \sqrt{(1-x)(1-x)(1-x) \cdot 1} \leq \sqrt{\left(\frac{1-x+1-x+1-x+1}{4} \right)^4} = \left(1 - \frac{3x}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} \leq 2 \left(\frac{9}{16}x^2 + 1 \right) \Rightarrow 1120 \left[\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} \right] \leq 2240 \left(\frac{9}{16}x^2 + 1 \right) \\ &\Rightarrow -1120 \left[\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} \right] \geq -2240 \left(\frac{9}{16}x^2 + 1 \right) = -1260x^2 - 2240 \\ &\Rightarrow f''(x) = 1260x^2 + 2240 - 1120 \left[\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} \right] \geq 1260x^2 + 2240 - 1260x^2 - 2240 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy hàm số } f'(x) &= 420x^3 + 2240x - 448 \left[\sqrt{(1+x)^5} + \sqrt{(1-x)^5} \right] \text{ đồng biến } \forall x \in [0;1] \\ &\Rightarrow f'(x) \geq f(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do } f'(x) \geq 0 &\Rightarrow f(x) = 105x^4 + 1120x^2 + 256 - 128\sqrt{(1+x)^7} - 128\sqrt{(1-x)^7} \text{ đồng biến với } \forall x \in [0;1] \\ &\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow 105x^4 + 1120x^2 + 256 - 128\sqrt{(1+x)^7} - 128\sqrt{(1-x)^7} \geq 0 \text{ với } \forall x \in [0;1]. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra tại $x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có $x = 0$ là nghiệm.

Câu 46. Giải phương trình $6\sqrt[6]{2x-1} + 6\sqrt[6]{2-x} - 7\sqrt[7]{(2x-1)(2-x)} = 5$

Giải

Do phương trình có nghiệm kép nên ta dùng phương pháp đánh giá. Ta có.

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x) &= 6\sqrt[6]{2x-1} + 1 + 6\sqrt[6]{2-x} + 1 - 7\sqrt[7]{(2x-1)(2-x)} - 7 \\ 2. \quad 6\sqrt[6]{2x-1} + 1 &\stackrel{AM-GM}{\geq} 7\sqrt[7]{2x-1} \\ 3. \quad 6\sqrt[6]{2-x} + 1 &\stackrel{AM-GM}{\geq} 7\sqrt[7]{2-x} \end{aligned}$$

Do đó ta được.

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 7\sqrt[3]{2x-1} + 7\sqrt[3]{2-x} - 7\sqrt[3]{(2x-1)(2-x)} - 7 = 7\left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{(2x-1)(2-x)} - 1\right) \\ &= 7\left(\sqrt[3]{2x-1} - 1\right)\left(1 - \sqrt[3]{2-x}\right) = \frac{14(x-1)^2}{\sum_{i=0}^6 \left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^i \cdot \sum_{j=0}^6 \left(\sqrt[3]{2-x}\right)^j} \end{aligned}$$

Mà $\begin{cases} \sqrt[3]{2x-1} \geq 0 \\ \sqrt[3]{2-x} \geq 0 \end{cases}$, nên $f(x) \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$.

Câu 47. Giải phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{3x-5} = 2\sqrt[5]{3x+26}$

Giải

Điều kiện. $x \geq \frac{5}{3}$. Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình sau.

$$\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{3x-5} - 2\sqrt[5]{3x+26} = 0$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{3x-5} - 2\sqrt[5]{3x+26}$, $\forall x \geq \frac{5}{3}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{(3x-5)^3}} - \frac{6}{5\sqrt[5]{(3x+26)^4}}.$$

Tới đây ta sẽ tìm cách đánh giá cho $f'(x)$. Ta xét hiệu $A = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{6}{5\sqrt[5]{(3x+26)^4}}$.

Để xét dấu biểu thức A thì ta cần chuẩn quy về một căn thức để có thể tiện lợi so sánh và vì trong biểu thức A chứa căn bậc hai và căn bậc năm nên ta sẽ chuẩn quy về căn bậc mười. Do đó ta biến đổi như sau.

$$A = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{6}{5\sqrt[5]{(3x+26)^4}} = \frac{\sqrt[10]{5^{10}(3x+26)^8} - \sqrt[10]{12^{10}(x+2)^5}}{10\sqrt{x+2} \cdot \sqrt[5]{(3x+26)^4}}$$

Vậy để xét dấu của A ta chỉ cần xét dấu của hiệu $\sqrt[10]{5^{10}(3x+26)^8} - \sqrt[10]{12^{10}(x+2)^5}$.

Ta có $x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow 3x+26 \geq 31$.

$$\text{Lại có } 5^{10}(3x+26)^8 = 5^{10}(3x+26)^5 \cdot (3x+26)^3 \geq 5^{10}(3x+26)^5 \cdot 31^3$$

$$\text{Từ đó ta có } 5^{10}(3x+26)^8 \geq 5^{10} \cdot 3^5(x+12)^5 \cdot 31^3 \geq 5^{10} \cdot 3^5(x+2)^5 \cdot 31^3 > 12^{10}(x+2)^5$$

Do đó $A > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$. Vậy hàm số $f(x)$ liên tục và luôn đồng biến với $x \in \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Mặt khác ta có $f(2) = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 48. Giải phương trình $\sqrt[5]{1+2015x} + \sqrt[5]{1-2015x} = \sqrt[5]{1+2016x} + \sqrt[5]{1-2016x}$

Giải

Nhận thấy nếu x_0 là nghiệm thì $-x_0$ cũng là nghiệm, vậy ta chỉ cần xét phương trình trên tập số thực $x \geq 0$.

Xét hàm số. $f(t) = \sqrt[5]{1+2015t} + \sqrt[5]{1-2015t}$ trên tập số thực $t \geq 0$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{2015}{5\sqrt[5]{(1+2015t)^4}} - \frac{2015}{5\sqrt[5]{(1-2015t)^4}} \Rightarrow f'(t) = \frac{2015}{5} \left(\frac{\sqrt[5]{(1-2015t)^4} - \sqrt[5]{(1+2015t)^4}}{\sqrt[5]{[(1+2015t)(1-2015t)]^4}} \right)$$

| Phương pháp bất đẳng thức

Ta đi chứng minh $f'(t) = \frac{2015}{5} \left(\frac{\sqrt[5]{(1-2015t)^4} - \sqrt[5]{(1+2015t)^4}}{\sqrt[5]{[(1+2015t)(1-2015t)]^4}} \right) \leq 0$

Thật vậy khi $t \geq 0$, ta có.

$$\begin{aligned} 4030t &\geq -4030t \Leftrightarrow (2015t)^2 + 4030t + 1 \geq (2015t)^2 - 4030t + 1 \\ &\Leftrightarrow (1+2015t)^2 \geq (1-2015t)^2 \Leftrightarrow (1+2015t)^2 - (1-2015t)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow [(1+2015t)^2 + (1-2015t)^2] [(1+2015t)^2 - (1-2015t)^2] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (1+2015t)^4 - (1-2015t)^4 \geq 0 \Leftrightarrow (1+2015t)^4 \geq (1-2015t)^4 \\ &\Rightarrow \sqrt[5]{(1+2015t)^4} \geq \sqrt[5]{(1-2015t)^4} \\ &\Rightarrow f'(t) = \frac{2015}{5} \left(\frac{\sqrt[5]{(1-2015t)^4} - \sqrt[5]{(1+2015t)^4}}{\sqrt[5]{[(1+2015t)(1-2015t)]^4}} \right) \leq 0 \text{ với } \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy hàm số. $f(x) = \sqrt[5]{1+2015x} + \sqrt[5]{1-2015x}$ nghịch biến với mọi $t \geq 0$.

Phương trình tương đương với. $f(2015x) = f(2016x) \Leftrightarrow 2015x = 2016x \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 49. Giải phương trình $2(|x|+2) = \sqrt{1+x^3} + \sqrt{1-x^3} + \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$

Giải

Ta nhận thấy nếu thay x bởi $-x$ thì phương trình không thay đổi. Suy ra ta chỉ cần xét $x \geq 0$. Ta lại chú ý đến hằng đẳng thức đã nhắc đến ở các ví dụ trước là

$$\sqrt{1+x^3} + \sqrt{1-x^3} = \sqrt{2(1+\sqrt{1-x^6})} \leq 2 \text{ đẳng thức xảy ra khi } x = 0.$$

Đến đây ta chỉ cần chứng minh $2x+2 \geq \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1}$ với $x \geq 0$.

Thật vậy, bình phương hai vế lên ta được

$$4x^2 + 8x + 4 \geq 2x^2 + 2 + 2\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})^2 + 8x \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$. Vậy $x = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 50. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-2x+1} + \sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1} + \sqrt{2x^2+(\sqrt{3}+1)x+1} = 3$

Giải

Nhìn dạng này ta sẽ dùng bất đẳng thức vector. Cho 2 vector $\vec{v}(x;y)$ và $\vec{u}(a;b)$, khi đó ta có.

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$. Ngoài ra có thể mở rộng cho 3 vector, thêm $\vec{a}(m;n)$.

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{a}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{a}| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{m^2+n^2} \geq \sqrt{(x+a+m)^2 + (y+b+n)^2}$$

Bây giờ vấn đề là phân tích các biểu thức trong căn thành các tổng bình phương như thế nào để có thể áp dụng bất đẳng thức trên được. Ta có.

$$1. \quad \sqrt{2x^2-2x+1} = \sqrt{x^2+x^2-2x+1} = \sqrt{x^2+(x-1)^2}$$

$$2. \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + 1} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - x\sqrt{3} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2}$$

$$3. \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1} = \sqrt{x^2 + x + 1 + x^2 + x\sqrt{3}} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Đến đây nếu áp dụng bất đẳng thức trên ta sẽ được.

$$VT \geq \sqrt{\left(x + x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}\right)^2 + (x - 1 + x + x)^2} = \sqrt{18x^2 + 2}$$

Dễ thấy $\sqrt{18x^2 + 2}$ chưa phải luôn lớn hơn 3, với lại hãy để ý điểm rơi của bất đẳng thức nó không phải là $x = 0$ nên ta đã đánh giá sai. Để đánh giá đúng hãy để ý nếu ta áp dụng cho 2 căn ở sau thì điểm rơi là $x = 0$, nên ta sẽ xử 2 căn đằng sau trước, ta được.

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \geq \sqrt{4x^2 + 4x + 4} \geq \sqrt{x^2 + 4x + 4} = |x + 2|$$

Chú ý. Nếu ban đầu ta viết là $x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì điểm rơi lúc này cũng không phải là $x = 0$ nên để điểm rơi

là $x = 0$ thì ta phải đổi $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2$.

Còn lại để xuất hiện số 3 ta cần phải biến đổi căn còn lại, ta được.

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x^2 + x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x^2 + (x - 1)^2} = \sqrt{x^2 + (1 - x)^2} \geq |1 - x|$$

Vậy $VT \geq |x + 2| + |1 - x| \geq 3 = VP$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Câu 51. Giải phương trình $\sqrt{2(x^2 - 4x + 5)} + \frac{3 - x}{2} \cdot \sqrt{x^3 + \frac{3}{x}} = 4\sqrt{2 - x}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được.

$$\begin{aligned} \sqrt{2(x^2 - 4x + 5)} + \frac{3 - x}{2} \cdot \sqrt{x^3 + \frac{3}{x}} &= \sqrt{2((2 - x)^2 + 1)} + \frac{(2 - x) + 1}{2} \cdot \sqrt{x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}} \\ &\stackrel{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{2 - x} + \frac{2\sqrt{2 - x}}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot \sqrt{x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}}} = 4\sqrt{2 - x} \end{aligned}$$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$.

Câu 52. Giải phương trình $\frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 3x + 1}} + \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 - 3x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$\begin{aligned} 1. \quad &\frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 3x + 1}} + \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 - 3x + 1}} \geq \frac{4}{2 + \sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 1}} \\ 2. \quad &\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 1} \leq \sqrt{2(2x^2 + 2)} = 2\sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

| Phương pháp bất đẳng thức

$$3. \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)^2} \geq 0$$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Câu 53. Giải phương trình $x^4 - x^3 - 6x + 4 + 2\sqrt{x^6 - x + 1} = 0$

Giải

Đầu tiên ta dùng tiếp tuyến thì sẽ tìm được đánh giá là $2\sqrt{x^6 - x + 1} \geq 5x - 3$.

- Nếu $x < \frac{3}{5}$ thì bất đẳng thức đúng.
- Nếu $x \geq \frac{3}{5}$ thì $2\sqrt{x^6 - x + 1} \geq 5x - 3 \Leftrightarrow (x-1)^2(4x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 16x - 5) \geq 0$.

Để thấy bất đẳng thức cuối đúng nên ta được

$$x^4 - x^3 - 6x + 4 + 2\sqrt{x^6 - x + 1} \geq x^4 - x^3 - 6x + 4 + 5x - 3 = (x-1)^2(x^2 + x + 1) = VP$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 54. Giải phương trình $\sqrt{x^9 - 2x + 2} + \sqrt{x^8 - x + 1} = (2-x)(x^3 + 2x^2 + 2x - 3)$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Phương trình này có nghiệm là $x = 1$ nên ta sẽ có 2 đánh giá $\begin{cases} \sqrt{x^9 - 2x + 2} \geq \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} \\ \sqrt{x^8 - x + 1} \geq \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$.

- Nếu $x < \frac{5}{7}$ thì 2 đánh giá là đúng.
- Nếu $x \geq \frac{5}{7}$ thì ta được.

$$1. \sqrt{x^8 - x + 1} \geq \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2(4x^6 + 8x^5 + 12x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 24x - 21) \geq 0$$

$$2. \sqrt{x^9 - 2x + 2} \geq \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2(4x^7 + 8x^6 + 12x^5 + 16x^4 + 20x^3 + 24x^2 + 28x - 17) \geq 0$$

Để thấy rằng với $x \geq \frac{5}{7}$ thì đương nhiên 2 bất đẳng thức luôn đúng vì $\begin{cases} 20x^2 + 24x - 21 > 0 \\ 24x^2 + 28x - 17 > 0 \end{cases}$.

Vậy $VT - VP \geq (x-1)^2(x+1)^2 \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$.

Câu 55. Giải phương trình $\frac{2x(1+x\sqrt{2x-1})}{(x-\sqrt{x+1})(1+(2x-1)\sqrt{2x-1})} = 2$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{2x-1} \end{cases}$ thì phương trình trở thành $\frac{(b^2+1)(1+a^2b)}{(a^2-a+1)(1+b^3)} = 2$.

Ta có bổ đề. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3$ - Đã chứng minh ở bài trên.

Áp dụng ta có.

$$\begin{aligned}(1+a^3)(1+a^3)(1+b^3) &\geq (1+a^2b)^3 \\ (1+1)(1+1)(a^3+1) &\geq (1+a)^3 \\ (1+1)(1+b^3)(1+b^3) &\geq (1+b^2)^3\end{aligned}$$

Nhân vế theo vế ta được.

$$\begin{aligned}8(1+a^3)^3(1+b^3)^3 &\geq (1+a^2b)^3(1+a)^3(1+b^2)^3 \Leftrightarrow \frac{(1+a^2b)^3(1+a)^3(1+b^2)^3}{(1+a^3)^3(1+b^3)^3} \leq 8 \\ \Leftrightarrow \frac{(1+a^2b)(1+a)(1+b^2)}{(a^3+1)(b^3+1)} &\leq 2 \Leftrightarrow \frac{(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^2-a+1)(b^3+1)} \leq 2\end{aligned}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 56. Giải phương trình $\left(1+\sqrt{x+6}\right)\left(1+\frac{\sqrt{28x-3}}{\sqrt{x+6}}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt[4]{28x-3}}\right)^2 = 256$.

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Cách 1. Bất đẳng thức Holder.

Nhìn thấy dạng tích lại nghĩ đến bất đẳng thức Holder. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+6} \\ b = \sqrt[4]{28x-3} \end{cases}$, phương trình trở thành

$$(1+a)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 = 256.$$

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Holder cho 4 dãy số.

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \geq (1+\sqrt[4]{abcd})^4$$

$$\text{Ta được. } (a+1)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right) \geq \left(1+\sqrt[4]{a \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{9}{\sqrt{b}} \cdot \frac{9}{\sqrt{b}}}\right)^4 = 256 = VP$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=3; b=9 \Rightarrow x=3$.

Cách 2. Bất đẳng thức AM – GM.

Theo AM – GM ta có.

$$\begin{aligned}(a+1)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 &= \left(1+a+b+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 \geq (2\sqrt{b}+b+1)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 = (\sqrt{b}+1)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 \\ (\sqrt{b}+1)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 &= \left(\sqrt{b}+\frac{9}{\sqrt{b}}+1+9\right)^2 \geq \left(2\sqrt{\sqrt{b} \cdot \frac{9}{\sqrt{b}}}+10\right)^2 = 256\end{aligned}$$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=3$.

Cách 3. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

$$\text{Ta có } (1+a)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right) \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} (\sqrt{b}+1)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right) \geq 256.$$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=3$.

Cách 4.

| Phương pháp bất đẳng thức

Chú ý rằng ta luôn có đẳng thức sau.

$$(a+1)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 = 256 + 32\left(\frac{3}{\sqrt[4]{b}} - \sqrt[4]{b}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt[4]{b}} - \sqrt[4]{b}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{a}\right)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2$$

Áp dụng luôn vào bài thì ta được

$$\begin{aligned} & \left(1+\sqrt{x+6}\right)\left(1+\frac{\sqrt{28x-3}}{\sqrt{x+6}}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt[4]{28x-3}}\right)^2 - 256 \\ &= 32\left(\frac{3}{\sqrt[3]{28x-3}} - \sqrt[8]{28x-3}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt[3]{28x-3}} - \sqrt[8]{28x-3}\right)^4 + \left(\sqrt[4]{\frac{28x-3}{x+6}} - \sqrt[4]{x+6}\right)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt[4]{28x-3}}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=3$.

Câu 57. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \left[\sqrt[4]{\frac{2-x}{x-1}} - \sqrt[4]{\frac{x-1}{2-x}}\right]^2 = 2\sqrt{2}$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Điều kiện

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2-x} \\ b = \sqrt{x-1} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$, phương trình trở thành $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = 2\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \\ \Leftrightarrow & a + b + 2ab \geq 2\sqrt{2}ab + 1 \\ \Leftrightarrow & a + b + (a+b)^2 - 1 \geq \sqrt{2}(a+b)^2 + 1 - \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & (1-\sqrt{2})(a+b-\sqrt{2})(a+b-1) \geq 0 \end{aligned}$$

Do $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow (a+b) \in [1; \sqrt{2}]$. Vậy bất đẳng thức cuối đúng.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

Câu 58. Giải phương trình $1 + \frac{2(\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x})}{\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}} = \frac{1 + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}}{\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}}$.

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Biến đổi phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{2(\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x})}{\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}} = \frac{1 + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}}{\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})\sqrt[4]{(x-1)(3-x)} + 2(\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x})\sqrt[4]{(x-1)(3-x)} \\ &= (\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}) + (\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x})^2 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\bullet \quad \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x})^2}{2} \geq \frac{2(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}}{2}.$$

$$\bullet \quad \frac{(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})^2}{2} + (\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}) \geq \frac{4\sqrt{(x-1)(3-x)} + (\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})^2}{2}$$

$$\geq 2(\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x})\sqrt{(x-1)(3-x)}.$$

Cộng 2 vế ta được $VT \leq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 3$.

Câu 59. Giải phương trình $(1 + \sqrt{3-x})^2 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right]^2 + (1 + \sqrt{x-2})^2 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right]^2 = 17 + 2\sqrt{2}$.

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$(1 + \sqrt{3-x})^2 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right]^2 + (1 + \sqrt{x-2})^2 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right]^2$$

$$\geq \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{3-x}) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right] + (1 + \sqrt{x-2}) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right] \right]^2$$

Cách 1. Phân tích nhân tử.

$$\frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{3-x}) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right] + (1 + \sqrt{x-2}) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right] \right]^2 \geq 17 + 12\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[(1 + \sqrt{3-x}) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right] + (1 + \sqrt{x-2}) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right] \right]^2 \geq 34 + 24\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{3-x}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{3-x} + \sqrt{x-2} + \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} + 2 \right]^2 \geq 34 + 24\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{3-x}} + \sqrt{3-x} - \frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2} + \frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{11\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} + 2 + 3\sqrt{2} \right]^2 \geq 34 + 24\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(2\sqrt{3-x} - \sqrt{2})^2 (\sqrt{2(3-x)} + 4)}{8\sqrt{3-x}} + \frac{(2\sqrt{x-2} - \sqrt{2})^2 (\sqrt{2(x-2)} + 4)}{8\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} + 2 + 3\sqrt{2} \right]^2 \geq 34 + 24\sqrt{2}$$

Bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được.

$$\left[\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} + 2 + 3\sqrt{2} \right]^2 \geq 34 + 24\sqrt{2}$$

Thật không may là.

$$\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} \geq 2 \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} + 2 + 3\sqrt{2} \right]^2 \geq (4 + 3\sqrt{2})^2 = 34 + 24\sqrt{2} = VP$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{5}{2}$.

Cách 2. Bất đẳng thức.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{3-x} \\ b = \sqrt{x-2} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$, ta đi chứng minh $\frac{1}{2} \left[(1+a) \left[1 + \frac{1}{b}\right] + (1+b) \left[1 + \frac{1}{a}\right] \right]^2 \geq VP$, thật vậy ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left[(1+a) \left[1 + \frac{1}{b} \right] + (1+b) \left[1 + \frac{1}{a} \right] \right]^2 \\
 &= \left[2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right]^2 = \left[\frac{a \left[b^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] + b \left[a^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right]}{ab} + \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right] + 2 \right]^2 \\
 &\geq \left[\frac{3a\sqrt[3]{\frac{b^2}{4}} + 3b\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}}{ab} + \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right] + 2 \right]^2 \geq \left[\frac{6\sqrt{ab\sqrt[3]{\frac{a^2}{4} \cdot \frac{b^2}{4}}}}{ab} + 4 \right]^2 \\
 &= \left[\frac{6}{\sqrt[6]{16}\sqrt[6]{ab}} + 2 \right]^2 \geq \left[\frac{6}{\sqrt[6]{16}\sqrt[6]{\frac{a^2+b^2}{2}}} + 2 \right]^2 = 2(17 + 12\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 60. Giải phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} + \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4 - 64}{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4} = 0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Biến đổi phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} + \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4 - 64}{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4} &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{x})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2-x})^2} + 2 - \frac{64}{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4} = 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{x})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2-x})^2} + \frac{4}{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2} &= \frac{32[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]}{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Lại có } \frac{1}{(\sqrt{x})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2-x})^2} + \frac{4}{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2} \\
 = \frac{\left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2 \right]^2}{(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2 \right]} + \frac{4(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2 \right]}
 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2 \right]^2}{(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2 \right]} + \frac{4(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2 \right]} \\
 &\geq \frac{\left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2 + 2\sqrt{x(2-x)} \right]^2}{3(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2 \right]} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4}{2(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2 \right]}
 \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4}{2(\sqrt{x})^2(\sqrt{2-x})^2[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]} \geq \frac{32[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]}{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4} \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^8 \geq 64(\sqrt{x})^2(\sqrt{2-x})^2[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]^2 \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4 \geq 8[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]\sqrt{x(2-x)} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{2-x})^4 \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

Câu 61. Giải phương trình

$$(4x + 7 + 2\sqrt{8x+7})(4x + 5 + 2\sqrt{x+1}) = 2(4\sqrt{x+1} + 1)(2\sqrt{8x+7} + 1)$$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Ta có

$$\begin{aligned} & (4x + 7 + 2\sqrt{8x+7})(4x + 5 + 2\sqrt{x+1}) = 2(4\sqrt{x+1} + 1)(2\sqrt{8x+7} + 1) \\ & \Leftrightarrow \left((\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{3}{4} \right) \left(\frac{8x+7}{4} + \sqrt{x+1} + \frac{3}{4} \right) = \left(2\sqrt{x+1} + \frac{1}{2} \right) \left(2\sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Chú ý rằng.

- $\left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 + \frac{1}{4} \geq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{3}{4} \geq \sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{1}{2}$
- $\left(\sqrt{\frac{8x+7}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{8x+7}{4}} \right)^2 + \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{8x+7}{4}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{8x+7}{4}} \right)^2 + \sqrt{x+1} + \frac{3}{4} \geq \sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}$

Do đó $VT \geq \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2$. Mà theo AM – GM ta luôn có

$$\left(2\sqrt{x+1} + \frac{1}{2} \right) \left(2\sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{1}{2} \right) \leq \frac{\left(2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{\frac{8x+7}{4}} + 1 \right)^2}{4} = \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2 \leq VT$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{8x+7}{4}} = -\frac{3}{4}$.

Câu 62. Giải phương trình $\frac{1}{(\sqrt{x})^3} + \frac{x\sqrt{x}}{(\sqrt{2x-1})^3} + (2x-1)\sqrt{2x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{x}{2x-1}} + \sqrt{2x-1}$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

- $\frac{1}{(\sqrt{x})^3} + 1 + 1 \geq \frac{3}{\sqrt{x}}; \frac{(\sqrt{x})^3}{(\sqrt{2x-1})^3} + 1 + 1 \geq \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}}$
- $(\sqrt{2x-1})^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt{2x-1}; \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x-1} \geq 3$

| Phương pháp bất đẳng thức

Cộng lại ta được $VT + 6 \geq 3 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x-1} \right] \geq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x-1} = VP$.

Vậy dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} = \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 63. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+x+1}\sqrt{1-x} + \sqrt[3]{x^2-x+1}\sqrt{x+1} = x^2+2$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có ngay

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt[6]{(x^2+x+1)^3(1-x)^2} + \sqrt[6]{(x^2-x+1)^3(x+1)^2} \\ &\leq \frac{3(x^2+x+1)+2(1-x)+1}{6} + \frac{3(x^2-x+1)+2(x+1)+1}{6} = x^2+2 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Câu 64. Giải phương trình $\sqrt{3-2x^2} + \sqrt{3-\frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{(x^2+4x+1)^4}{16x^4}$

Giải

Điều kiện. $x \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{3} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{2} \right]$. Theo AM – GM ta có $\begin{cases} \sqrt{3-2x^2} \leq 2-x^2 \\ \sqrt{3-\frac{2}{x^2}} \leq 2-\frac{1}{x^2} \end{cases}$.

Từ đó suy ra

$$VP - VT \geq \frac{(x^2+4x+1)^4}{16x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2} - 3 = \frac{(x+1)^2(x^6+14x^5+87x^4+116x^3+87x^2+14x+1)}{16x^6}$$

Lại có $x^6+14x^5+87x^4+116x^3+87x^2+14x+1$

$$= x^4(x^2+14x+16) + 71x^2\left(x + \frac{58}{71}\right)^2 + \frac{2813}{71}x^2 + 14x + 1 > 0, \forall x \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{3} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{2} \right]$$

Vậy $VP \geq VT$. Dấu "=" xảy ra khi $x = -1$.

Câu 65. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$

Giải

Đặt $\begin{cases} \vec{u} = (x-3; \sqrt{x-1}) \\ \vec{v} = (1; 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(x-3)^2 + x-1} \\ |\vec{v}| = \sqrt{2} \end{cases}$. Theo bất đẳng thức vecto ta có.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Rightarrow \sqrt{x-1} + (x-3) \leq \sqrt{2(x-3)^2 + 2x-2}$$

Vậy $VT \leq VP$. Đẳng thức xảy ra khi hai vecto $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương với nhau. Tức là $x = 5$

Câu 66. Giải phương trình $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$

Giải

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} \right)^2 &= \left(2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right)^2 \\ &\leq (x+9) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} \right) = x+9 = (\sqrt{x+9})^2 = VP^2 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 8 = \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$

Câu 67. Giải phương trình $2x = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{x+3}}}}$

Giải

Đặt $a = \frac{1}{2}\sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{x+3}}$. Khi đó ta có hệ phương trình.
$$\begin{cases} 2x = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3+a}} \\ 2a = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3+x}} \end{cases}$$

Giả sử $x \geq a \Rightarrow 2x \geq 2a \Rightarrow \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3+a}} \geq \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3+x}}$. Mà $f(t) = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3+t}}$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên suy ra $a \geq x \Rightarrow a = x \Rightarrow 2x = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{x+3}}$

Đặt $b = \frac{1}{2}\sqrt{x+3}$ ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x = \sqrt{3+b} \\ 2b = \sqrt{3+x} \end{cases}$$

Giả sử $x \geq b \Rightarrow \sqrt{3+b} \geq \sqrt{3+x} \Rightarrow b \geq x \Rightarrow b = x$. Hay $2x = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases} (KTM)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 68. Giải phương trình $2\sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{27}{2}x + 6}$

Giải

Phương trình tương đương.

$$2\sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{3(9x+4)}{2}} \Leftrightarrow 2\sqrt[4]{\frac{(9x+4)^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3(9x+4)}{2}}$$

Đặt $9x+4 = y (y \geq 0)$. Khi đó phương trình trở thành.

$$2\sqrt[4]{\frac{y^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3y}{2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{y^2}{3} + 4} = 1 + \frac{3y}{2} + \sqrt{6y}$$

Theo AM – GM ta có.

$$\sqrt{6y} \leq \frac{6+y}{2} \Rightarrow 4\sqrt{\frac{y^2}{3} + 4} \leq 2y+4 \Leftrightarrow 4\left(\frac{y^2}{3} + 4\right) \leq (y+2)^2 \Leftrightarrow \frac{(y-6)^2}{3} \geq 0$$

Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = 6 \Leftrightarrow x = \frac{2}{9}$.

Câu 69. Giải phương trình $\sqrt[8]{1+x} + \sqrt[8]{1-x} + \sqrt[8]{1+3x} + \sqrt[8]{1-3x} = 2(\sqrt[8]{1+2x} + \sqrt[8]{1-2x})$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 1+3x \geq 0 \\ 1-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có.

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\begin{cases} \sqrt{1+x} + \sqrt{1+3x} \leq \sqrt{2(1+x+1+3x)} = 2\sqrt{1+2x} \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-3x} \leq \sqrt{2(1-x+1-3x)} = 2\sqrt{1-2x} \end{cases} \quad (1)$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz và kết hợp (1) ta có.

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1+3x} \leq \sqrt{2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+3x})} \leq 2\sqrt[4]{1+2x} \\ \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1-3x} \leq \sqrt{2(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-3x})} \leq 2\sqrt[4]{1-2x} \end{cases} \quad (2)$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz và kết hợp (2) ta có.

$$\begin{cases} \sqrt[8]{1+x} + \sqrt[8]{1+3x} \leq \sqrt{2(\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1+3x})} \leq 2\sqrt[8]{1+2x} \\ \sqrt[8]{1-x} + \sqrt[8]{1-3x} \leq \sqrt{2(\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1-3x})} \leq 2\sqrt[8]{1-2x} \end{cases} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \sqrt[8]{1+x} + \sqrt[8]{1-x} + \sqrt[8]{1+3x} + \sqrt[8]{1-3x} \leq 2(\sqrt[8]{1+2x} + \sqrt[8]{1-2x})$$

Vậy phương trình tương đương với.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}}{1} = \frac{\sqrt{1+3x}}{1} \vee \frac{\sqrt{1-x}}{1} = \frac{\sqrt{1-3x}}{1} \\ \frac{\sqrt[4]{1+x}}{1} = \frac{\sqrt[4]{1+3x}}{1} \vee \frac{\sqrt[4]{1-x}}{1} = \frac{\sqrt[4]{1-3x}}{1} \\ \frac{\sqrt[8]{1+x}}{1} = \frac{\sqrt[8]{1+3x}}{1} \vee \frac{\sqrt[8]{1-x}}{1} = \frac{\sqrt[8]{1-3x}}{1} \end{cases} \Rightarrow x=0 \quad (4)$$

Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Nhận xét. Với cách chứng minh trên ta có thể tổng quát bài toán trên thành

$$\sqrt[n]{1+x} + \sqrt[n]{1-x} + \sqrt[n]{1+3x} + \sqrt[n]{1-3x} = 2(\sqrt[n]{1+2x} + \sqrt[n]{1-2x}), \quad n=2k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \text{ chẵn.}$$

Câu 70. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} - 4x^2 + 4 = \frac{32}{x^2(2x^2+3)^2}$

Giải

Ta có. $4x^2 + \frac{32}{x^2(2x^2+3)^2} = \frac{1}{2} \left(4x^2 + (2x^2+3) + (2x^2+3) + \frac{64}{x^2(2x^2+3)^2} \right) - 3$

Theo AM – GM ta có. $4x^2 + \frac{32}{x^2(2x^2+3)^2} \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt[4]{4x^2(2x^2+3)^2} \cdot \frac{64}{x^2(2x^2+3)^2} \right) - 3 = 5$

Từ đó suy ra $4x^2 + \frac{32}{x^2(2x^2+3)^2} - 4 \geq 5 - 4 = 1$

Xét bất phương trình.

$$x^2 + x + 1 - \sqrt{x^2 - x + 1} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow 2x - 1 < 2\sqrt{x^2 - x + 1}$$

- Nếu $2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$. Bất phương trình luôn đúng.
- Nếu $2x - 1 \geq 0$, bất phương trình lúc này tương đương với.

$$4x^2 - 4x + 1 < 4(x^2 - x + 1) \Leftrightarrow 1 < 4$$

Vậy $VT < 1 \leq VP$ do đó phương trình vô nghiệm!

Câu 71. Giải phương trình $x^2 + 4 = 2\sqrt{x^4 + 4} + 2\sqrt{x^4 - 4}$

Giải

Theo AM – GM ta có. $x^4 + 4 \geq 4x^2$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có.

$$2\sqrt{x^4 + 4} + 2\sqrt{x^4 - 4} \leq \sqrt{2(4(x^4 + 4) + 4(x^4 - 4))} = 4x^2$$

Từ đó suy ra phương trình vô nghiệm!

Câu 72. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - x + 19} + \sqrt{7x^2 + 8x + 13} + \sqrt{13x^2 + 17x + 7} = 3\sqrt{3}(x + 2)$

Giải

Ta có.

$$1. \sqrt{x^2 - x + 19} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 18\frac{3}{4}} \geq 18\frac{3}{4}$$

$$2. 7x^2 + 8x + 13 = (2x - 1)^2 + 3(x + 2)^2 \geq 3(x + 2)^2$$

$$3. 13x^2 + 17x + 7 = \frac{(2x - 1)^2}{4} + \frac{3(4x + 3)^2}{4} \geq \frac{3(4x + 3)^2}{4}$$

Thế vào phương trình đầu ta sẽ được $VT \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$.

Câu 73. Giải phương trình $\frac{11}{x^2} - \frac{25}{(x + 5)^2} = 1$

Giải

Đặt $x + 5 = y (y \neq 0)$ ta có $x^2 = (y - 5)^2 = y^2 - 10y + 25$

Phương trình trở thành.

$$y^4 - 10y^3 + 39y^2 - 250y + 625 = 0 \Leftrightarrow \left(y^2 + \frac{625}{y^2}\right) - 10\left(y + \frac{25}{y}\right) + 38 = 0 \quad (1)$$

Đặt $z = y + \frac{25}{y} \Rightarrow |z| = \left|y + \frac{25}{y}\right| \geq 10$. Phương trình (1) trở thành. $z^2 - 10z - 11 = 0 \Rightarrow z = 11$.

$$\text{Thay } z = 11 \Rightarrow y + \frac{25}{y} = 11 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Câu 74. Giải phương trình $\sqrt[4]{1+x} + \frac{1}{6}\sqrt[4]{1+3x} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{1-x} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{1+2x} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}$

Giải

Điều kiện $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Xét hàm số. $f(x) = \sqrt[4]{1+x} + \frac{1}{6}\sqrt[4]{1+3x} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{1-x} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{1+2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{3}{24\sqrt[4]{(1+3x)^3}} + \frac{1}{8\sqrt[4]{(1-x)^3}} - \frac{2}{8\sqrt[4]{(1+2x)^3}} - \frac{1}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình lũy thừa ta có.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1+3x)^3}}{2}} &\leq \sqrt[4]{\frac{\sqrt[4]{(1+x)^4} + \sqrt[4]{(1+3x)^4}}{2}} = \sqrt[4]{1+2x} \\ \Rightarrow \sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1+3x)^3} &\leq 2\sqrt[4]{(1+2x)^3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1+3x)^3}} \geq \frac{1}{2\sqrt[4]{(1+2x)^3}} \end{aligned}$$

| Phương pháp bất đẳng thức

Mặt khác ta có.
$$\frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(1+3x)^3}} \geq \frac{4}{\sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1+3x)^3}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(1+3x)^3}} \geq \frac{2}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} \quad (1)$$

Mặt khác ta có.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{(1+x)^3} &= \sqrt[4]{(1+x)(1+x)(1+x).1} \leq \frac{1+x+1+x+1+x+1}{4} = 1 + \frac{3x}{4} \\ \sqrt[4]{(1-x)^3} &= \sqrt[4]{(1-x)(1-x)(1-x).1} \leq \frac{1-x+1-x+1-x+1}{4} = 1 - \frac{3x}{4} \\ \Rightarrow \sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1+3x)^3} &\leq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1+3x)^3}} \geq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)^3}} &\geq \frac{4}{\sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1-x)^3}} \geq 2 \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có.
$$\frac{2}{\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(1+3x)^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)^3}} \geq \frac{2}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} + 2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{3}{24\sqrt[4]{(1+3x)^3}} + \frac{1}{8\sqrt[4]{(1-x)^3}} - \frac{2}{8\sqrt[4]{(1+2x)^3}} - \frac{1}{4} \geq 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{3}{24\sqrt[4]{(1+3x)^3}} + \frac{1}{8\sqrt[4]{(1-x)^3}} - \frac{2}{8\sqrt[4]{(1+2x)^3}} - \frac{1}{4} \geq 0$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục và đơn điệu tăng trên tập số thực $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Mặt khác ta có $f(0) = 0$, vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Lời giải trên nhắc đến bất đẳng thức trung bình lũy thừa, ta có thể hiểu ở đây là chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \Leftrightarrow (a^3+b^3)^4 \leq 2(a^4+b^4)^3 \Leftrightarrow (a^2+b^2)^2 \leq 2(a^4+b^4)$$

luôn đúng theo Cauchy – Schwarz.

Câu 75. Giải phương trình $2\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2}\right) + x^{16} + y^{16} = 4(1+x^2y^2)^2 - 10$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 4 số dương ta có.

$$\begin{aligned}\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} + 1 + 1 &\geq 4\sqrt[4]{\frac{x^{10} \cdot y^{10}}{x^2 \cdot y^2}} = 4x^2y^2 \Rightarrow 2\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} + 2\right) \geq 8x^2y^2 \\ x^{16} + y^{16} + 1 + 1 &\geq 4\sqrt[4]{x^{16} \cdot y^{16}} = 4x^4y^4 \\ \Rightarrow 2\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} + 2\right) + x^{16} + y^{16} + 2 &\geq 4x^4y^4 + 8x^2y^2 \\ \Rightarrow 2\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2}\right) + x^{16} + y^{16} &\geq 4(1+x^2y^2)^2 - 10\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = y^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = |y| = 1$

Câu 76. Giải phương trình $\sqrt{-4x^4y^2 + 16x^2y + 9} - \sqrt{x^2y^2 - 2y^2} = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) (x > 0)$

Giải

Với $y = 0$ thì phương trình vô nghiệm

Với $y \neq 0$. ĐK. $x \geq \sqrt{2}; -\frac{1}{2} \leq x^2y \leq \frac{9}{2}$. Khi đó phương trình tương đương với.

$$\sqrt{25 - (2x^2y - 4)^2} = \sqrt{y^2(x^2 - 2)} + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Theo AM - GM ta có. $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} \geq 1; \frac{3x^2}{4} \geq \frac{3}{2}(x \geq \sqrt{2}) \Rightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \geq 5$

Để ý thấy $\begin{cases} \sqrt{25 - (2x^2y - 4)^2} \leq 5 \\ \sqrt{y^2(x^2 - 2)} \geq 0 \end{cases}$. Nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{2}; y = 1$

Câu 77. Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + 24\sqrt{1+x} + 4\sqrt[4]{(1+2x)^3} = 24x + 12\sqrt{1-x} + 16$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ 1+2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 (*)$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 24\sqrt{1+x} + 4\sqrt[4]{(1+2x)^3} - 24x - 12\sqrt{1-x} - 16$

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x + \frac{12}{\sqrt{1+x}} + \frac{6}{\sqrt[4]{1+2x}} - 24 + \frac{6}{\sqrt{1-x}}$

Mặt khác theo AM - GM ta có.

$$1+2x + \frac{1}{\sqrt[4]{1+2x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+2x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+2x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+2x}} \geq 5 \Rightarrow 3x + \frac{6}{\sqrt[4]{1+2x}} \geq 6 \quad (1)$$

$$1+x + \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 3 \Rightarrow 3x + \frac{6}{\sqrt{1+x}} \geq 6 \quad (2)$$

Mặt khác ta lại có. $\frac{6}{\sqrt{1+x}} + \frac{6}{\sqrt{1-x}} \geq \frac{24}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \geq \frac{24}{2} = 12 \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) ta có. $6x + \frac{12}{\sqrt{1+x}} + \frac{6}{\sqrt[4]{1+2x}} + \frac{6}{\sqrt{1-x}} \geq 6 + 6 + 12 = 24$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x + \frac{12}{\sqrt{1+x}} + \frac{6}{\sqrt[4]{1+2x}} + \frac{6}{\sqrt{1-x}} \geq 24$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + \frac{12}{\sqrt{1+x}} + \frac{6}{\sqrt[4]{1+2x}} - 24 + \frac{6}{\sqrt{1-x}} \geq 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục và đơn điệu tăng trên tập số thực $x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Khi $x = 1$, thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn, vậy $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình.

Khi $0 < x < 1$ ta có $f(x) > f(0) = 0$, vậy phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Khi $x = 0$, thay vào phương trình thấy đúng nghiệm, vậy $x = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Khi $-\frac{1}{2} < x < 0$ thì ta có $f(x) < f(0) = 0$, vậy phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

| Phương pháp bất đẳng thức

Khi $x = -\frac{1}{2}$ thay vào phương trình thấy không thỏa mãn, vậy $x = -\frac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình.

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 78. Giải phương trình $\sqrt[4]{\frac{1}{2}+x} + \sqrt[4]{\frac{3}{2}-x} + \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)} = 3$

Giải

Điều kiện. $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

Theo AM – GM ta có. $\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+x+\frac{3}{2}-x\right)^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)} \leq 1$

Theo Cauchy – Shwarz ta có.

$$\sqrt[4]{\frac{1}{2}+x} + \sqrt[4]{\frac{3}{2}-x} \leq \sqrt{2\left(\sqrt{\frac{1}{2}+x} + \sqrt{\frac{3}{2}-x}\right)} \leq \sqrt{2\sqrt{2\left(\frac{1}{2}+x+\frac{3}{2}-x\right)}} = 2$$

Vậy $VT \leq VP$. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

Câu 79. Giải phương trình $\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + \sqrt{x}\right)^2 = 2\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) + 1$

Giải

Điều kiện. $x \in [0;1]$

Phương trình đầu tương đương.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{1-x} + x + 2\sqrt{\frac{x(x+1)}{1-x}} &= 2\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) + 1 \\ \Leftrightarrow x+1 + \frac{x}{1-x} + 2\sqrt{\frac{x(x+1)}{1-x}} &= 2\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)^2 - 2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) + 1 + \frac{1}{1-x} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{x}{1-x}} - 1\right)^2 + \frac{x}{1-x} &= 0 \end{aligned}$$

Do $x \in [0;1]$ nên $VT \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$

Câu 80. Giải phương trình

$$\sqrt{1+2013x} + \sqrt{1-2013x} = (1+2014x)\sqrt{1-2014x} + (1-2014x)\sqrt{1+2014x}$$

Giải

Ta có.

- $VT^2 = \left(\sqrt{1+2013x} + \sqrt{1-2013x}\right)^2 \geq 4\sqrt{1-(2013x)^2}$
- $x^2 \geq 0 \Rightarrow (2014x)^2 \geq (2013x)^2 \Rightarrow 1-(2014x)^2 \leq 1-(2013x)^2$
 $\Rightarrow 4\sqrt{1-(2013x)^2} \geq 4\sqrt{1-(2014x)^2} \Rightarrow VT^2 \geq 4\sqrt{1-(2014x)^2}$
- $VP^2 = \left((1-2014x)\sqrt{1+2014x} + (1+2014x)\sqrt{1-2014x}\right)^2$

$$\Rightarrow VP^2 \leq 2\left((1-2014x)^2(1+2014x) + (1-2014x)(1+2014x)^2\right)$$

Đặt $\begin{cases} a=1-2014x \\ b=1+2014x \end{cases} \Rightarrow a+b=2$

Ta sẽ đi chứng minh. $VP^2 \leq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow 2(a^2b + ab^2) \leq 4\sqrt{ab} \Rightarrow 2ab(a+b) \leq 4\sqrt{ab}$
 $\Rightarrow 4ab \leq 4\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab}(1-\sqrt{ab}) \geq 0$

Ta lại có. $\sqrt{ab} > 0 \Rightarrow 1-\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq 1$

Bất đẳng thức trên luôn đúng do $2 = a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq 1$

Vậy đẳng thức xảy ra khi $x=0$.

Câu 81. Giải phương trình $10x^3 + 16\sqrt{(1-x)^5} + 5x = \frac{45}{2}x^2 + 16\sqrt{(1+x)^5}$

Giải

Cách 1.

Điều kiện $x=0$. Phương trình đã cho tương đương với.

$$20x^3 - 45x^2 + 10x + 32\sqrt{(1-x)^5} - 32\sqrt{(1+x)^5} = 0$$

Xét $f(x) = 20x^3 - 45x^2 + 10x + 32\sqrt{(1-x)^5} - 32\sqrt{(1+x)^5}$

Suy ra $f'(x) = 10\left[(6x^2 - 9x + 1) - 8\left(\sqrt{(1-x)^3} + \sqrt{(1+x)^3}\right)\right]$

Ta sẽ chứng minh $f'(x) < 0$ với $-1 \leq x \leq 1$. Thật vậy

Vì $0 \leq x^2 \leq 1$ nên theo bất đẳng thức AM – GM và so sánh lũy thừa ta có

$$8\left(\sqrt{(1-x)^3} + \sqrt{(1+x)^3}\right) \geq 16\sqrt[4]{(1-x^2)^3} \geq 16(1-x^2)$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $16(1-x^2) > 6x^2 - 9x + 1 \Leftrightarrow 22x^2 - 9x - 15 < 0 (*)$

Bất đẳng thức (*) luôn đúng với $-1 \leq x \leq 1$. Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$.

Mặt khác $f(0) = 0$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cách 2.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng.

$$20x^3 + 32(1-x)^2\sqrt{1-x} + 10x = 45x^2 + 32(1+x)^2\sqrt{1+x}$$

Trường hợp 1 $0 \leq x \leq 1$.

Ta có $\sqrt{1-x} \leq 1$ nên $VT \leq 20x^3 + 32(1-x)^2 + 10$ (1) và $1 \leq \sqrt{1+x}$

Nên $45x^2 + 32(1+x)^2 \leq VP$ (2)

Ta chứng minh $20x^3 + 32(1-x)^2 + 10x \leq 45x^2 + 32(1+x)^2$ (3)

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\begin{aligned} 20x^3 + 32(x^2 - 2x + 1) + 10x &\leq 45x^2 + 32(x^2 + 2x + 1) \\ \Leftrightarrow x(20x^2 - 45x - 118) &\leq 0 \text{ (đúng, do } 0 \leq x \leq 1). \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được $VT \leq VP$,

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Trường hợp 2. $-1 \leq x \leq 0$

Ta có $\sqrt{1-x} \geq 1$ nên $VT \geq 20x^3 + 32(1-x)^2 + 10x$ (4)

| Phương pháp bất đẳng thức

Và $1 \geq \sqrt{1+x}$ nên $45x^2 + 32(1+x)^2 \geq VP$ (5)

Ta tiếp tục chứng minh $20x^3 + 32(1-x)^2 + 10x \geq 45x^2 + 32(1+x)^2$ (6)

Bất đẳng thức này tương đương với $20x^3 + 32(x^2 - 2x + 1) + 10x \geq 45x^3 + 32(x^2 + 2x + 1)$

$$\Leftrightarrow x(20x^2 - 45x - 118) \geq 0 \quad (\text{đúng, do } -1 \leq x \leq 0).$$

Cộng theo về các bất đẳng thức (4), (5) và (6) ta được $VT \geq VP$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$. Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cách 3.

Tập xác định. $-1 \leq x \leq 1$.

Khi $x = 1$, thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn, vậy $x = 1$ không là nghiệm của phương trình.

Khi $x = -1$, thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn, vậy $x = -1$ không là nghiệm của phương trình. Khi $-1 \leq x \leq 1$

Xét hàm số $f(x) = 10x^3 + 16\sqrt{(1-x)^5} + 5x - \frac{45}{2}x^2 - 16\sqrt{(1+x)^5}$

Ta có

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(x) &= 30x^2 - 16 \frac{5(1-x)^4}{2\sqrt{(1-x)^5}} + 5 - 45x - 16 \frac{5(1+x)^4}{2\sqrt{(1+x)^5}} = 30x^2 - 40\sqrt{(1-x)^3} + 5 - 45x - 40\sqrt{(1+x)^3} \\ \bullet \quad f''(x) &= 60 + 40 \frac{(1-x)^2}{2\sqrt{(1-x)^3}} - 45 - 40 \frac{3(1+x)^2}{2\sqrt{(1+x)^3}} = 60x + 60\sqrt{1-x} - 45 - 60\sqrt{1+x} \\ \bullet \quad f'''(x) &= 60 - \frac{30}{\sqrt{1+x}} - \frac{30}{\sqrt{1-x}} = 30 \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) \end{aligned}$$

Mặt khác theo AM - GM ta có.

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1(1+x)} \leq \frac{1+1+x}{2} = 1 + \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{1(1-x)} \leq \frac{1+1-x}{2} = 1 - \frac{x}{2} \quad (2)$$

Cộng các vế của các bất đẳng thức (1) và (2) lại ta được.

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 1 + \frac{x}{2} + 1 - \frac{x}{2} = 2$$

Mặt khác ta lại có. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq \frac{4}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \geq 2$.

Vậy ta có. $f'''(x) = 30 \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) \leq 0, \quad \forall x \in (-1; 1)$

$$\Rightarrow f''(x) < f''(1) = 60 - 45 - 60\sqrt{2} < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < f'(1) = 30 + 5 - 45 - 40\sqrt{2} = -40\sqrt{2} < 0$$

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên tập $x \in (-1; 1)$, mặt khác ta thấy $f(0) = 0$, vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 82. Giải phương trình $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = \sqrt[4]{\frac{4-x}{3}} + \sqrt[4]{\frac{2+x}{3}}$

Giải

Điều kiện. $0 \leq x \leq 2$

Cách 1. Đặt
$$\begin{cases} a = \sqrt[4]{x}; b = \sqrt[4]{2-x} \\ c = \sqrt[4]{\frac{4-x}{3}}; d = \sqrt[4]{\frac{2+x}{3}} \end{cases}$$

Vậy ta có $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$ và $0 \leq ab \leq cd$ (*)

Thay vào phương trình ta được $a + b = c + d \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + d^2 + 2cd \Rightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 + d^2$

Dấu bằng xảy ra khi $ab = cd$

Mặt khác ta có $a^2 + b^2 \geq c^2 + d^2 \Leftrightarrow a^4 + b^4 + 2a^2b^2 \geq c^4 + d^4 + 2c^2d^2 \Rightarrow a^4 + b^4 \geq c^4 + d^4$

Dấu bằng xảy ra khi $a^2b^2 = c^2d^2$

Theo (*) ta có phương trình nghiệm đúng khi và chỉ khi.
$$\begin{cases} ab = cd \\ a^2b^2 = c^2d^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Cách 2. Nếu ta sử dụng bất đẳng thức sau thì bài toán trở nên gọn nhẹ

Với mọi a, b, c không âm ta có
$$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c} \leq \sqrt[4]{\frac{a+2b}{3}} + \sqrt[4]{\frac{b+2c}{3}} + \sqrt[4]{\frac{c+2a}{3}}$$

Với bài toán trên ta có phương trình tương đương
$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{\frac{4-x}{3}} + \sqrt[4]{\frac{2+x}{3}}$$

Sử dụng bất đẳng thức trên với vế trái ta có ngay nó nhỏ hơn hoặc bằng vế phải

Đẳng thức xảy ra khi .

Kết luận. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $x = 1$.

Câu 83. Giải phương trình
$$\sqrt{2-x+\frac{3}{2-x}} + \sqrt{x+\frac{3}{x}} = 4$$

Giải

Điều kiện $x \in (0; 2)$

Ta có VT =
$$\sqrt{2-x+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2-x}} + \sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$\geq \sqrt[4]{4\sqrt{\frac{1}{(2-x)^2}}} + \sqrt[4]{4\sqrt{\frac{1}{x^2}}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2-x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) \geq \frac{4}{\sqrt[8]{(2-x)x}} \geq \frac{4}{\sqrt[8]{\frac{(2-x+x)^2}{4}}} = VP$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Câu 84. Giải phương trình
$$x(1+\sqrt{x^4+1}) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{7x^2-6x+1}$$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{3+\sqrt{2}}{7}$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có.
$$\begin{cases} x \geq \sqrt{2x-1} \\ \sqrt{x^4+1} \geq \sqrt{2x} \end{cases}$$

Cho nên $x(1+\sqrt{x^4+1}) \geq \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x^2}$. Bây giờ ta sẽ chứng minh

$$\sqrt{2x^2} \geq \sqrt{7x^2-6x+1} \Leftrightarrow 2x^4 \geq 7x^2-6x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x^2+4x-1) \geq 0$$

Đúng cho nên VT $\geq$ VP dấu bằng xảy ra khi $x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $x = 1$.

Câu 85. Giải phương trình
$$\sqrt[11]{x^2+x+1} + \sqrt[11]{x^2-x+1} = 2\sqrt[10]{x^2+1}$$

Giải

Ta có phương trình đã cho tương đương với

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\left(2^{\frac{10}{k+1}}\sqrt[k+1]{x^2+1}\right)^{k+1} = \left(\sqrt[k+1]{x^2+x+1} + \sqrt[k+1]{x^2-x+1}\right)^{k+1} \leq 2^{10}(2x^2+2) = 2^{11}(x^2+1) \Leftrightarrow x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tổng quát. $\sqrt[k+1]{x^2+x+1} + \sqrt[k+1]{x^2-x+1} \leq 2\sqrt[k+1]{x^2+1} \leq 2\sqrt[k]{x^2+1}$ với mọi k tự nhiên.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 86. Giải phương trình $x + \sqrt{\sqrt{-x-1} + \sqrt{1+2\sqrt{-x-1}}} = \sqrt{-x-1}$

Giải

Điều kiện $x \leq -1$

Đặt $\sqrt{-x-1} = t \geq 0$

Khi đó phương trình tương đương $\sqrt{t + \sqrt{2t+1}} = t^2 + t + 1$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$VT = \sqrt{t + \sqrt{2t+1}} \leq \sqrt{t + \frac{1+2t+1}{2}} = \sqrt{2t+1} \leq t+1 \leq t^2 + t + 1 = VP$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t = 0$ hay $x = -1$.

Câu 87. Giải phương trình $x + 2\sqrt{\frac{3x-1}{5}} = 4\sqrt[4]{\frac{x^4+4}{20}}$

Giải

$$\text{Ta có } 2\sqrt{\frac{3x-1}{5}} \leq \frac{3x-1}{5} + 1 = \frac{3x+4}{5}$$

$$\sqrt[4]{\frac{x^4+4}{20}} = \sqrt[4]{\frac{(x^4+4)(16+4)}{400}} \geq \sqrt[4]{\frac{(4x^2+4)^2}{400}} = 2\sqrt{\frac{x^2+1}{20}}$$

$$\text{Suy ra } x + \frac{3x+4}{5} \geq 8\sqrt{\frac{x^2+1}{20}} \Leftrightarrow 8x+4 \geq 40\sqrt{\frac{x^2+1}{20}}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 \geq 10\sqrt{\frac{x^2+1}{20}} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ 4x^2+4x+1 \geq 5x^2+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ (x-2)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Thử lại thấy thỏa mãn phương trình

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 88. Giải phương trình $3\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1+3x} = 3\sqrt[4]{1+2x} + 1$

Giải

Điều kiện. $x \geq -\frac{1}{3}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1+3x} - 1 &= 3\left(\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt[4]{1+x}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt[4]{1+3x} - 1}{\sqrt[4]{1+3x} + 1} = 3 \frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt[4]{1+x}}{\sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1+x}} \\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{\left(\sqrt[4]{1+3x} + 1\right)\left(\sqrt[4]{1+3x} + 1\right)} = \frac{3x}{\left(\sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1+x}\right)\left(\sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1+x}\right)} \end{aligned}$$

Ta quan tâm tới phương trình

$$\left(\sqrt[4]{1+3x} + 1\right)\left(\sqrt[4]{1+3x} + 1\right) = \left(\sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1+x}\right)\left(\sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1+x}\right) \quad (*)$$

Để ý các bất đẳng thức $\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1+2x} \geq 1 + \sqrt[4]{1+3x}$

Và $\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1+2x} \geq 1 + \sqrt[4]{1+3x}$

Suy ra $VP(*) \geq VT(*)$, $VT(*) = VP(*) \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 89. Giải phương trình. $\sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[4]{1+4x} = 3(x+1)$

Giải

Điều kiện. $x \geq -\frac{1}{4}$. Khi đó ta có.

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{1 \cdot (1+2x)} + \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (1+3x)} + \sqrt[4]{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1+4x)} \\ &\leq \frac{1+1+2x}{2} + \frac{1+1+1+3x}{3} + \frac{1+1+1+1+4x}{4} = 3(x+1) = VP \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi. $\sqrt{1+2x} = \sqrt[3]{1+3x} = \sqrt[4]{1+4x} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Câu 90. Giải phương trình. $\sqrt{\left(1 + \frac{x+6}{\sqrt{4x-3}}\right)} \left(1 + \frac{9}{\sqrt{x+6}}\right) = \frac{16}{\sqrt{1+\sqrt{4x-3}}}$

Giải

Đặt. $a = \sqrt{x+6}$, $b = \sqrt{4x-3}$ ($a, b > 0$)

Phương trình đã cho trở thành. $\sqrt{1 + \frac{a^2}{b}} \left(1 + \frac{9}{a}\right) = \frac{16}{\sqrt{1+b}} \Leftrightarrow \sqrt{(1+b) \left(1 + \frac{a^2}{b}\right)} = \frac{16a}{a+9}$ (1)

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có.

$$VT(1) \geq 1+a = \frac{(a-3)^2}{a+9} + \frac{16a}{a+9} \geq \frac{16a}{a+9} = VP(1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 3 \Rightarrow x = 3$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Câu 91. Giải phương trình. $12\sqrt{4x-x^2} \sin^2 \frac{x+y}{2} + 8\cos(x+y) - 13 - 4\cos^2(x+y) = 0$

Giải

Dễ thấy $\sqrt{4x-x^2} \leq 2$

Đánh giá

$$\begin{aligned} &\sqrt{4x-x^2} \sin^2 \frac{x+y}{2} + 8\cos(x+y) - 13 - 4\cos^2(x+y) \\ &\leq 12(1 - \cos(x+y)) + 8\cos(x+y) - 13 - 4\cos^2(x+y) = -(2\cos(x+y) + 1)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = 2 \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Câu 92. Giải phương trình $6\sqrt[3]{x^4+1} + 6\sqrt{x^3+1} = 7x^2 + 12$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$6\sqrt{x^3+1} = 3 \cdot 2 \sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} \leq 3x^2 + 6$$

Từ phương trình ta có ngay

$$7x^2 + 12 \leq 6\sqrt[3]{x^4+1} + 3x^2 + 6 \Leftrightarrow 2x^2 + 3 \leq 3\sqrt[3]{x^4+1} \Leftrightarrow x^2(8x^4 + 9x^2 + 54) \leq 0 \Rightarrow x = 0$$

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 93. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt[3]{7x+1} + \sqrt[4]{15x+1} + \sqrt[5]{31x+1} + \sqrt[6]{63x+1} = 5x^6 + 5$

Giải

Điều kiện $x \in \left[-\frac{1}{63}; +\infty\right)$

- Nếu $x \in \left[-\frac{1}{63}; 0\right)$ thì $VT < 5 < VP$ suy ra phương trình vô nghiệm
- Nếu $x \in [0; 1)$ thì

$$VT \geq \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^3} + \sqrt[4]{(x+1)^4} + \sqrt[5]{(x+1)^5} + \sqrt[6]{(x+1)^6} = 5(x+1) \geq VP$$

- Nếu $x \in [1; +\infty)$, tương tự ta có $VT \leq 5(x+1) \leq VP$

Từ đó, ta dễ dàng thu được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0; 1\}$.

Câu 94. Giải phương trình. $\sqrt[6]{x+2} \sqrt[3]{\frac{x+5}{2}} = \sqrt[4]{2x+1} \sqrt[4]{2x+1}$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{1}{4}$

- **Trường hợp 1.** $x \geq 1$. Ta có.

$$VT = \sqrt[6]{x+2} \sqrt[3]{\frac{x+5}{2}} \leq \sqrt[6]{x+2} \sqrt[3]{x+2} = x+2 \leq \sqrt[4]{2x+1} = \sqrt[4]{2x+1} \sqrt[4]{2x+1} \leq \sqrt[4]{2x+1} \sqrt[4]{4x-1} = VP$$

- **Trường hợp 2.** $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$. Tương tự $VT \geq VP \Rightarrow VT = VP \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 95. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2-3x+1} + \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+3x+1}}{x^2+2} = 2$.

Giải

$$\text{Theo bất đẳng thức AM - GM cho VT ta có } \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2-x+1} \leq \frac{x^2-x+2}{2} \\ \sqrt{x^2-3x+1} \leq \frac{x^2-3x+2}{2} \\ \sqrt{x^2+x+1} \leq \frac{x^2+x+2}{2} \\ \sqrt{x^2+3x+1} \leq \frac{x^2+3x+2}{2} \end{array} \right. \Rightarrow VT \leq 2x^2+4 \leq VP$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$.

Câu 96. Giải phương trình $\cos x \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 3x \sqrt{\frac{1}{\cos 3x} - 1} = 1$

Giải

Phương trình đầu tương đương $\cos x \sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos x}} + \cos 3x \sqrt{\frac{1-\cos 3x}{\cos 3x}} = 1$

Ta có điều kiện. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1-\cos x}{\cos x} \geq 0 \\ \frac{1-\cos 3x}{\cos 3x} \geq 0 \end{array} \right.$ mà $1-\cos x \geq 0$ và $1-\cos 3x \geq 0 \Rightarrow \cos x, \cos 3x \geq 0$

Ta có $\cos x \sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos x}} \leq \frac{\cos x}{2} \left(\frac{1-\cos x}{\cos x} + 1 \right) = \frac{1}{2}$

Cũng tương tự $\cos 3x \sqrt{\frac{1-\cos 3x}{\cos 3x}} \leq \frac{\cos 3x}{2} \left(\frac{1-\cos 3x}{\cos 3x} + 1 \right) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow VT \leq 1 \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi. } \begin{cases} \cos 3x \sqrt{\frac{1-\cos 3x}{\cos 3x}} = \frac{1}{2} \\ \cos x \sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos x}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 3x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ hay } 3x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + t2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{3} + t2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + t2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{3} + t2\pi \end{cases} \Rightarrow \text{giao lại trên đường tròn lượng giác.}$$

Câu 97. Giải phương trình $\sqrt{2x+1} + \sqrt{17-2x} = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 22$

Giải

Ta có $\sqrt{2x+1} + \sqrt{17-2x} - 6 = (x^2+1)(x-4)^2 \geq 0$

Lại có $\begin{cases} \frac{3\sqrt{2x+1}}{3} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2x+1+9}{2} \right) = \frac{x+5}{3} \\ \frac{3\sqrt{17-2x}}{3} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{17-2x+9}{3} \right) = \frac{13-x}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{17-2x} \leq 6 \Rightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{17-2x} - 6 \leq 0$$

Từ đó ta có $\sqrt{2x+1} + \sqrt{17-2x} - 6 = 0 \Rightarrow x = 4$

Câu 98. Giải phương trình $5\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} + \frac{9(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})^3}{2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}} = 15$

Giải

Ta có $2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} > 0$; $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} > 0$, áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned} & 5\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} + \frac{9(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})^3}{2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}} \\ &= 5\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} + \frac{243}{(2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})^3} \\ &= (2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}) + 3(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}) + \frac{243}{(2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})^3} \\ &\geq \sqrt[5]{\frac{2432\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})^3}{(2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})^3}} = 15. \end{aligned}$$

Câu 99. Giải phương trình $\sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} = \sqrt[4]{1+4x} + \sqrt[5]{1+5x}$

Giải

Điều kiện. $x \geq -\frac{1}{4}$

$$\text{Ta có } \sqrt[4]{1+4x} \leq \sqrt[4]{1+4x+4x^2} = \sqrt[4]{(1+2x)^2} = \sqrt{|1+2x|} = \sqrt{1+2x} \Rightarrow \sqrt{1+2x} \geq \sqrt[4]{1+4x} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự. } \sqrt[3]{1+3x} \geq \sqrt[5]{1+5x} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{1+\frac{3}{5}(t^5-1)} \geq t \quad (t = \sqrt[5]{1+5x}) \Leftrightarrow 3t^5 - 5t^3 + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(3t^3+6t^2+4t+2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 \left[t^2(3t+4) + 2(t+1)^2 \right] \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall t > -1 \Rightarrow (2) \text{ luôn đúng } \forall x \geq -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} \geq \sqrt[4]{1+4x} + \sqrt[5]{1+5x}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 100. Giải phương trình $\frac{x^2(x^2+x-\sqrt{x^2-1}-2)}{x+\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}} = \frac{\sqrt{x^3-x^2\sqrt{x^2-1}}-1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

Giải

Điều kiện của x là $x \geq 1$. Dễ thấy $t = \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}} \leq 1$. Phương trình trở thành

$$\frac{x^2(x^2+t^2-2)}{x+t} = \frac{xt-1}{t^2} \Leftrightarrow \frac{xt-1}{x^2t^2} = x+t - \frac{2(xt-1)}{x+t}$$

Ta có thể đặt $\begin{cases} s = x+t \\ p = xt \end{cases}$ để giải tiếp hoặc sử dụng bất đẳng thức $(x-1)(t-1) \leq 0 \Leftrightarrow xt+1 \leq x+t$.

$$\text{Khi đó } x+t-2\frac{(xt+1)}{x+t} \geq (xt+1) - \frac{2(xt+1)}{(xt+1)} = xt-1 \Rightarrow \frac{xt-1}{x^2t^2} \geq xt-1 \Leftrightarrow \frac{(xt+1)(xt-1)^2}{x^2t^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ t=1 \end{cases}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Câu 101. Giải phương trình $x^2+4x+5 - \frac{3x}{x^2+x+1} = (x-1)\left(1-2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+x+1}}\right)$

Giải

Vì phương trình có nghiệm kép $x = 2$ nên ta tìm cách khử cái căn $\sqrt{\frac{1-x}{x^2+x+1}}$.

Nhận thấy mẫu ở vế trái có chứa x^2+x+1 nên ta sẽ lấy.

$$\sqrt{\frac{1-x}{x^2+x+1}} = \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2+x+1}}{x^2+x+1} \leq \frac{1-x+x^2+x+1}{2(x^2+x+1)} = \frac{x^2+2}{2(x^2+x+1)}$$

Suy ra.

$$\begin{aligned}
 & x^2 + 4x + 5 - \frac{3x}{x^2 + x + 1} - (x-1) \left(1 - 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2 + x + 1}} \right) \\
 &= x^2 + 3x + 6 - \frac{3x}{x^2 + x + 1} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2 + x + 1}} \\
 &\geq x^2 + 3x + 6 - \frac{3x}{x^2 + x + 1} + \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{x^2 + x + 1} = (x+2)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Câu 102. Giải phương trình $4x^3(x^2 + 3x + 2) = (2x^4 + 14x^3 + 13x^2 + 6x + 1)(\sqrt{2x+3} - 1)$

Giải

Phương trình tương đương

$$\frac{1}{2}(2x-1-\sqrt{2x+3})(2x^3+8x^2+4x+1+x(2x+1)\sqrt{2x+3})(\sqrt{2x+3}-1)^2=0(*)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có .

$$2x(2x+1)\sqrt{2x+3} \geq \frac{(2x+1)^2 + 4x^2(2x+3)}{2} = -\left(4x^3 + 8x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra } 2x^3 + 8x^2 + 4x + 1 + x(2x+1)\sqrt{2x+3} \geq 4x^2 + 3x + \frac{3}{4} = 4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{16} \geq 0$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow (2x-1-\sqrt{2x+3})(\sqrt{2x+3}-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4} \\ x = -1 \end{cases}$$

Câu 103. Giải phương trình $4x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 8 = (x^2 + 5)\sqrt{2x^4 + 2}$

Giải

Phương trình có nghiệm bội kép $x=1$, do đó ta tìm được nhân tử là $(\sqrt{2x^4+2}-2x)$

Dễ thấy $\sqrt{2x^4+2} \geq 2x$ tuy nhiên thành thử ta thấy .

$$4x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 8 - (x^2 + 5)\sqrt{2x^4 + 2} \geq 0$$

Điểm rơi là $x=1$ nên $(x^2+5)=\sqrt{2x^4+2}$ vậy áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$\begin{aligned}
 (x^2+5)\sqrt{2x^4+2} &\leq \frac{(x^2+5)^2 + 9(2x^4+2)}{6} \\
 \Rightarrow 4x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 8 &\leq \frac{(x^2+5)^2 + 9(2x^4+2)}{6} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{6}(5x^2-2x+5)(x-1)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow x=1
 \end{aligned}$$

Câu 104. Giải phương trình $2x^3 - 2x^2 + 6x = (x^3 + 5x + 2)\sqrt{x-1}$

Giải

Phương trình tương đương $(\sqrt{x-1}-1)(x^3-x^2+5x+1-(x^2+1)\sqrt{x-1})=0$

- Nếu $\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x=2$.
- Nếu $x^3-x^2+5x+1=(x^2+1)\sqrt{x-1}$. Thành thử ta thấy cần phải chứng minh

$$x^3 - x^2 + 5x + 1 - (x^2 + 1)\sqrt{x-1} > 0$$

| Phương pháp bất đẳng thức

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\sqrt{x-1} \leq \frac{x-1+1}{2} = \frac{x}{2}$. Do đó

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 5x + 1 - (x^2 + 1)\sqrt{x-1} &\geq x^3 - x^2 + 5x + 1 - \frac{x}{2}(x^2 + 1) \\ &= \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{9}{2}x + 1 = \frac{1}{2}(x-1)(x^2 - x + 8) + 5 > 0 \end{aligned}$$

Câu 105. Giải bất phương trình $\frac{x+3}{1-x^2} + (x^2-1)(x-1) = \sqrt{6x^2+9} + \sqrt{1-x^2}$

Giải

Điều kiện $x \in (-1; 1)$.

Ta có đánh giá như sau $\begin{cases} \sqrt{6x^2+9} \leq x^2+3 \\ (x^2-1)(x-1) = x^2(x+1) + (1-2x^2-x) \geq 1-2x^2-x \end{cases}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\sqrt{1-x^2} \leq \frac{2-x^2}{2}$. Khi đó $\begin{cases} VT \geq \frac{x+3}{1-x^2} + 1 - 2x^2 - x \\ VP \leq \frac{x^2}{2} + 4 \end{cases}$.

Xét biểu thức $\frac{x+3}{1-x^2} + 1 - 2x^2 - x - \left(\frac{x^2}{2} + 4\right) = \frac{x^2(5x^2+2x+1)}{2(1-x^2)} \geq 0$

Vì vậy $VT \geq VP, \forall x \in (-1; 1)$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy $x = 0$ là nghiệm của phương trình.

Câu 106. Giải phương trình $\sqrt{4-x^2} + 2\sqrt[3]{x^4-4x^3+4x^2} = (x-1)^2 + 1 - |x|$

Giải

Điều kiện $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Phương trình đã cho tương đương $|x| + \sqrt{4-x^2} = x^2 - 2x - 2\sqrt[3]{(x^2-2x)^2} + 2 (*)$

Ta có $\left(|x| + \sqrt{4-x^2}\right)^2 = 4 + 2|x|\sqrt{4-x^2} \geq 4, \forall x \in [-2; 2]$

Từ đó ta suy ra $|x| + \sqrt{4-x^2} \geq 2, \forall x \in [-2; 2]$.

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2-2x} (t \in [-1; 2])$ thì vế phải của phương trình (*) lúc này là

$$f(t) = t^3 - 2t^2 + 2, t \in [-1; 2]$$

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases}$, mặt khác $f(-1) = -1, f(0) = 2, f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{22}{27}, f(2) = 2$

Từ đây dễ dàng chỉ ra được $f(t) \leq 2, \forall t \in [-1; 2] \Rightarrow VT \geq VP$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0; x = \pm 2$.

Câu 107. Giải phương trình $(x^2+x+1)\sqrt{2+\frac{1}{x}} + \left(x^2+\frac{1}{x}+2\right)\sqrt{x+1} = 4x\sqrt{2x+\frac{1}{x}} + 3$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2 + \frac{1}{x} \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ 2x + \frac{1}{x} + 3 \geq 0 \end{cases} . \text{ Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{2 + \frac{1}{x}} \geq 0 \\ b = \sqrt{x + 1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow ab = \sqrt{\frac{(2x+1)(x+1)}{x}} = \sqrt{2x + \frac{1}{x} + 3}$$

Phương trình lúc này trở thành $(x^2 + b^2)a + (x^2 + a^2)b = 4abx$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned} \bullet & \begin{cases} x^2 + b^2 \geq 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x^2 + b^2)a \geq 2|x|ab \geq 2xab \\ \bullet & \begin{cases} x^2 + a^2 \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x^2 + a^2)b \geq 2|x|ab \geq 2xab \end{aligned}$$

Cộng lại ta có $VT \geq VP$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 108. Giải phương trình

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{3x}{2(1+\sqrt{1+3x})} + \frac{1}{1+\sqrt{1+5x}} = \frac{2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{4}$$

Giải

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1+5x} \leq \sqrt{2(1+x+1+5x)} = 2\sqrt{1+3x}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{1}{1+\sqrt{1+5x}} \geq \frac{4}{2+\sqrt{1+x}+\sqrt{1+5x}} \geq \frac{4}{1+\sqrt{1+3x}}$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{1+3x}, \text{ khi đó ta có } VT \geq \frac{2}{1+a} + \frac{a^2-1}{2(1+a)} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2a-2}{2(1+a)} = 1$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta lại có

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{2(1+x+1-x)} = 2$$

$$\text{Khi đó } 4.VP = (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 \leq 2^2 + 2 - 2 = 4$$

Vậy ta được $VT \geq 1 \geq VP$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Câu 109. Giải phương trình $\left(x + \sqrt{\frac{x+6}{4-x}}\right)\sqrt{4\sqrt{4-x}-\sqrt{x+6}} = (x-1)\sqrt{6\sqrt{4-x}+\sqrt{x+6}}$

Giải

Điều kiện $-6 \leq x < 4$

Đặt $y = \sqrt{\frac{x+6}{4-x}}; z = \sqrt{\frac{y+6}{4-y}}$. Chia cả 2 vế cho $\sqrt{4-x}$ ta được

$$\left(x + \sqrt{\frac{x+6}{4-x}}\right)\sqrt{4 - \sqrt{\frac{x+6}{4-x}}} = (x-1)\sqrt{6 + \sqrt{\frac{x+6}{4-x}}}$$

$$\text{Khi đó ta có } (x+y) = (x-1)z \Leftrightarrow x+y+z = xz$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\frac{t+6}{4-t}}$ là hàm đồng biến, ta có hệ
$$\begin{cases} x+y+z=xz \\ y=\sqrt{\frac{x+6}{4-x}} \\ z=\sqrt{\frac{y+6}{4-y}} \end{cases}$$

Trường hợp 1. $x \geq y$, do $f(t) = \sqrt{\frac{t+6}{4-t}}$ là hàm đồng biến nên $x \geq y \geq z$

Ta có $x \geq y \Leftrightarrow x \geq \sqrt{\frac{x+6}{4-x}} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0 \Rightarrow x \in (-6; -1] \cup [2; 3] \Rightarrow t \in (0; 1] \cup [2; 3]$

Mà $z \leq y \Rightarrow \sqrt{\frac{y+6}{4-y}} \leq y \Rightarrow y \in (0; 2] \cup [3; +\infty)$.

Kết hợp với điều kiện ta có $y \in (0; 1] \cup \{2; 3\}$

Nếu $y = 2$ thì không thỏa mãn.

Nếu $y = 3$ thì $x = z = 3$

Nếu $y \in (0; 1] \Rightarrow x \in (-6; -1]$ trái với điều giả sử $x \geq y$

Trường hợp 2. $x \leq y$, xét tương tự!

Câu 110. Giải phương trình $14x^2 - 10x + 2 = (4x-1) \cdot \sqrt[3]{2(2x-1)(3x-1)^2}$

Giải

Nhận thấy $x = \frac{1}{2}$ không thỏa mãn phương trình.

Xét $x \neq \frac{1}{2}$ phương trình tương đương $14x^2 - 10x + 2 = 2(4x-1)(2x-1) \sqrt[3]{\frac{(3x-1)^2}{4(2x-1)^2}}$

Vì $14x^2 - 10x + 2 > 0 \Rightarrow (4x-1)(2x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{4} \end{cases}$

- **Trường hợp 1.** $x > \frac{1}{2}$ khi đó theo AM - GM ta có

$$\begin{aligned} 14x^2 - 10x + 2 &= (4x-1) \cdot \sqrt[3]{2(2x-1)(3x-1)^2} \leq (4x-1) \cdot \frac{2(2x-1) + 3x-1 + 3x-1}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

- **Trường hợp 2.** $x < \frac{1}{4}$ khi đó theo AM - GM ta có

$$\sqrt[3]{\frac{(3x-1)^2}{4(2x-1)^2}} \leq \frac{\frac{(3x-1)^2}{4(2x-1)^2} + 1 + 1}{3} = \frac{41x^2 - 38x + 9}{12(2x-1)^2}$$

$$\text{Khi đó ta có } 14x^2 - 10x + 2 \leq \frac{(4x-1)(2x-1)(41x^2 - 38x + 9)}{6(2x-1)^2} \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(4x-3)(2x-1)}{6(2x-1)^2} \leq 0.$$

Dễ thấy bất phương trình trên vô nghiệm
 Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

Câu 111. Giải phương trình $\frac{x}{\sqrt{33x^2 - 32x + 8}} + \frac{2(2x-1)}{\sqrt{20x^2 - 12x + 1}} = 1$

Giải

Điều kiện $x > \frac{1}{2}; x < \frac{1}{10}$.

- **Trường hợp 1.** $x > \frac{1}{2}$ khi đó theo AM – GM ta có

$$\frac{2(2x-1)}{\sqrt{20x^2 - 12x + 1}} = \frac{6(2x-1)}{\sqrt{9(2x-1)(10x-1)}} \geq \frac{12(2x-1)}{9(2x-1) + (10x-1)} = \frac{6(2x-1)}{14x-5}.$$

Do đó $VT \geq \frac{x}{\sqrt{33x^2 - 32x + 8}} + \frac{6(2x-1)}{14x-5} = 1 + \frac{x}{\sqrt{33x^2 - 32x + 8}} - \frac{2x+1}{14x-5}.$

Ta sẽ đi chứng minh $\frac{x}{\sqrt{33x^2 - 32x + 8}} \geq \frac{2x+1}{14x-5}$

$$\Leftrightarrow (14x-5)x \geq (2x+1)\sqrt{33x^2 - 32x + 8} \Leftrightarrow (x-1)^2(2x-1)(32x+8) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do đó ta có điều phải chứng minh!

Vậy $VT \geq 1 \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$

- **Trường hợp 2.** $x \leq 0$ khi đó $VT < 0 < 1$, vậy phương trình vô nghiệm.
- **Trường hợp 3.** $x \in \left(0; \frac{1}{10}\right)$, ta có $\sqrt{33x^2 - 32x + 8} = \sqrt{(2-5x)^2 + (x-1)(8x-4)} \geq 2-5x$.

Do đó $\frac{x}{\sqrt{33x^2 - 32x + 8}} \leq \frac{x}{2-5x} = 1 + \frac{6x-2}{2-5x} < 1$. Vậy $VT < 1$.

Trường hợp này vô nghiệm

Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

Câu 112. Giải phương trình $\sqrt{3\left(1 + \frac{1}{x^2} + x^2\right)} = \left(x + \frac{2}{x}\right)\sqrt{x^2 + 2}$

Giải

Phương trình tương đương $3(x^4 + x^2 + 1) = x(x^2 + 2)\sqrt{3(x^2 + 2)}.$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $x\sqrt{3(x^2 + 2)} = \sqrt{3x} \cdot \sqrt{x^2 + 2} \leq \frac{3x^2 + x^2 + 2}{2} = 2x^2 + 1.$

Khi đó ta được $3(x^4 + x^2 + 1) \leq (x^2 + 2)(2x^2 + 1) \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1(L) \end{cases}.$

Câu 113. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = (1 + |x|)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

Giải

Điều kiện $x \in [-1; 1]$. Phương trình tương đương

$$x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + x^2 + 1} = (1 + |x|)^2 (1 + \sqrt{1-x^2}).$$

Đặt $a = |x|, a \in [0; 1]$ ta được $a^2 + 1 + \sqrt{a^4 + a^2 + 1} = (1 + a)^2 (1 + \sqrt{1-a^2}).$

Đặt $b = a^2 \Rightarrow a \geq b \Rightarrow VT \geq (b+1)^2 (1 + \sqrt{1-b}).$

| Phương pháp bất đẳng thức

Ta sẽ đi chứng minh $(b+1)^2(1+\sqrt{1-b}) \geq b+1+\sqrt{b^2+b+1}$.

$$\text{Ta có } \sqrt{b^2+b+1} = \sqrt{\left(\frac{b^2+b+2}{2}\right)^2 - \frac{b^2(b+1)^2}{4}} \leq \frac{b^2+b+2}{2}.$$

$$\text{Suy ra } (1+b)^2(1+\sqrt{1-b}) \geq b+1 + \frac{b^2+b+2}{2} = \frac{b^2+3b+4}{2}.$$

Từ đó ta có $c(1-c)(8-2c^3-3c^2+5c) \geq 0(*)$, với $c = \sqrt{1-b}, c \in [0;1]$.

$$\text{Ta có } 8-2c^3-3c^2+5c = 8+c(1-c)(5+2c) \geq 8.$$

Vậy (*) luôn đúng. Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} c=0 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow x=1 \\ c=1 \Rightarrow b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$.

Thử lại ta thấy $x=0$ thỏa mãn.

Câu 114. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{8x-2x^2} - 2 = 3\sqrt{\frac{x(x+1)^2}{6x-x^2-1}}$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ 6x-x^2-1 \geq 0 \\ 8x-2x^2-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2-\sqrt{3} \leq x \leq 2+\sqrt{3}.$$

Ta dễ dàng nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \sqrt{x} + \sqrt{8x-2x^2} - 2 = \sqrt{x} + \sqrt{4x-2(x-1)^2} \leq \sqrt{x} + \sqrt{4x} \leq 3\sqrt{x}. \\ \bullet \quad & 3\sqrt{\frac{x(x+1)^2}{6x-x^2-1}} = 3\sqrt{x \left(\frac{x^2+2x+1}{6x-x^2-1} \right)} = 3\sqrt{x \left(1 + \frac{2(x-1)^2}{6x-x^2-1} \right)} \geq 3\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Vậy $VT \leq VP$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Câu 115. Giải phương trình $(1+x)\sqrt{1+x} + (1-x)\sqrt{1-x} - 1 = (\sqrt{x^2+1} - 2)^2$

Giải

Điều kiện $x \in [-1;1]$.

Cách 1. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1+x)^3} + 1 \geq 3\sqrt[3]{(1+x)^3} \cdot \sqrt[3]{(1+x)^3} \cdot 1 = 3(1+x) \\ \bullet \quad & \sqrt{(1-x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} + 1 \geq 3\sqrt[3]{(1-x)^3} \cdot \sqrt[3]{(1-x)^3} \cdot 1 = 3(1-x) \end{aligned}$$

Cộng 2 vế của bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} 2((1+x)\sqrt{1+x} + (1-x)\sqrt{1-x} + 1) & \geq 3(1+x+1-x) = 6 \\ \Leftrightarrow (1+x)\sqrt{1+x} + (1-x)\sqrt{1-x} & \geq 2 \Rightarrow VT \geq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Xét bất phương trình } (\sqrt{x^2+1} - 2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x^2+4)^2 \leq 16(1+x^2) \Leftrightarrow x^2(x^2-8) \leq 0$$

Dễ thấy bất đẳng thức cuối luôn đúng, vậy ta có $VT \geq 1 \geq VP$

Cách 2. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{1+x} \\ b = \sqrt{1-x} \end{cases} (a, b \geq 0) \Rightarrow a^2 + b^2 = 2, ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = 1$

$$\text{Ta có } VT = a^3 + b^3 = \sqrt{a^6 + b^6 + 2a^3b^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2) + 2a^2b^2} = \sqrt{8 + 2a^3b^3 - 6a^2b^2} \\
 &= \sqrt{8 + 2a^2b^2(ab - 3)} \geq \sqrt{8 + 2 \cdot 1^2(1 - 3)} = 2
 \end{aligned}$$

Vậy $VT \geq 2$. Xét bất phương trình $(\sqrt{x^2 + 1} - 2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x^2 + 4)^2 \leq 16(1 + x^2) \Leftrightarrow x^2(x^2 - 8) \leq 0$

Dễ thấy bất đẳng thức cuối luôn đúng, vậy ta có $VT \geq 1 \geq VP$

Hoặc ta cũng có thể sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$(a^3 + b^3)(a^3 + b^3)(1 + 1) \geq (a^2 + b^2)^3 \Rightarrow a^3 + b^3 \geq 2$$

Khi đó có kết quả tương tự.

Câu 116. Giải bất phương trình $\frac{2}{\sqrt{4x + \sqrt{x} + 4}} + \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x + 4}} < 1$

Giải

Điều kiện $x \geq 0$.

Ta có $1 > \frac{2}{\sqrt{4x + \sqrt{x} + 4}} + \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x + 4}} \geq \frac{2}{\sqrt{4x + \sqrt{x} + 4}} \Leftrightarrow \sqrt{x}(4\sqrt{x} + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $4x + \sqrt{x} + 4 \leq \sqrt{9(4x^2 + x + 4)}$

$$\Rightarrow 1 > \frac{2}{\sqrt{4x + \sqrt{x} + 4}} + \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x + 4}} \geq \frac{2}{\sqrt[4]{9(4x^2 + x + 4)}} + \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x + 4}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{3(4x^2 + x + 4)}}$$

$$\Leftrightarrow 12(x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x > 0, x \neq 1$.

Câu 117. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 8}} + \frac{1}{\sqrt{8x^2 + 1}} = \frac{x - \frac{1}{3}}{x^2}$

Giải

Phương trình tương đương với $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}} + \frac{x}{\sqrt{8x^2 + 1}} + \frac{1}{3x} = 1$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\bullet \quad \sqrt{x^2 + 8} = \frac{\sqrt{(x + 2)^2(x^2 + 8)}}{x + 2} \leq \frac{2x^2 + 4x + 12}{2(x + 2)} = \frac{x^2 + 2x + 6}{x + 2}$$

$$\bullet \quad \sqrt{8x^2 + 1} = \frac{\sqrt{(2x + 1)^2(8x^2 + 1)}}{2x + 1} \leq \frac{12x^2 + 4x + 2}{2(2x + 1)} = \frac{6x^2 + 2x + 1}{2x + 1}$$

$$\Rightarrow VP = VT \geq x \left(\frac{x + 2}{x^2 + 2x + 6} + \frac{2x + 1}{6x^2 + 2x + 1} \right) + \frac{1}{3x}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq x \left(\frac{x + 2}{x^2 + 2x + 6} + \frac{2x + 1}{6x^2 + 2x + 1} \right) + \frac{1}{3x} \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2(6x^3 + 33x^2 + 8x + 6)}{3x(x^2 + 2x + 6)(6x^2 + 2x + 1)} \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình!

Câu 118. Giải phương trình $(8x - 13)x^2 = (x + 1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} - 7x$

Giải

Phương trình tương đương

$$x(8x^3 - 13x^2 + 7) = (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 7 = \frac{(x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2}}{x} (*)$$

Điều kiện $\frac{(x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2}}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right)$

- **Trường hợp 1.** Xét $x \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right)$. Khi đó theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$8x^3 - 13x^2 + 7x = (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} \leq (x+1)\frac{1+1+3x^2-2}{3} = (x+1)x^2$$

$$\Leftrightarrow 7x^3 - 14x^2 + 7x \leq 0 \Leftrightarrow 7x(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$$

- **Trường hợp 2.** Xét $x \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; 0\right)$, phương trình (*) tương đương

$$8x^3 - 13x^2 + 7x = (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} \Leftrightarrow 4(8x^3 - 13x^2 + 7x) = 4(x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow 4(8x^3 - 13x^2 + 7x) + 5(x+1) = (x+1)(4\sqrt[3]{3x^2 - 2} - 5)$$

$$\Leftrightarrow 32x^3 - 52x^2 + 33x + 5 = (x+1)(4\sqrt[3]{3x^2 - 2} - 5)$$

$$\Leftrightarrow (8x+1)(4x^2 - 7x + 5) = (x+1)\frac{3(8x+1)(8x-1)}{16(\sqrt[3]{3x^2 - 2})^2 - 20\sqrt[3]{3x^2 - 2} + 25}$$

$$\Leftrightarrow (8x+1)\left(4x^2 - 7x + 5 - \frac{3(x+1)(8x-1)}{16(\sqrt[3]{3x^2 - 2})^2 - 20\sqrt[3]{3x^2 - 2} + 25}\right) = 0$$

Ta nhận thấy rằng

$$4x^2 - 7x + 5 > 0; 3(x+1)(8x-1) > 0 \Rightarrow \frac{3(x+1)(8x-1)}{16(\sqrt[3]{3x^2 - 2})^2 - 20\sqrt[3]{3x^2 - 2} + 25} > 0, \forall x \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; 0\right).$$

Vậy trong trường hợp này phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{8}$.

- **Trường hợp 3.** Xét $x \in (-\infty; -1)$, phương trình (*) tương đương

$$8x^3 - 13x^2 + 7x - (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} = 0$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$8x^3 - 13x^2 + 7x - (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} \leq 8x^3 - 13x^2 + 7x - x^2(x+1) = 7x(x-1)^2 < 0.$$

Vậy phương trình vô nghiệm trong trường hợp này.

Câu 119. Giải bất phương trình $\frac{x^4 + x + 1 + 32\sqrt[4]{x^3 - 4x^2 + 7x - 12}}{x^4 + x^2 + 16x - 11} \leq 1$

Giải

Bất phương trình tương đương $1 + \frac{12 - x^2 - 15x + 32\sqrt[4]{x^3 - 4x^2 + 7x - 12}}{x^4 + x^2 + 16x - 11} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{12 - x^2 - 15x + 32\sqrt[4]{x^3 - 4x^2 + 7x - 12}}{x^4 + x^2 + 16x - 11} \leq 0$$

Ta có $x^4 + x^2 + 16x - 11 > 0, \forall x \geq 3$. Khi đó bất phương trình tương đương

$$12 - x^2 - 15x + 32\sqrt{x^3 - 4x^2 + 7x - 12} \leq 0$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned} 3\sqrt[4]{x^3 - 4x^2 + 7x - 12} &= 32\sqrt[4]{(x-3)(x^2 - x + 4)} = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{16(x-3)} \sqrt[4]{(x^2 - x + 4)} \\ &\leq x^2 - x + 4 + 16(x-3) + 32 \end{aligned}$$

Khi đó $VT \leq 12 - x^2 - 15x + x^2 + x + 4 + 16(x-3) + 32 = 0$, luôn đúng

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [3; +\infty)$.

Câu 120. Giải phương trình $\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{x+3}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1})^2} = 1$

Giải

Điều kiện $x \geq 1$.

- **Trường hợp 1.** Xét $2 < x < 9$ ta có 2 đánh giá sau $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{x+3}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1})^2} > \frac{3}{10} \end{cases}$

Bạn đọc tự chứng minh!

Do đó $VT > \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{10} > 1 = VP, \forall x \in (2; 9)$. Khi đó phương trình vô nghiệm.

- **Trường hợp 2.** Xét $x \geq 9$ ta có 2 đánh giá sau $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x}} > \frac{9}{10} \\ \frac{x+3}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1})^2} > \frac{1}{10} \end{cases}$

Khi đó $VT > 1 = VP$, phương trình vô nghiệm.

- **Trường hợp 3.** Xét $x \in [1; 2]$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x}} \geq \frac{2\sqrt{x-1}}{x+1} \\ \sqrt{x+3} \leq \frac{1}{4}(x+7) \end{cases}$

Khi đó $VT \geq \frac{2\sqrt{x-1}}{x+1} + \frac{x+3}{2x+2 + \frac{(x+7)\sqrt{x-1}}{2}}$.

Đặt $a = \sqrt{x-1}$ ($a \in [0; 1]$) khi đó

$$VT \geq \frac{2a}{a^2+2} + \frac{2a^2+8}{4(a^2+1)+4+a(a^2+8)} = 1 + \frac{a^2(12-a^3-2a)}{(a^2+2)(a^3+4a^2+8a+8)}$$

Vì $12 - a^3 - 2a = (2-a)(a^2+2a+6) > 0, \forall a \in [0; 1]$ nên $VT \geq 1, \forall x \in [1; 2]$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Câu 121. Giải phương trình $\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{x(x^2-x+1)}=\sqrt{\frac{(x^2+1)^3}{x}}$

Giải

Điều kiện $x > 0$, chia cả 2 vế cho $\sqrt{x(x^2+1)}$ ta được

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x^4+x^2+1}{x(x^2+1)}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}&=\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2}}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x^2+\frac{1}{x^2}+1}{x+\frac{1}{x}}}+\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x^2+1}{x}\\\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}{x+\frac{1}{x}}}+\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}}&=x+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\sqrt{x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}=x+\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x} \geq 2$ ta được $\sqrt{y - \frac{1}{y}} + \sqrt{1 - \frac{1}{y}} = y$, đây chính là bài toán MO Yugoslavia

Như ở bài toán MO Yugoslavia ta đã tìm hiểu cách giải bằng bất đẳng thức AM – GM, ở đây ta sẽ tìm hiểu thêm phương pháp biến đổi tương đương nữa, ta được

$$\begin{aligned}\sqrt{y - \frac{1}{y}} + \sqrt{1 - \frac{1}{y}} = y &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{y}} = y - \sqrt{y - \frac{1}{y}}\\\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{y} &= y^2 + x - \frac{1}{y} - 2y\sqrt{y - \frac{1}{y}} \Leftrightarrow y^2 - 2y\sqrt{y - \frac{1}{y}} + y + 1 = 0\\\Leftrightarrow y + \frac{1}{y} - 2\sqrt{y - \frac{1}{y}} + 1 &= 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{y - \frac{1}{y}} - 1\right)^2 = 0\end{aligned}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết hoàn toàn.

Câu 122. Giải phương trình $2\sqrt{9x^3+7x^2+2x-2x\sqrt{x}}+x^2-2\sqrt{x}(1+6x)+9x=0$

Giải

Biến đổi vế trái ta được

$$\begin{aligned}VT &= 2\sqrt{x(3x+1)^2 + (x-\sqrt{x})^2} + x^2 - 2\sqrt{x}(1+6x) + 9x \\&\geq 2\sqrt{x}(3x+1) + x^2 - 2\sqrt{x}(1+6x) + 9x \\&= x^2 - 6x\sqrt{x} + 9x = (x-3\sqrt{x})^2 \geq 0\end{aligned}$$

Vậy $VT \geq VP$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Câu 123. Giải phương trình $54x+21-2(\sqrt{3x}+2\sqrt{x+1})=(3\sqrt{3x}+2\sqrt{x+1})^2$

Giải

Biến đổi phương trình tương đương

$$\begin{aligned}23x+17-2\sqrt{3x}-4\sqrt{x+1} &= 12\sqrt{3x(x+1)}\\\Leftrightarrow (2\sqrt{3x}-3\sqrt{x+1})^2 &+ (x+3-2\sqrt{3x}) + (x+5-4\sqrt{x+1}) = 0\\\Leftrightarrow (2\sqrt{3x}-3\sqrt{x+1})^2 &+ \frac{(x-3)^2}{x+3+2\sqrt{3x}} + \frac{(x-3)^2}{x+5+4\sqrt{x+1}} = 0\end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $VT \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$.

Câu 124. Giải phương trình $1 + \sqrt{\frac{x^4 - x^3 + x^2 + 1}{2(x^2 - x + 1)}} = \sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 2}}$

Giải

Điều kiện xác định $x \geq 0$

Cách 1. Biến đổi phương trình tương đương

$$\begin{aligned}\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2 - x + 1}} &= \sqrt{2x} + 2\sqrt{\frac{1}{x^2 - x + 2}} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2 - x + 1} + 2\sqrt{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2 - x + 1}} &= 2x + \frac{4}{x^2 - x + 2} + 4\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x^2 - x + 2}}\end{aligned}$$

Ta sẽ đi chứng minh

$$\begin{aligned}\bullet \quad x^2 + 2 + \frac{1}{x^2 - x + 1} &\geq 2x + \frac{4}{x^2 - x + 2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{x^2(x-1)^2}{(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2)} \\ \bullet \quad 2\sqrt{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2 - x + 1}} &\geq 4\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x^2 - x + 2}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2 - x + 1}} \geq 2\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x^2 - x + 2}} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2(x^4 + 3x^2 - x + 2) \geq 0\end{aligned}$$

Dễ dàng thấy 2 đánh giá trên đúng, khi đó $VT \geq VP$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Cách 2. Phương trình tương đương

$$2 + \sqrt{\frac{2(x^4 - x^3 + x^2 + 1)}{x^2 - x + 1}} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 2}} \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^2 + \frac{1}{x^2 - x + 1}\right)} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 2}} - 2$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $\sqrt{2\left(x^2 + \frac{1}{x^2 - x + 1}\right)} \geq x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \geq \frac{2}{x^2 - x + 2}$

Do đó ta có $\sqrt{2\left(x^2 + \frac{1}{x^2 - x + 1}\right)} \geq x + \frac{2}{x^2 - x + 2}$

Mặt khác ta lại có $2\sqrt{x} + 2\sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 2}} - 2 - x - \frac{2}{x^2 - x + 2} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 2}} - 1\right)^2 = 0$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 125. Giải phương trình $8\sqrt{5\left(x^2 + \frac{1}{x^2 + 4x - 1}\right)} + 54x^2 = 121x - 47$

Giải

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{5\left(x^2 + \frac{1}{x^2 + 4x - 1}\right)} &= \sqrt{(4+1)\left(x^2 + \frac{1}{x^2 + 4x - 1}\right)} \geq 2x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}} \\ \Leftrightarrow 121x - 47 - 54x^2 &\geq 8\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}}\right) \Leftrightarrow 54x^2 - 105x + 47 + \frac{8}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}} \leq 0\end{aligned}$$

| Phương pháp bất đẳng thức

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{16}{\sqrt{x^2+4x-1}} = \frac{16}{\sqrt{4(x^2+4x-1)}} \geq \frac{32}{x^2+4x+3}$

Từ đây suy ra $\frac{32}{x^2+4x+3} + 54x^2 - 105x + 47 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(54x^2+219x+173)}{x^2+4x+3} \leq 0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Câu 126. Giải phương trình

$$\frac{3+\sqrt{x}}{x^2+x\sqrt{x}+x+3} + \frac{x+\sqrt{x}+2}{x^2+x\sqrt{x}+3} + \frac{x\sqrt{x}+x+2}{x^2+\sqrt{x}+4} + \frac{x^2+x\sqrt{x}+2}{x+x\sqrt{x}+4} + \frac{x^2+3}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+3} = \frac{10}{3}$$

Giải

Đặt $a=2$, $b=\sqrt{x}+1$, $c=x+1$, $d=x\sqrt{x}+1$, $e=x^2+1$.

Phương trình đã cho trở thành.

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{c+d+e} + \frac{b+c}{d+e+a} + \frac{c+d}{e+a+b} + \frac{d+e}{a+b+c} + \frac{e+a}{b+c+d} = \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{a+b}{c+d+e} + 1 \right) + \left(\frac{b+c}{d+e+a} + 1 \right) + \left(\frac{c+d}{e+a+b} + 1 \right) + \left(\frac{d+e}{a+b+c} + 1 \right) + \left(\frac{e+a}{b+c+d} + 1 \right) = \frac{10}{3} + 5 \\ \Leftrightarrow & (a+b+c+d+e) \left(\frac{1}{c+d+e} + \frac{1}{d+e+a} + \frac{1}{e+a+b} + \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+d} \right) = \frac{25}{3} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{c+d+e} + \frac{1}{d+e+a} + \frac{1}{e+a+b} + \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+d} \right) \times \\ & [(c+d+e) + (d+e+a) + (e+a+b) + (a+b+c) + (b+c+d)] = 25 \quad (*) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho vế trái của (*) thì ta được $VT(*) \geq 25$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=e \Leftrightarrow x=1$.

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Câu 127. Giải bất phương trình $\sqrt{x-\frac{1}{x}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}$

VMO 1977

Giải

Để ý rằng $x=1$ không phải là nghiệm của bất phương trình này.

Điều kiện $\begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$.

Khi đó ta có $\frac{x-1}{x} > 0$ nên chia cả hai vế của bất phương trình cho $\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ ta được bất phương trình tương đương

$$\sqrt{x+1}-1 > \sqrt{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}} \quad (*)$$

- Nếu $-1 \leq x < 0$ thì $VT(*) < 1 < VP(*)$. Điều này vô lý.
- Nếu $x > 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x+1 > 1 + \frac{x-1}{x} + 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow (x-1) + \frac{1}{x} > 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}$.

Do $x > 1$ nên $x-1 > 0$ và $\frac{1}{x} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $(x-1) + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \neq x < 1$.

Câu 128. Giải phương trình $\frac{x-3x^2}{2} + \sqrt{2x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 3} = 2$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với.

$$\sqrt{2x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 3} = 2 - \frac{x-3x^2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(2x^2 - x + 1)(x^2 + 3)} = \frac{3x^2 - x + 4}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\frac{3x^2 - x + 4}{2} = \frac{(2x^2 - x + 1) + (x^2 + 3)}{2} \geq \sqrt{(2x^2 - x + 1)(x^2 + 3)}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Câu 129. Biết rằng phương trình $x^4 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$ (1) có nghiệm dương x_0 . Chứng minh rằng $\sqrt[3]{162} < x_0 < 2$ và x_0 không phải là nghiệm của phương trình

$$\sqrt{3-x} + x\sqrt{x-1} = 4.$$

Giải

Vì bất phương trình (1) có nghiệm dương x_0 nên

$$\begin{aligned} x_0^4 - 2x_0^2 - 3x_0 - 1 = 0 &\Leftrightarrow x_0^4 = 2x_0^2 + 3x_0 + 1 \\ &\Leftrightarrow x_0^4 \geq 3\sqrt[3]{6x_0^3} \Leftrightarrow x_0^3 \geq 3\sqrt[3]{6} \Leftrightarrow x_0 \geq \sqrt[3]{162}. \end{aligned}$$

Dễ thấy $x_0 \neq \sqrt[3]{162}$. Suy ra $x_0 > \sqrt[3]{162}$.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 1$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 2x - 3 = 2x(2x^2 - 1) - 3 > 0, \forall x > 2 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Với $x > 2 \Rightarrow f(x) > f(2) = 1 > 0 \Rightarrow$ Phương trình (1) không có nghiệm lớn hơn 2.

Dễ thấy $x_0 \neq 2$. Vậy $x_0 < 2$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm x_0 thỏa $\sqrt[3]{162} < x_0 < 2$.

Xét phương trình $\sqrt{3-x} + x\sqrt{x-1} = 4$.

Điều kiện $1 \leq x \leq 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$16 = (1 \cdot \sqrt{3-x} + x \cdot \sqrt{x-1})^2 \leq (1+x^2)(3-x+x-1) \Rightarrow x^2 \geq 7 \Rightarrow x \geq \sqrt{7} > 2.$$

Vậy nghiệm x_0 của phương trình (1) thỏa $\sqrt[3]{162} < x_0 < 2$ và không phải là nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x} + x\sqrt{x-1} = 4$.

Câu 130. Giải phương trình $2x\sqrt{8x+1} + \sqrt{x^2+8} = 6x\sqrt{x} + 3$

Giải

Cách 1. Hàm số.

| Phương pháp bất đẳng thức

Xét hàm số $f(x) = 2x\sqrt{8x+1} + \sqrt{x^2+8} - 6x\sqrt{x} - 3$ trên $[0; +\infty)$ ta có

$$f'(x) = \frac{24x+2}{\sqrt{8x+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} - 9\sqrt{x} = 0$$

$$f''(x) = \frac{8}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}} + \frac{16(6x+1)}{(8x+1)\sqrt{8x+1}} - \frac{9}{2\sqrt{x}} < 0$$

Từ đây suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có tối đa một nghiệm, mà $f'(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f'(x) = 0$.

Từ đây lập bảng biến thiên ta dễ dàng chỉ ra được $\max f(x) = f(1) = 0$

Khi đó $VT \leq VP$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Cách 2. Bất đẳng thức

Đặt $t = \sqrt{x} \geq 0$, phương trình trở thành $2t^2\sqrt{8t^2+1} + \sqrt{t^4+8} = 6t^3+3$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$2t^2\sqrt{8t^2+1} = \frac{2t}{3} \cdot 3t \cdot \sqrt{8t^2+1} \leq \frac{t}{3}(9t^2+8t^2+1) = \frac{17t^3+t}{3}$$

Từ đó suy ra $\frac{17t^3+t}{3} + \sqrt{t^4+8} \geq 6t^3+3 \Leftrightarrow 3\sqrt{t^4+8} \geq t^3-t+9$

Để ý thấy $t^3-t+9 = t(t-1)^2 + 2t^2 - 2t + 9 > 0, \forall t \geq 0$, bình phương 2 vế ta được

$$9(t^4+8) \geq (t^3-t+9)^2 \Leftrightarrow (t-1)^2(t+1)(t^3+t^2-9t+9) \leq 0 (*)$$

Mặt khác $t^3+t^2-9t+9 = t(t-2)^2 + 5t^2 - 13t + 9 > 0, \forall t \geq 0$

Từ đó $VT(*) \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 131. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+3} + \sqrt{2x^2-2x+2} = \sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{2x^2+4}$

Nguyễn Mai Hoàng Anh

Giải

Ta có phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{x^2+3x+3} + \sqrt{2x^2-2x+2} = \sqrt{x^2+3x+3+x+1} + \sqrt{2x^2-2x+2+2(x+1)} \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

Nhận xét. Ở đây ta xét dạng phương trình sau

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x)+a.h(x)} + \sqrt{g(x)+b.h(x)} \quad (a, b \in \mathbb{R}^+)$$

Phương pháp

Phương trình đã cho tương đương
$$\begin{cases} f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x)+a.h(x)} + \sqrt{g(x)+b.h(x)} \quad (1)$$

Chứng minh. Điều kiện xác định
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x)+a.h(x) \geq 0 \\ g(x)+b.h(x) \geq 0 \end{cases}$$

- Nếu $h(x) > 0$, thì $\sqrt{f(x)+a.h(x)} + \sqrt{g(x)+b.h(x)} > \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm

- Nếu $h(x) < 0$, thì $\sqrt{f(x)+a.h(x)} + \sqrt{g(x)+b.h(x)} < \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm

- Nếu $h(x) = 0$, thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$ (luôn đúng)

Vậy khi đó, ta có phương trình (1) tương đương
$$\begin{cases} f(x), g(x) \geq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

Câu 132. Giải phương trình

$$\sqrt[n]{x-1}\sqrt{a} + \sqrt[n]{x-2}\sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{x-1}(a+n\sqrt{x-2})} + \sqrt{\sqrt{x-2}(b+n\sqrt{x-1})} \quad (a, b \geq 0, n > 0)$$

Nguyễn Mai Hoàng Anh

Giải

Điều kiện $x \geq 2$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{a\sqrt{x-1}} + \sqrt{b\sqrt{x-2}} = \sqrt{a\sqrt{x-1} + n\sqrt{x-1}\sqrt{x-2}} + \sqrt{b\sqrt{x-2} + n\sqrt{x-1}\sqrt{x-2}} \quad (*)$$

Vì $n\sqrt{x-1}\sqrt{x-2} \geq 0$. Nên $VP(*) \geq VT(*)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow n\sqrt{x-1}\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Mở rộng. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{-x^2+3x-2} + \sqrt{-2y^2+5y-3} = \sqrt{2x^3-6x^2+8x-5} + \sqrt{2y^3-y^2+3y-9} & (1) \\ (3x-2)\sqrt{x-1} - (3y-2)\sqrt{y-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

Nguyễn Mai Hoàng Anh

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq \frac{3}{2} \\ 2x^3 - 6x^2 + 8x - 5 \geq 0 \\ 2y^3 - y^2 + 3y - 9 \geq 0 \end{cases}$$

Từ (2), ta có $[3(x-1)+1]\sqrt{x-1} = [3(y-1)+1]\sqrt{y-1}$

Xét hàm số $f(t) = (3t^2+1)t = 3t^3+t$, với $t \in [0;2]$.

Ta có $f'(t) = 9t^2+1 > 0, \forall t \in [0;2]$. Vậy hàm số luôn đồng biến trên $[0;2]$.

Từ (2), suy ra $f(x-1) = f(y-1) \Leftrightarrow x-1 = y-1 \Leftrightarrow x = y$. Thay vào (1), ta được.

$$\begin{aligned} \sqrt{-x^2+3x-2} + \sqrt{-2x^2+5x-3} &= \sqrt{2x^3-6x^2+8x-5} + \sqrt{2x^3-x^2+3x-9} \\ \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+3x-2} + \sqrt{-2x^2+5x-3} &= \sqrt{-x^2+3x-2+(x^2-x+1)(2x-3)} + \sqrt{-2x^2+5x-3+(x^2+2x+2)(2x-3)} \quad (*) \end{aligned}$$

Do $\begin{cases} x^2-x+1 > 0 \\ x^2+2x+2 > 0 \end{cases}$ khi đó phương trình (*) $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$.

Thử lại thỏa mãn, vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x; y)$ là $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Nhận xét. Từ đây ta có hệ thức mở rộng

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x) + j(x) \cdot h(x)} + \sqrt{g(x) + k(x) \cdot h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x), g(x) \geq 0 \\ j(x), k(x) > 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

Câu 133. Giải phương trình $2\sqrt{\frac{2}{x+1}} + \sqrt{x} = 2\sqrt{2 + \frac{x}{(x+1)^2}}$

Giải

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\sqrt[4]{\frac{2}{x(x+1)}} = \frac{8}{\sqrt{2x(x+1)}} \geq \frac{8}{\frac{2x+x+1}{2}} = \frac{16}{3x+1}$

Từ phương trình đầu ta có $\frac{-x^2+6x+11}{(x+1)^2} \geq \frac{16}{3x+1} \Leftrightarrow (3x+1)(-x^2+6x+11) - 16(x+1)^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow -(x-1)^2 \left(x + \frac{5}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 134. Giải phương trình $\frac{(x-1)^4}{(x^2-3)^2} + (x^2-3)^4 + \frac{1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 2x - 5$.

Trại hè Hùng Vương 2010

Giải

Điều kiện $x \neq \pm\sqrt{3}, x \neq 1$.

Phương trình đã cho được viết lại như sau

$$\frac{(x-1)^4}{(x^2-3)^2} + (x^2-3)^4 + \frac{1}{(x-1)^2} = (x-1)^2 + 2(x^2-3).$$

Đặt $u = (x-1)^2; v = x^2-3$. Phương trình đã cho trở thành $\frac{u^2}{v^2} + v^4 + \frac{1}{u} = u + 2v$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\left(\frac{u^2}{v^2} + v^4 + \frac{1}{u}\right)(v^2 + u + 1) \geq (u + v^2 + 1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{v^2} + v^4 + \frac{1}{u} \geq u + v^2 + 1 \geq u + 2v$$
 (2)

Từ (1), (2) suy ra $\begin{cases} \frac{u}{v} = v^2 = \frac{1}{u} \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 1$. Khi đó $\begin{cases} (x-1)^2 = 1 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Câu 135. Giải phương trình

$$\sqrt{4(\sqrt{x}+1)^2 + (2-3\sqrt{x})^2} + \frac{2x+2\sqrt{x}+\frac{14}{9}}{\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2+1} + \sqrt{\frac{4}{9}-x}} = 3\sqrt{2} - \sqrt{\frac{4}{9}-x}$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & \sqrt{4(\sqrt{x}+1)^2 + (2-3\sqrt{x})^3} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + 1 - \left(\frac{4}{9} - x\right)}{\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2 + 1} + \sqrt{\frac{4}{9} - x}} = 3\sqrt{2} - \sqrt{\frac{4}{9} - x} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{4(\sqrt{x}+1)^2 + (2-3\sqrt{x})^2} + \sqrt{(\sqrt{x}+1)^2 + 1} - \sqrt{\frac{4}{9} - x} = 3\sqrt{2} - \sqrt{\frac{4}{9} - x} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\frac{4(\sqrt{x}+1)^2 + 25\left(\frac{2-3\sqrt{x}}{5}\right)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(\sqrt{x}+1)^2 + 1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} + 1 \geq 0 \\ b = \frac{-3\sqrt{x} + 2}{5} \geq 0 \end{cases}$, lúc này ta có $3a + 5b = 5$.

Phương trình trở thành $\sqrt{\frac{4a^2 + 25b^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}} = 3$

Ta có bất đẳng thức quen thuộc $\sqrt{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2}$, khi đó ta được $\begin{cases} \sqrt{\frac{4a^2 + 25b^2}{2}} \geq a + \frac{5b}{2} \\ \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}} \geq \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$

Do đó $\sqrt{\frac{4a^2 + 25b^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}} \geq \frac{3a + 5b + 1}{2} = 3$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Câu 136. Cho phương trình $x^3 - 2002x^2 + 2001bx - 2000a = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của a sao cho tồn tại b để phương trình có 3 nghiệm trên $[-2002, 2002]$

Giải

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình. Khi đó theo Viète ta có

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2002 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2001b \\ x_1x_2x_3 = 2000a \end{cases}$$

Xảy ra các trường hợp sau

- Nếu $x_2 < 0$ hoặc $x_3 < 0$ khi đó $x_1 + x_2 + x_3 < x_3 \leq 2002$. Điều này mâu thuẫn với phương trình thứ nhất của (I).
- Nếu $x_1 < 0 \leq x_2 \leq x_3$ từ phương trình ba của (I) suy ra $a \leq 0$.
- Nếu $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$ theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$2002 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} = \sqrt[3]{2000a} \Rightarrow a \leq \frac{2002^3}{54000}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2002}{3}$ và khi ấy $b = \frac{2002^2}{6003}$

Bây giờ ta xét bài toán trong trường hợp $a = \frac{2002^3}{54000}$ và $b = \frac{2002^2}{6003}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành

| Phương pháp bất đẳng thức

$$x^3 - 2002x^2 + \frac{2002^2}{3}x - \frac{2002^2}{3^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2002}{3}\right)^3 = 0$$

Phương trình trên có ba nghiệm $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2002}{3} \in [-2002, 2002]$

Vậy $a_{\max} = \frac{2002^3}{54000}$ là giá trị cần tìm.

Câu 137. Giải phương trình $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x}$

Giải

Đặt $u = \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x}$

Khi đó

$$u^2 = 2 + 2\sqrt{1-4x^2} \geq 2 \Rightarrow u \geq \sqrt{2}$$

$$u = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x} \quad (u \geq \sqrt{2}) \Rightarrow u^3 = 2 + 3u\sqrt{1-9x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-9x^2} = \frac{u^3 - 2}{3u} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Suy ra các bất phương trình sau nghiệm đúng $\forall x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

$$\sqrt{1+2x} \geq \sqrt[3]{1+3x} \Leftrightarrow (1+2x)^3 \geq (1+3x)^2 \Leftrightarrow x^2(3+8x) \geq 0$$

$$\sqrt{1-2x} \geq \sqrt[3]{1-3x} \Leftrightarrow (1-2x)^3 \geq (1-3x)^2 \Leftrightarrow x^2(3-8x) \geq 0$$

Hay $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} \geq \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x}, \forall x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 138. Giải phương trình $\sqrt{\frac{2x^2+2}{3}} - x\sqrt{x-\frac{1}{3}} = \sqrt{1-x}$

Giải

Điều kiện $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

Viết lại phương trình dưới dạng $\sqrt{1-x} + x\sqrt{x-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2x^2+2}{3}}$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$VT = \sqrt{1-x} + x\sqrt{x-\frac{1}{3}} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{(x^2+1)\left(1-x+x-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2(x^2+1)}{3}} = VP$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{x-\frac{1}{3}}}{x} \Leftrightarrow x^2(1-x) = x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -2x^3 \Leftrightarrow x-1 = -\sqrt[3]{2x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$.

Câu 139. Giải phương trình $x^4 + 7x^2 + 5 = x^3 + 4x(\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-x+1})$

Giải

Ta có $x^4 + 7x^2 + 5 > 0 \Rightarrow x^3 + 4x(\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-x+1}) > 0 \Rightarrow x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương

$$(2x - \sqrt{x+3})^2 + 2(x - \sqrt{x^2-x+1})^2 + x(x+1)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{x+3} = 0 \\ x - \sqrt{x^2-x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1. \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 140. Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} = 2(x-1)^2(2x^2-4x+1)$

Giải

Đặt $t = \sqrt{2x-x^2} \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 1-t^2$

Phương trình trở thành $\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} = 2(1-t^2)(1-2t^2)$.

Từ đó ta có $0 \leq t \leq 1$. Ta thấy $VP \leq 2(1-t^2)$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được $VT \geq 2\sqrt{1-t^2} \geq 2(1-t^2)$ vì $0 \leq 1-t^2 \leq 1$.

Suy ra $VT \geq VP$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0; x = 2$.

Câu 141. Giải phương trình $(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{120}) + (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{120}) = 2^{120}$ trên $[-1;1]$.

Giải

Do $x_i \in [-1;1] \ \forall i = \overline{1,120}$ nên $1-x_i \geq 0; 1+x_i \geq 0, \forall i = \overline{1,120}$.

Đặt $S = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{120}}{120}$. Suy ra $S \in [-1;1]$.

Áp dụng AM - GM ta có $\frac{(1-x_1) + (1-x_2) + \dots + (1-x_{120})}{120} \geq \sqrt[120]{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{120})}$.

Suy ra $(1-S)^{120} \geq (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{120})$ (1)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{120}$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $(1+S)^{120} \geq (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{120})$ (2)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{120}$.

Từ (1) và (2) suy ra $(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{120}) + (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{120}) \leq (1-S)^{120} + (1+S)^{120}$.

Đặt $S = \cos t$ với $t \in [0; \pi]$. Ta có

$$(1-S)^{120} + (1+S)^{120} = (1-\cos t)^{120} + (1+\cos t)^{120} = 2^{120} \left(\sin^{240} \frac{t}{2} + \cos^{240} \frac{t}{2} \right) \leq 2^{120} \left(\sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2} \right) = 2^{120}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_{120} \\ t = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_{120} = -1 \\ x_1 = x_2 = \dots = x_{120} = 1 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $(-1; -1; \dots; -1), (1; 1; \dots; 1)$.

Câu 142. Giải phương trình $\sqrt[13]{3125} \cdot x^{14} - 13\sqrt[39]{25} \cdot x^6 + 4x^{213}\sqrt[13]{3125} + 4\sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[13]{3125} = 0$.

Giải

Rõ ràng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

| Phương pháp bất đẳng thức

Xét $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với $x^8 + \frac{4}{x^4} + \frac{4\sqrt[6]{5}}{x^6} = \frac{13\sqrt[39]{25}}{\sqrt[13]{3125}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 13 số dương, ta có

$$\frac{x^8}{5} + \dots + \frac{x^8}{5} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^4} + \frac{\sqrt[6]{5}}{x^6} + \dots + \frac{\sqrt[6]{5}}{x^6} \geq \frac{13\sqrt[39]{25}}{\sqrt[13]{3125}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \pm\sqrt[12]{5}$. Vậy $x = \pm\sqrt[12]{5}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 143. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ tùy ý, tồn tại đúng một bộ số $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ thỏa phương trình

$$(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \dots + (x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}.$$

England 1975

Giải

Biến đổi phương trình tương đương

$$(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \dots + (x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2 \geq \frac{1}{n+1} [(1-x_1) + (x_1-x_2) + \dots + (x_{n-1}-x_n) + x_n]^2 = \frac{1}{n+1}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $1-x_1 = x_1-x_2 = \dots = x_{n-1}-x_n = x_n = \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow x_i = 1 - \frac{i}{n+1}, (i = \overline{1, n})$.

Câu 144. Giải phương trình $\cos^n x - \sin^n x = 1$ với $n \in \mathbb{N}$.

IMO Problem 1961

Giải

Vì $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ nên phương trình vô nghiệm khi $n \neq 2$ và $0 < |\cos x|; |\sin x| < 1$.

Nếu $n = 2$ và $0 < |\cos x|; |\sin x| < 1$ thì cũng dễ thấy phương trình vô nghiệm vì vế trái luôn bé hơn 1.

Như vậy phương trình chỉ có nghiệm khi $\sin x = 0$ hoặc $\cos x = 0$. Từ đây ta có

o Nếu n chẵn thì $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

o Nếu n lẻ thì hoặc $\cos x = 0$ và $\sin x = 1$, cho ta $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, hoặc $\cos x = 1$ và $\sin x = 0$, cho ta $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 145. Tìm tất cả các số thực dương $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ sao cho

$$|\log(xx_1)| + |\log(xx_2)| + \dots + |\log(xx_n)| + \left| \log\left(\frac{x}{x_1}\right) \right| + \left| \log\left(\frac{x}{x_2}\right) \right| + \dots + \left| \log\left(\frac{x}{x_n}\right) \right| = |\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n|.$$

MO Treasures Titu Andreescu, Bogdan Enescu

Giải

Ta có $|\log(xx_k)| + \left| \log\left(\frac{x}{x_k}\right) \right| \geq \left| \log(xx_k) - \log\left(\frac{x}{x_k}\right) \right| = |\log x_k^2| = 2|\log x_k|, k = \overline{1, n}$.

Khi đó vế trái của đẳng thức trên $VT \geq 2(|\log x_1| + |\log x_2| + \dots + |\log x_n|)$

Tuy nhiên vế phải của đẳng thức $VP \leq (|\log x_1| + |\log x_2| + \dots + |\log x_n|)$.

Như vậy đẳng thức trên chỉ xảy ra khi và chỉ khi

$$|\log x_1| = |\log x_2| = \dots = |\log x_n| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1.$$

Đến đây ta dễ dàng thấy được $x = 1$.

Câu 146. Cho $a > 1$, hãy tìm tất cả các bộ ba số thực $(x; y; z)$ sao cho $|y| \geq 1$ thỏa phương trình

$$\log_a^2(xy) + \log_a(x^3y^3 + xyz)^2 + \frac{8 + \sqrt{4z - y^2}}{2} = 0.$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} xy > 0 \\ x^3y^3 + xyz \neq 0 \\ 4z - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy > 0 \\ xy(x^2y^2 + z) \neq 0 \\ 4z - y^2 \geq 0 \end{cases}.$$

Do $|y| \geq 1$ nên từ $4z - y^2 \geq 0$ suy ra $z \geq \frac{1}{4}$ và $xy > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $x^2y^2 + z \geq x^2y^2 + \frac{1}{4} \geq xy$.

Suy ra $\log_a^2(xy) + \log_a(x^3y^3 + xyz)^2 + \frac{8 + \sqrt{4z - y^2}}{2} \geq \log_a^2(xy) + \log_a(xy)^4 + \frac{8}{2} = (\log_a(xy) + 2)^2 \geq 0$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{4} \\ y = \pm 1 \\ xy = \frac{1}{2} \\ \log_a(xy) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Các bài toán về hệ phương trình.

Cũng như các bài toán về phương trình, ở phần này chúng ta cũng vẫn sẽ sử dụng các đánh giá bất đẳng thức cơ bản để giải quyết bài toán, tuy nhiên sẽ cần phải kết hợp một số các kỹ thuật khác như cộng trừ các vế, chặn điều kiện để có thể xử lý trọn vẹn được bài toán. Sau đây chúng ta sẽ bắt đầu tìm hiểu lớp bài toán về hệ phương trình đánh giá này!

Một số bất đẳng thức đối xứng 2 biến.

Đây là những bất đẳng thức khá chặt, sử dụng các thêm bớt đại lượng bất biến khi áp dụng bất đẳng thức AM – GM. Chính vì tính chất đối xứng hai biến nên dạng bất đẳng thức này thường được lồng ghép vào các hệ phương trình hay kết hợp để chuyển về xét hàm số chứng minh bất đẳng thức. Những ứng dụng này phổ biến trong các kỳ thi và là một khó khăn trong các đề thi vì tính chất giới hạn thời gian. Tư tưởng của cách chứng minh bất đẳng thức này là từ việc giải phương trình cố gắng đưa ra nhân tử $(x - y)$. Con đường sẽ bỏ qua cách chứng minh trực tiếp bằng các bất đẳng thức phụ như AM – GM, Cauchy – Schwarz hay Holder,... Nói cách khác, cách làm này giúp khẳng định tính đúng đắn của bất đẳng thức.

Ví dụ 1. Cho x, y là các số thực không âm, chứng minh $x^3 + y^3 \geq xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

Giải

Đây là một bất đẳng thức không khó, tuy nhiên giải quyết được nó cần một chút kĩ thuật

Ta có $x^3 + y^3 = xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}x^3 + y^3 - xy(x + y) = xy\left[\sqrt{2(x^2 + y^2)} - (x + y)\right]$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2(x + y) = xy \cdot \frac{2(x^2 + y^2) - (x + y)^2}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + x + y} \Leftrightarrow (x - y)^2(x + y) = \frac{(x - y)^2 xy}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + x + y}$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \left[(x + y) - \frac{xy}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + (x + y)} \right] = 0.$$

Do $(x + y)^2 \geq 4xy$ (vì $x, y \geq 1$) suy ra $(x + y) - \frac{xy}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + (x + y)} > 0$.

Nên $x = y$, ta có điều phải chứng minh!

Để minh họa cho bất đẳng thức này mình xin lấy một bài toán sau.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = xy\sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ 4\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 9(y - 1)\sqrt{2x - 2} \end{cases}.$$

Ví dụ 2. Cho $x, y \geq 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} \geq \frac{2}{xy + 1}$.

Giải

Ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{xy + 1} \right) + \left(\frac{1}{y^2 + 1} - \frac{1}{xy + 1} \right) &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(xy + 1) - (x^2 + 1)}{(xy + 1)(x^2 + 1)} + \frac{(xy + 1) - (y^2 + 1)}{(xy + 1)(y^2 + 1)} \geq 0. \\ \Leftrightarrow \frac{x(y - x)}{x^2 + 1} + \frac{y(y - x)}{y^2 + 1} &\geq 0 \Leftrightarrow (y - x) \left(\frac{y}{y^2 + 1} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \frac{xy(x-y)+y-x}{(x^2+1)(y^2+1)} \geq 0 \Leftrightarrow (x-y) \frac{xy-1}{(x^2+1)(y^2+1)} \geq 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng, suy ra điều phải chứng minh!

Ví dụ 3. Cho x, y là các số thực không âm, chứng minh

$$\frac{2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3x^2}} \leq \frac{2}{x+y}$$

Giải

Bất đẳng thức 1.

Trước hết ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3x^2}}. \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+3x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \right) \geq 0. \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{2(x^2+y^2)} - \sqrt{x^2+3y^2}}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{\sqrt{2(x^2+y^2)} - \sqrt{y^2+3x^2}}{\sqrt{y^2+3x^2}} \geq 0. \\ \Leftrightarrow & (x^2-y^2) \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}(\sqrt{2(x^2+y^2)} + \sqrt{x^2+3y^2})} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3x^2}(\sqrt{2(x^2+y^2)} + \sqrt{y^2+3x^2})} \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2-y^2) \left[\sqrt{2(x^2+y^2)}(\sqrt{y^2+3x^2} - \sqrt{x^2+3y^2}) + (y^2+3x^2) - (x^2+3y^2) \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2-y^2)(\sqrt{y^2+3x^2} - \sqrt{x^2+3y^2}) \left[\sqrt{2(x^2+y^2)} + (\sqrt{y^2+3x^2} + \sqrt{x^2+3y^2}) \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2-y^2)(\sqrt{y^2+3x^2} - \sqrt{x^2+3y^2}) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-y^2) \frac{2(x^2-y^2)}{\sqrt{y^2+3x^2} + \sqrt{x^2+3y^2}} \geq 0 \end{aligned}$$

Dễ thấy bất đẳng thức trên luôn đúng!

Bất đẳng thức 2. Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3x^2}} \leq \frac{2}{x+y}$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} - \frac{1}{x+y} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+3x^2}} - \frac{1}{x+y} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+y-\sqrt{x^2+3y^2}}{\sqrt{x^2+3y^2}(x+y)} + \frac{x+y-\sqrt{3x^2+y^2}}{\sqrt{3x^2+y^2}(x+y)} \leq 0. \\ \Leftrightarrow & \frac{(x+y)^2 - (x^2+3y^2)}{\sqrt{x^2+3y^2}(x+y+\sqrt{x^2+3y^2})} + \frac{(x+y)^2 - (3x^2+y^2)}{\sqrt{3x^2+y^2}(x+y+\sqrt{3x^2+y^2})} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2y(x-y)}{\sqrt{x^2+3y^2}(x+y)+x^2+3y^2} + \frac{2x(y-x)}{\sqrt{3x^2+y^2}(x+y+\sqrt{3x^2+y^2})} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y) \left[\frac{y}{\sqrt{x^2+3y^2}(x+y)+x^2+3y^2} + \frac{x}{\sqrt{3x^2+y^2}(x+y+\sqrt{3x^2+y^2})} \right] \leq 0 \end{aligned}$$

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[(x+y) \left(y\sqrt{3x^2+y^2} - x\sqrt{x^2+3y^2} \right) + 3xy(x-y) + y^3 - x^3 \right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[(x+y) \frac{y^4 - x^4}{y\sqrt{3x^2+y^2} + x\sqrt{x^2+3y^2}} + 3xy(x-y) + (y-x)(y^2 + xy + x^2) \right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \left[\frac{(x^2+y^2)(x+y)}{y\sqrt{3x^2+y^2} + x\sqrt{x^2+3y^2}} + (x-y)^2 \right] \geq 0$$

Để thấy bất đẳng thức trên luôn đúng!

Ví dụ 4. Cho x, y là các số thực không âm, chứng minh $\frac{x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy+1}}$.

Giải

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn $\frac{x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{x+y}{\sqrt{xy+1}}$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{xy+1}} \right) + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{y}{\sqrt{xy+1}} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \frac{\sqrt{xy+1} - \sqrt{y^2+1}}{\sqrt{y^2+1}\sqrt{xy+1}} + y \frac{\sqrt{xy+1} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{xy+1}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \frac{xy - y^2}{\sqrt{y^2+1}(\sqrt{xy+1} + \sqrt{y^2+1})} + y \frac{xy - x^2}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{xy+1} + \sqrt{x^2+1})} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)xy \left[\frac{1}{\sqrt{y^2+1}(\sqrt{xy+1} + \sqrt{y^2+1})} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{xy+1} + \sqrt{x^2+1})} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y) \left[\sqrt{xy+1}(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}) + (x^2+1) - (y^2+1) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y) \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1} \right) \left[\sqrt{xy+1} + (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1} \right) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y) \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

Từ đây ta có thể chứng minh được bất đẳng thức đã cho.

Ví dụ 5. Nếu a, b, c thỏa mãn $a, b, c \geq 1$ thì $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{4}{1+\sqrt[3]{abc}}$

Giải

Ta có $a, b, c \geq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \geq 1$. Áp dụng bất đẳng thức 2 ta có

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \quad \text{và} \quad \frac{1}{1+c} = \frac{1}{1+\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{c^3\sqrt{abc}}}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} + \frac{2}{1+\sqrt{c^3\sqrt{abc}}}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+\sqrt{c^3\sqrt{abc}}} \right) \geq \frac{4}{1+\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{c^3\sqrt{abc}}}} = \frac{4}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 6. Cho $x; y; z$ là các số thực thỏa mãn $axy \geq 1$ và $z \geq 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} + \frac{1}{z^2+z+1} \geq \frac{2}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + \sqrt[3]{xyz} + 1}$$

Giải

Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức với hai biến $\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} \geq \frac{2}{xy + \sqrt{xy} + 1}$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{xy + \sqrt{xy} + 1} \right) + \left(\frac{1}{y^2+y+1} - \frac{1}{xy + \sqrt{xy} + 1} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{xy + \sqrt{xy} - x^2 - x}{x^2+x+1} + \frac{xy + \sqrt{xy} - y^2 - y}{y^2+y+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x(y-x) + \sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x})}{x^2+x+1} + \frac{y(x-y) + \sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{y^2+y+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{y + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}{y^2+y+1} - \frac{x + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}{x^2+x+1} \right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y) \left[xy(x-y) + y - x + \frac{\sqrt{y}(x^2+x) - \sqrt{x}(y^2+y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y) \left[xy(x-y) + y - x + \frac{\sqrt{xy}(x\sqrt{x} - y\sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y) \left[xy(x-y) + y - x + \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y + 1)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 \left[xy - 1 + \frac{\sqrt{xy}(x + \sqrt{xy} + y + 1)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Do $xy \geq 1$ nên bất đẳng thức được chứng minh.

Áp dụng cho kết quả trên ta có $\frac{1}{z^2+z+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + \sqrt[3]{xyz} + 1} \geq \frac{2}{z\sqrt[3]{xyz} + \sqrt{z\sqrt[3]{xyz}} + 1}$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } &\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} + \frac{1}{z^2+z+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + \sqrt[3]{xyz} + 1} \\ &\geq \frac{2}{z\sqrt[3]{xyz} + \sqrt{z\sqrt[3]{xyz}} + 1} + \frac{2}{xy + \sqrt{xy} + 1} \\ &\geq \frac{4}{\sqrt{xyz}\sqrt[3]{xyz} + \sqrt{\sqrt{xyz}\sqrt[3]{xyz}} + 1} = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + \sqrt[3]{xyz} + 1} \end{aligned}$$

Từ đó có điều phải chứng minh!

Ví dụ 7. Cho $x; y; z$ là các số thực thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức hai biến $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$.

Dựa vào bài toán trước ta dễ dàng chứng minh được bài toán này!

Các bài toán.

Câu 1. Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} 4x = \sqrt{4y+3} - \sqrt{2y} \\ \sqrt{\frac{2}{x} - 8x + 2\sqrt{1-2x}} = \frac{y}{x} + \frac{1}{4xy} \end{cases}$$

Giải

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $4x = \frac{2y+3}{\sqrt{4y+3} + \sqrt{2y}} \Leftrightarrow x > 0$

$$\bullet \quad VT = \sqrt{\frac{2}{x} - 8x + 2\sqrt{1-2x}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{x} - 8x + 2\sqrt{2x\left(\frac{1}{2x} - 1\right)}}$$

$$\stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{1}{4} \left[4 + \left(\frac{2}{x} - 8x \right) \right] + 2x + \left(\frac{1}{2x} - 1 \right) = \frac{1}{x}$$

$$\bullet \quad VP = \frac{y}{x} + \frac{1}{4xy} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{1}{4xy}} = \frac{1}{x}$$

Vậy $VP \geq VT$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}; y = \frac{1}{2}$

Câu 2. Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} x^2 + 7 = 4\sqrt{3y+1} \\ y^2 + xy = 2\sqrt{3x-2} \end{cases}$$

Giải

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x^2 + 7 = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3y+1} \stackrel{AM-GM}{\leq} 2^2 + (\sqrt{3y+1})^2 = 3y + 5 \Leftrightarrow x^2 - 3y + 2 \leq 0 \quad (1)$$

$$y^2 + xy = 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3x-2} \leq 1^2 + (\sqrt{3x-2})^2 = 3x - 1 \Leftrightarrow y^2 + xy - 3x + 1 \leq 0 \quad (2)$$

Lấy (1)+(2) ta được. $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{4} + \frac{3}{4}(x+y)^2 - 3(x+y) + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{4} + \frac{3}{4}(x+y-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 1$

Câu 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + y - 1 = \sqrt{2(y^2 - 2y + x + 2)} \\ \sqrt{x(x+y)} + \sqrt{(x-1)(y+1)} = \frac{x^2 - x + y + 1}{\sqrt{x-1}} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x > 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$.

Ta biến đổi hệ phương trình đã cho trở thành hệ phương trình .

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + y - 1 = \sqrt{2(y^2 - 2y + x + 2)} \\ \sqrt{(x^2 - x)(x + y)} + (x - 1)\sqrt{y + 1} = x^2 - x + y + 1 \end{cases}.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có $\sqrt{x+1} + y - 1 \leq \sqrt{(1+1)(y^2 - 2y + x + 2)}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-1} = y - 1$.

Sử dụng đánh giá $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$. Ta có các đánh giá sau

$$\begin{cases} \sqrt{(x^2 - x)(x + y)} \leq \frac{x^2 - x + x + 1}{2} \\ (x - 1)\sqrt{y + 1} \leq \frac{x^2 - 2x + 1 + y + 1}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x^2 - x)(x + 1)} + (x - 1)\sqrt{y + 1} \leq x^2 - x + y + 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x^2 - x} = \sqrt{x + y} \\ x - 1 = \sqrt{y + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{y + 1} = x - 1$.

Khi đó kết hợp lại ta sẽ có hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1} = y-1 \\ \sqrt{y+1} = x-1 \end{cases} \quad (x \geq 1, y \geq 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \sqrt{y+1} - \sqrt{x+1} \\ \sqrt{x+1} = y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + (\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}) = 0 \\ \sqrt{x+1} = y-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} \right) = 0 \\ \sqrt{x+1} = y-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x+1} = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x+1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x(x-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (3; 3)$.

Câu 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{4x^3 + 4xy^2}{2x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 - xy + y^2} = 2x + y \\ 2(2x - y)\sqrt{x - y} = x^2 - 5xy + 4x + y - 1 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện $x \geq y$.

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có

$$\sqrt{x^2 - xy + y^2} = 2x + y - \frac{4x^3 + 4xy^2}{2x^2 + xy + y^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - xy + y^2} = y \left(\frac{4x^2 - xy + y^2}{2x^2 + xy + y^2} \right)$$

$$\text{Do } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 > 0 \\ 4x^2 - xy + y^2 > 0 \\ 2x^2 + xy + y^2 > 0 \end{cases} \text{ nên ta suy ra } y > 0. \text{ Vì } \begin{cases} x \geq y \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0.$$

Mặt khác ta có các đánh giá sau .

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\sqrt{x^2 - xy + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2} \geq \frac{1}{2}(x+y)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

$$\frac{4x^3 + 4xy^2}{2x^2 - xy + y^2} \geq \frac{3x+y}{2} \quad (1).$$

Thật vậy, ta có $(1) \Leftrightarrow 8x^3 + 8xy^2 \geq (3x+y)(2x^2 - xy + y^2) \Leftrightarrow (x-y)^2(2x-y) \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $2x-y = x + (x-y) > 0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Từ hai đánh giá ta có $\frac{4x^3 + 4xy^2}{2x^2 - xy + y^2} + \sqrt{x^2 - xy + y^2} \geq \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(3x+y) = 2x+y$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình.

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left\{ (1; 1); \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right) \right\}$.

Câu 5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} = \sqrt{y} + y(1) \\ (y + \sqrt{xy} + x + x^2)(x+1) - 4 = 0(2) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (1) ta có

$$\frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{y(x-y) + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} = 0$$

Vậy $x = y$ hay $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{y + \sqrt{xy} - 2}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} = 0(*)$.

Nếu $x = -1$ thế vào phương trình (2) suy ra $-4 = 0$ (vô lí)

Nếu $x \neq -1$ từ (2) $\Rightarrow y + \sqrt{xy} = \frac{4}{x+1} + x^2 - x$ thế vào phương trình(*)

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\frac{4}{x+1} + x^2 - x - 2}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} = 0(**)$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh $\frac{4}{x+1} + x^2 - x - 2 \geq 0$ hoặc > 0

Đặt $f(x) = \frac{4}{x+1} + x^2 - x - 2$ với $x \geq 0$.

Khi đó, $f'(x) = \frac{-4}{(x+1)^2} + 2x - 1$ cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

Khảo sát ta thấy $\min f(x) = 0$ tại $x = 1 \Rightarrow f(x) \geq 0$

Khi đó dễ thấy phương trình $(**) > 0$ với $x, y \geq 0$

Với $x = y$ thế vào (2) $\Rightarrow (3x - x^2)(x + 1) - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ (thỏa) hay $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ (thỏa).

Câu 6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 6\sqrt{xy} - y = 6 \\ x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} = \sqrt{2(x^2 + y^2)} + 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện. $xy \geq 0, x^2 + y^2 \geq 0$.

Vì $x \leq 0, y \leq 0$ không thỏa hệ nên ta chỉ cần xét $x > 0, y > 0$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $6\sqrt{xy} \leq 3(x + y)$.

Do đó từ phương trình thứ nhất ta có $6 = x + 6\sqrt{xy} - y \leq x + 3(x + y) - y \Rightarrow 2x + y \geq 3$.

Mặt khác ta có $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$. Do đó từ phương trình thứ hai trong hệ ta có

$$x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} \geq x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{2}} = \frac{4(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}.$$

Ta sẽ đi chứng minh $\frac{4(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{2(x^2 + y^2)}$ (*).

Thật vậy, ta có (*) $\Leftrightarrow 2(x^3 + y^3) \geq (x^2 + y^2)\sqrt{2(x^2 + y^2)}$

$$\Leftrightarrow 2(x^3 + y^3) \geq (x^2 + y^2)^2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^6 - 3x^4y^2 + 4x^3y^3 + 3x^2y^4 + y^6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2(x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4) \geq 0 \quad (\text{luôn đúng } \forall x, y > 0)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Với các đánh giá này ta có

$$3 = x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq x + 2\sqrt{2(x^2 + y^2)} - \sqrt{2(x^2 + y^2)} = x + \sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

Mặt khác ta lại có $\sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq x + y$.

Do đó ta có $3 \geq x + x + y \Leftrightarrow 2x + y \leq 3$.

Vậy qua các đánh giá ta có được
$$\begin{cases} 2x + y \geq 3 \\ 2x + y \leq 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (1; 1)$.

Câu 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y - 1 = \sqrt{8 - 2y - 5x - x^6} \\ 6 - 2y^2 = \frac{5}{2}(x^6 + 1) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} y \geq 1 \\ 8 - 2y - 5x - x^5 \geq 0 \Leftrightarrow x^5 + 5x \leq 8 - 2y \leq x^5 + 5x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

Ta có $(y - 1)^2 = \left(\sqrt{8 - 2y - 5x - x^3}\right)^2 \Leftrightarrow x^8 + 5x + y^2 - 7 = 0 \quad (1)$

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\text{Và } 6 - 2y^2 = \frac{5}{2}(x^6 + 1) \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{5}{2} \cdot 2x^3 = 5x^3 \Leftrightarrow -5x^3 - 2y^2 + 6 \geq 0 \quad (2)$$

Lấy (1) + (2) ta được $(x^5 - 5x^3 + 5x - 2) + (1 - y^2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+x-1)^2 + (1-y^2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Thử lại thấy vô nghiệm.

$$\text{Câu 8. Giải hệ phương trình } \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y & (1) \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy-5x-3 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $2xy + 5x + 3 \geq 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \\ x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} \geq \sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2} + \sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2} = |x+y| \geq (x+y)$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y \geq 0$

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được phương trình

$$\begin{aligned} x\sqrt{2x^2+5x+3} &= 4x^2-5x-3 \Leftrightarrow (2x^2+5x+3) + x\sqrt{2x^2+5x+3} - 6x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x^2+5x+3}+3x)(\sqrt{2x^2+5x+3}-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2+5x+3} = -3x \\ \sqrt{2x^2+5x+3} = 2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x+3} = 2x \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x; y) = (3; 3)$.

$$\text{Câu 9. Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 & (1) \\ \frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4}} - \frac{y}{2} & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+y \neq 0 \\ y \neq 0 \\ \frac{x}{3y} + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra } \begin{cases} \frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} \geq 0 \\ \frac{x}{3y} + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x + \frac{3}{4}y \geq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 16 - 2xy + \frac{8xy}{x+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-4)\left[(x+y)^2+4(x+y)-2xy\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-4)\left[x^2+y^2+4(x+y)\right]=0 \quad (*)$$

Do $x+y > x+\frac{3}{4}y \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2+4(x+y) > 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x+y=4$.

Mặt khác, do $\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{2}{3}\left(x+\frac{3}{4}y\right) > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\frac{x^2}{8y}+\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}\right) \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{8y}\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}\right)}=\sqrt{\frac{x^3}{3y}+\frac{x^2}{4}}$$

Suy ra phương trình thứ hai của hệ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{8y}=\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}$

$$\text{Do đó hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ \frac{x^2}{8y}=\frac{2x}{3}+\frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 3x^2-16xy-12y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{24}{7} \\ y=\frac{4}{7} \\ x=-8 \\ y=12 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{\left(\frac{24}{7};\frac{4}{7}\right),(-8;12)\right\}$.

Câu 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(1-x)+y^3(1-y)=12xy+18 & (1) \\ |3x-2y+10|+|2x-3y|=10 & (2) \end{cases}$

Giải

Nhận thấy $(x;y)=(0;0)$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Ta có $(1) \Leftrightarrow x^3+y^3=(x^2-y^2)^2+2(xy+3)^3 \geq 0 \Rightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0 \quad (*)$

Áp dụng bất đẳng thức $|A|+|B| \geq |A-B|$ ta lại có

$$10=|3x-2y+10|+|2x-3y| \geq |x+y+10| \geq 10$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y+10)(2x-3y) \leq 0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ y=-x \end{cases}$$

Thay $y=-x$ vào phương trình (1) ta có phương trình

$$2x^4-12x^2+18=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3}, \text{ do } -2 \leq x \leq 0.$$

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(-\sqrt{3};\sqrt{3})$.

Câu 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y+1)(x+y+1+xy)=12xy & (1) \\ y\sqrt{3x-2x^2-1}+x\sqrt{1+y-2y^2}+xy=1 & (2) \end{cases}$

Giải

$$\text{Điều kiện} \begin{cases} 3x-2x^2-1 \geq 0 \\ 1+y-2y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

- Với $(x+y+1)(x+y+1+xy)=0$ hệ đã cho vô nghiệm.
- Với $(x+y+1)(x+y+1+xy) \neq 0$

| Phương pháp bất đẳng thức

Từ phương trình (1) cho ta $\frac{1}{x+y+1} - \frac{1}{x+y+1+xy} = \frac{1}{12}$

Ta lại có $\frac{1}{x+y+1} - \frac{1}{x+y+1+xy} \leq \frac{1}{x+y+1} - \frac{4}{(x+y+2)^2}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2}, t \in [1; 3]$ trong đó $t = x+y+1$

Lập bảng biến thiên ta tìm được $f(t) \leq f(3) = \frac{1}{12}$

Vậy hệ tương đương $\begin{cases} x+1=y+1 \\ x+y+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại ta có nghiệm của hệ đã cho là $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Cách 2. Ta có $\begin{cases} x+y+1 \geq \frac{1}{2} + \frac{-1}{2} + 1 = 1 > 0 \\ x+y+1+xy \geq \frac{1}{2} + \frac{-1}{2} + 1 + 1 \cdot \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$

Nên từ $12xy = (x+y+1)(x+y+1+xy) > 0 \Rightarrow xy > 0$

Mà $x > 0 \Rightarrow y > 0$. Nên từ phương trình (2) suy ra $xy \leq 1$ (*)

Từ phương trình (1) và áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$12xy = (x+y+1)(x+y+1+xy) \geq 3\sqrt{x \cdot y \cdot 1} \cdot (2\sqrt{x \cdot y} + 2\sqrt{1 \cdot xy}) = 12(xy)^{\frac{5}{6}} \Rightarrow xy \geq 1 (**)$$

Từ (*), (**) cho ta $\begin{cases} x, y > 0 \\ x = y \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$

Thử lại ta có nghiệm của hệ đã cho là $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Câu 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = xy\sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ 4\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 9(y-1)\sqrt{2x-2} \end{cases}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) \geq 2\sqrt{xy}(x^2 - xy + y^2)$$

Mặt khác ta có $x^2 - xy + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow x^3 + y^3 \geq \frac{2(x+y)^2 \sqrt{xy}}{4} = \sqrt{xy} \sqrt{\frac{(x^2 + y^2 + 2xy)^2}{4}}$
 $\geq \sqrt{xy} \sqrt{2xy(x^2 + y^2)} = xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y$, thay vào phương trình 2 ta được

$$4\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 9(x-1)\sqrt{2x-2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+2} + 2\sqrt{(x-1)(x+1)} = 9(x-1)\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) = 9(x-1)\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = (9x-11)\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

Câu 13. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + 6y\sqrt{x-1} + 12y = 4 & (1) \\ \frac{xy}{1+y} + \frac{1}{xy+y} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Ta có $(2) \Leftrightarrow \frac{y}{\frac{1}{x} + \frac{y}{x}} + \frac{\frac{1}{x}}{y + \frac{y}{x}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{y}{x}}}$

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = y$, ta có $\frac{a}{b+ab} + \frac{b}{a+ab} = \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$\frac{a}{b+ab} + \frac{b}{a+ab} \geq \frac{(a+b)^2}{ab+a^2b+ab+b^2a} = \frac{(a+b)^2}{ab(a+b)+2ab} = \frac{1}{\frac{ab}{a+b} + \frac{2ab}{(a+b)^2}} \geq \frac{1}{\frac{ab}{2\sqrt{ab}} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ hay $y = \frac{1}{x}$

Thay vào (2) ta có $2\sqrt{x-1} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 4(x-1) = (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 10$

Từ đó cho ta nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(10; \frac{1}{10}\right)$

Câu 14. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x-3} - \sqrt{y} = 2x-6 & (1) \\ x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}, y \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 7(x+y)xy &= (x+y)^3 + 4(x+y)xy \geq 2\sqrt{(x+y)^3 4(x+y)xy} \\ &= 4(x+y)^2 \sqrt{xy} = 4\sqrt{xy} \left[(x^2 + y^2) + 2xy \right] \geq 4\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{(x^2 + y^2)2xy} = 8xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

Như vậy $x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 8xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Với $x = y$ thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} &= 2x-6 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2(\sqrt{2x-3} - \sqrt{x})(\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x-3} - \sqrt{x})(2\sqrt{2x-3} + 2\sqrt{x} - 1) &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Do $2\sqrt{2x-3} + 2\sqrt{x} - 1 > 0, \forall x \geq \frac{3}{2}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (3; 3)$.

Câu 15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x\sqrt{y-1} + y\sqrt{2x-1} = 4 & (1) \\ (2x+y-1)^3 = 27x(2-x) & (2) \end{cases}$$

Giải

| Phương pháp bất đẳng thức

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}, y \geq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức BCS ta có.

$$[VT(1)]^2 = (2x \cdot \sqrt{y-1} + y \cdot \sqrt{2x-1})^2 \leq (1+1)[4x^2(y-1) + y^2(2x-1)] \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta lại có

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^2(y-1) &\leq \left(\frac{x+x+y-1}{3}\right)^3 = \left(\frac{2x+y-1}{3}\right)^3 \\ \bullet \quad y^2(2x-1) &= 4 \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2}(2x-1) \leq 4 \left(\frac{y+2x-1}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

Kết hợp với (*) cho ta $[VT(1)]^2 \leq 16 \left(\frac{y+2x-1}{3}\right)^3$

Từ (2) ta lại có $(2x+y-1)^3 = 27x(2-x) \Rightarrow \left(\frac{2x+y-1}{3}\right)^3 = x(2-x) = 1 - (x-1)^2 \leq 1$

Do vậy $[VT(1)]^2 \leq 16 \left(\frac{y+2x-1}{3}\right)^3 \leq 16 \Rightarrow VT(1) \leq 4$

Kết hợp với (1) ta có $4 = VP(1) = VT(1) \leq 4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$.

Câu 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)\sqrt{y^2+5} + (y-1)\sqrt{x^2-3} = 10 & (1) \\ \left(x-y+\frac{1}{2}\right)^2 + (xy-3)^2 = \frac{5}{4} & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x^2 \geq 3$.

Ta có (2) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - y = 8 - (xy - 4)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + x - y \leq 8 \quad (*)$

Lại có
$$\begin{cases} (y-1)\sqrt{x^2-3} \leq \frac{(y-1)^2 + x^2 - 3}{2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y - 2}{2} \\ (x+1)\sqrt{y^2+5} \leq \frac{(x+1)^2 + y^2 + 5}{2} = \frac{x^2 + y^2 + 2x + 6}{2} \end{cases}$$

Nên từ (1) ta lại có

$$10 = (x+1)\sqrt{y^2+5} + (y-1)\sqrt{x^2-3} \leq x^2 + y^2 + x - y + 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + x - y \geq 8 \quad (**)$$

Từ (*), (**) suy ra hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ y-1 = \sqrt{x^2-3} \\ x+1 = \sqrt{y^2+5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 2)$.

Câu 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{8-x^2} + y\sqrt{3-2y} = 5 & (1) \\ (3-2y)\sqrt{x+1} = 2y + \sqrt{4-y} - 2 & (2) \end{cases}$
--

Giải

Điều kiện $y \leq \frac{3}{2}, -1 \leq x \leq 2\sqrt{2}$

Ta có (2) $\Leftrightarrow (2 - \sqrt{4-y})(2\sqrt{4-y} + 3) = (3-2y)\sqrt{x+1}$

Do $(3-2y)\sqrt{x+1} \geq 0, \forall \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ -1 \leq x \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$.

Suy ra $(2 - \sqrt{4-y})(2\sqrt{4-y} + 3) \geq 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{4-y} \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

- $x\sqrt{8-x^2} \leq \frac{x^2 + (8-x^2)}{2} = 4$
- $y^2(3-2y) \leq \left(\frac{y+y+(3-2y)}{3}\right)^3 = 1 \Rightarrow y\sqrt{3-2y} \leq 1$

Hay $VT(1) \leq 5 = VP(1)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3-2y \\ x = \sqrt{8-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Thử lại ta thấy, hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$.

Câu 18. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 25xy - 23y^2 - 9y = 12y\sqrt{(2x-3y-1)(x+y)} + 2x\sqrt{(x-y)(4y-x)} & (1) \\ \left(x - \frac{5y}{2}\right)^2 + \sqrt{x - \frac{5y}{2}} + \sqrt[4]{x - \frac{5y}{2}} - \frac{32xy}{405} + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (1) ta được

$$y(3\sqrt{2x-3y-1} - 2\sqrt{x+y})^2 + x(\sqrt{x-y} - \sqrt{4y-x})^2 = 0$$

Từ phương trình (2) ta được $VP \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{32xy}{405} > 0 \Rightarrow xy > 0$ do đó xy cùng dấu

Do đó VT của pt(1) chỉ có thể là $VT \leq 0$ hoặc $VT \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y(3\sqrt{2x-3y-1} - 2\sqrt{x+y})^2 = 0 \\ x(\sqrt{x-y} - \sqrt{4y-x})^2 = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta tìm được $\begin{cases} x = \frac{45}{8} \\ y = \frac{9}{4} \end{cases}$

Kiểm tra thì thấy thỏa mãn hệ phương trình ban đầu

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(\frac{45}{8}; \frac{9}{4}\right)$

Câu 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 + 4x = 4(y\sqrt{x+1} - 1) & (1) \\ (x-1)^3 - 8\sqrt{y} = 3y^2 - x - 53 & (2) \end{cases}$

Giải

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow y^2 - 2y\sqrt{4x+4} + (4x+4) = 0 \Leftrightarrow (y - \sqrt{4x+4})^2 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{4x+4}$$

$$\text{Thay vào (2) ta có phương trình } x^3 - 3x^2 - 8x + 40 = 8\sqrt{4x+4} \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có .

$$VP(*) = 8\sqrt{4x+4} = 2.2.2.\sqrt[4]{4x+4} \underset{AM-GM}{\leq} \frac{2^4 + 2^4 + 2^4 + 4x+4}{4} = x+13 .$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=3$.

Ta sẽ chứng minh . $VT(*) \geq x+13, \forall x \geq -1 \quad (*)$.

$$\text{Thật vậy } x^3 - 3x^2 - 8x + 40 \geq x+13 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 27 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x+3) \geq 0$$

Luôn đúng với mọi $x \geq -1$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=3$.

$$\text{Từ đó cho ta } \begin{cases} VP(*) \leq x+13 \\ VT(*) \geq x+13 \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 8\sqrt{4x+4} = x+13 \\ x^3 - 3x^2 - 8x + 40 = x+13 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Thay trở lại, ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (3; 4)$.

$$\text{Câu 20. Giải hệ phương trình } \begin{cases} (y-2x)^2 + 4 = y - 6x + 2\sqrt{2(x+1)(y+1)} & (1) \\ (y-1)(x^2+x) + 1 = \sqrt{y}.\sqrt[3]{1-3x} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in R)$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow [(y-2x)^2 - 2(y-2x) + 1] + (y+1 - 2\sqrt{(y+1)(2x+2)} + 2x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2x-1)^2 + (\sqrt{y+1} - \sqrt{2x+2})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x-1=0 \\ \sqrt{y+1} - \sqrt{2x+2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=2x+1$$

$$\text{Thay vào (2) ta có phương trình } 2x^3 + 2x^2 + 1 = \sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x}$$

$$\text{Từ phương trình trên suy ra } x \geq -\frac{1}{2} \text{ nên } 2x^3 + 2x^2 + 1 = 2x^2(x+1) + 1 > 0, \text{ suy ra}$$

$$\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x} > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{1-3x} > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có .

$$\begin{cases} 1.\sqrt{1+2x} \leq \frac{1+(1+2x)}{2} \\ 1.1.\sqrt[3]{1-3x} \leq \frac{1+1+(1-3x)}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 < \sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x} \leq (1+x)(1-x).$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } 2x^3 + 2x^2 + 1 \geq (1-x)(1+x) \quad (*)$$

$$\text{Thật vậy } (*) \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(2x+3) \geq 0 \text{ đúng với mọi } x \geq -\frac{1}{2} \text{ hay } (*) \text{ được chứng minh.}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (0; 1)$.

Câu 21. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} & (1) \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Từ phương trình (1) áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} \right) \quad (3)$$

Mặt khác ta có
$$\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} - \frac{2}{1+2xy} = \frac{2(y-x)^2(2xy-1)}{(1+2xy)(1+2x^2)(1+2y^2)} \leq 0,$$

Do từ (*) ta có $0 \leq xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 1+2xy > 0, 2xy-1 < 0$.

Khi đó (3) là một nghiệm của hệ phương trình

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \right)^2 \leq \frac{4}{1+2xy} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$, thế vào phương trình (2) ta được

$$2\sqrt{x-2x^2} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow 2x^2 - x + \frac{1}{81} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{9-\sqrt{73}}{36} \\ x = y = \frac{9+\sqrt{73}}{36} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left(\frac{9 \pm \sqrt{73}}{36}; \frac{9 \pm \sqrt{73}}{36} \right)$.

Câu 22. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 y (2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}) = x + \sqrt{x^2 + 1} & (1) \\ \sqrt{3+x} - \sqrt{2-x} = \frac{1}{2y} - 4\sqrt{\frac{1}{2y} + 3} + 8 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ y > 0 \\ y \leq -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Từ (1) ta có $VP(1) = x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x| \geq 0 \Rightarrow VT(1) > 0 \Rightarrow y > 0$

Lại có (2)
$$\Leftrightarrow \sqrt{3+x} - \sqrt{2-x} = \left[\left(\frac{1}{2y} + 3 \right) - 4\sqrt{\frac{1}{2y} + 3} + 4 \right] + 1$$

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+x} - \sqrt{2-x} = \left(\sqrt{\frac{1}{2y} + 3} - 2 \right)^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{3+x} - \sqrt{2-x} \geq 1 \Rightarrow x \geq \sqrt{2-x} \Rightarrow x \geq 1$$

Từ điều kiện $x \geq 1$ ta có (1) $\Leftrightarrow 2y + 2y\sqrt{4y^2 + 1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{1+t^2}, t > 0$, ta có $f'(t) = 1 + \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} > 0, \forall t > 0$.

Do đó $f(2y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2y}$

Thay vào (2) ta có phương trình $x - 5\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} + 8 = 0$ (*)

Xét hàm số $f(x) = x - 5\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} + 8, x \geq 1$ ta có

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{2\sqrt{x+3} - 4}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right)$$

Do $2\sqrt{x+3} - 4 \geq 0, \forall x \geq 1$ và $\frac{1}{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = \frac{2x+1}{\sqrt{(2-x)(x+3)}(\sqrt{2-x} + \sqrt{x+3})} > 0, \forall x \geq 1$

Nên $f'(x) > 0, \forall x \geq 1$.

Đồng thời $f(1) = 0$ suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 23. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{y+2x-1} + \sqrt{1-y} = y+2 & (1) \\ x\sqrt{x} = \sqrt{y(x-1)} + \sqrt{x^2-y} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} y+2x-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 1-y \geq 0 \\ y(x-1) \geq 0 \\ x^2-y \geq 0 \end{cases}$$

Nhận thấy $(x; y) = (0; y)$ không là nghiệm của hệ.

Với $x \neq 0$, ta có $\sqrt{y(x-1)} - \sqrt{x^2-y} = \frac{x(y-x)}{\sqrt{y(x-1)} + \sqrt{x^2-y}} = \frac{x(y-x)}{x\sqrt{x}} = \frac{y-x}{\sqrt{x}}$

Kết hợp với (2) cho ta
$$\begin{cases} \sqrt{y(x-1)} + \sqrt{x^2-y} = x\sqrt{x} \\ \sqrt{y(x-1)} - \sqrt{x^2-y} = \frac{y-x}{\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{y(x-1)} = x\sqrt{x} + \frac{y-x}{\sqrt{x}}$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{y(x^2-x)} = (x^2-x) + y \Rightarrow [(x^2-x) - y]^2 = 0 \Rightarrow y = x^2 - x$$

Thay vào phương trình (1) cho ta $\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{-x^2+x+1} = x^2 - x + 2$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x-1} \leq \frac{x^2+x}{2} \\ \sqrt{-x^2+x+1} \leq \frac{-x^2+x+2}{2} \end{cases} \Rightarrow VT(*) \leq x+1$$

Ta sẽ chứng minh $VP(*) \geq x+1$.

Thật vậy $x^2 - x + 2 \geq x + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

$$\text{Vậy } \begin{cases} VT(*) \leq x+1 \\ VP(*) \geq x+1 \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} VT(*) = x+1 \\ VP(*) = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Thử lại ta thấy nghiệm của phương trình đã cho là $(x; y) = (1; 0)$.

$$\text{Câu 24. Giải hệ phương trình } \begin{cases} (x+2y-1)\sqrt{2y+1} = (x-2y)\sqrt{x+1} & (1) \\ 2xy+5y = \sqrt{(x+1)(2y+1)} & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2y+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

Nhận thấy $(x; y) = \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ không là nghiệm của hệ. Từ phương trình (1) ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x-2y+4y-1)\sqrt{2y+1} = (x-2y)\sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow (4y-1)\sqrt{2y+1} = (x-2y)(\sqrt{x+1} - \sqrt{2y+1}) \\ &\Leftrightarrow (4y-1)\sqrt{2y+1} = \frac{(x-2y)^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2y+1}} \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{1}{4} \quad (*) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta lại có

$$\begin{aligned} (2) &\Rightarrow 2xy+5y = \sqrt{(x+1)(2y+1)} \leq \frac{x+1+2y+1}{2} \\ &\Rightarrow x+2 \geq 4y(x+2) \Rightarrow (x+2)(1-4y) \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{1}{4}, \text{ do } x \geq -1 \quad (**) \end{aligned}$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ suy ra hệ có nghiệm khi } \begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ x-2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Thử lại suy ra hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

$$\text{Câu 25. Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{x^4 - 2x^2(y-1) + 4x + y^2 - 6y + 31}{4\sqrt{27x-27y+162} + 6\sqrt{x-y+4}} = 1 & (1) \\ (\sqrt{y-2x} + \sqrt{y-5})^2 + 3x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có phương trình (1) ta có

$$x^4 - 2x^2(y-1) + 4x + y^2 - 6y + 31 = 4\sqrt{27x-27y+162} + 6\sqrt{x-y+4}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có } \begin{cases} 4\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 3(x-y+6)} \leq x-y+15 \\ 6\sqrt{x-y+4} \leq 3x-3y+15 \end{cases}$$

Do đó $VP \leq 4x - 4y + 30$

Ta lại có $VT = x^4 - 2x^2(y-1) + (y-1)^2 + 4x - 4y + 30$

$$= (x^2 - y + 1)^2 + 4x - 4y + 30 \geq 4x - 4y + 30$$

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\text{Do đó } VT = VP \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ x - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Kiểm tra lại hệ phương trình ban đầu thì có nghiệm $(2;5)$ là thỏa mãn.

$$\text{Câu 26. Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+y}} & (1) \\ x^2 + y^2 + 4xy - 4x + 2y - 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > -2; y > 1 \\ x + y > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow 2(x+y)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{x+y}\right)^2 = 2$$

$$\text{Và } (1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+y}{x+2}} + \sqrt{\frac{x+y}{y-1}} = 2. \text{ Đặt } \sqrt{\frac{x+y}{x+2}} = a; \sqrt{\frac{x+y}{y-1}} = b \quad (a, b > 0).$$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} a + b = 2 \\ \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} = 2 \end{cases} (*). \text{ Áp dụng bất đẳng thức } AM - GM \text{ ta có}$$

$$\begin{cases} (2) \Rightarrow 2 = \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{b^4}} \Rightarrow \frac{1}{a^2 \cdot b^2} \leq 1 \Rightarrow ab \geq 1 \\ (1) \Rightarrow 2 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1. \text{ Với } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{x+2} = 1 \\ \frac{x+y}{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (-1; 2)$.

$$\text{Câu 27. Giải hệ phương trình } \begin{cases} 4xy + x + 4\sqrt{(2-x)(y+2)} = 14 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Cách 1. Điều kiện $(2-x)(y+2) \geq 0$

$$\text{Từ phương trình (1) ta có } 2 = (x+1)^2 + y^2 \geq 2(x+1)y \Rightarrow y(x+1) \leq 1 \quad (*)$$

$$\text{Cũng từ phương trình (1) ta có } (x+1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \Rightarrow y+2 > 0$$

Do đó (2) tương đương

$$14 - 4xy - x = 2 \cdot \sqrt{2-x} \cdot (2\sqrt{y+2}) \leq (2-x) + 4(y+2) \Rightarrow y(x+1) \geq 1 \quad (**)$$

Từ (*), (**) suy ra hệ đã cho có nghiệm khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x+1 = y \\ \sqrt{2-x} = 2\sqrt{y+2} \\ y(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Thử lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (-2; -1)$

Cách 2. Điều kiện $(2-x)(y+2) \geq 0$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \Rightarrow y+2 > 0 \Rightarrow 2-x > 0$

Do đó (1) $\Leftrightarrow 4(xy+y-1) = (\sqrt{2-x} - 2\sqrt{2+y})^2 \geq 0 \Rightarrow xy+y-1 \geq 0 (*)$

Lại có (2) $\Leftrightarrow (1-xy-y) = (x-y+1)^2 \geq 0 \Rightarrow xy+y-1 \leq 0 (**)$

Từ (*), (**) suy ra hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} \sqrt{2-x} = 2\sqrt{2+y} \\ x-y+1 = 0 \\ xy+y-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Hay hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (-2; -1)$.

Câu 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+2)^2 - x+y (y-1) + (x+y)^2 = 0 & (1) \\ (y-1)(x+y)^2 - y+1 = x+y (y^2-2y) & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$
--

Giải

Từ phương trình (1) ta có $|x+y|(y-1) \geq 0 (*)$

- Nếu $|x+y| = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = -1 \quad (L)$
- Nếu $|x+y| \neq 0 \Rightarrow y - 1 > 0$

Mặt khác từ (2) suy ra $|x+y| - \frac{1}{|x+y|} = y - 1 - \frac{1}{y-1}$

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{1}{t} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0 \quad (\forall t > 0)$

Hàm số luôn đồng biến $\forall t > 0$ nên $f(|x+y|) = f(y-1) \Leftrightarrow |x+y| = y-1$

Thế vào (1) suy ra $(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow |y-2| = y-1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

Thử lại ta thấy, các nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(-2; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y^3 + y^6 = \sqrt{xy - x^2y^2} & (1) \\ 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} = 2x^2 + \sqrt{1 + (2x-y)^2} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện $xy - x^2y^2 \geq 0 (*)$

Ta có $y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(xy - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^6 + 2y^3 + 2x^2 + 4xy^3 \leq \frac{1}{2} + y^3 + 4xy^3$

Cộng với (2) ta được

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow y^6 + 2y^3 + 2x^2 + 4xy^3 + 2x^2 + \sqrt{1 + (2x-y)^2} \leq 1 + 2y^3 + 8xy^3 \\ &\Leftrightarrow y^6 + 4x^2 - 4xy^3 + \sqrt{1 + (2x-y)^2} \leq 1 \Leftrightarrow (y^3 - 2x)^2 + \sqrt{1 + (2x-y)^2} \leq 1 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi
$$\begin{cases} y-2x=0 \\ y^3-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3-y=0 \\ x=\frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y=-1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

| Phương pháp bất đẳng thức

Thử lại ta thấy, nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.

Câu 30. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + \sqrt{2(x^4 + y^4)} = 1 & (1) \\ x^5 y + xy^5 = \frac{2}{27} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Từ (2) ta có $xy(x^4 + y^4) = \frac{2}{27} > 0 \Rightarrow xy > 0$. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$1 - xy = \sqrt{2(x^4 + y^4)} \geq 2|xy| = 2xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}; \quad x^4 + y^4 = \frac{(1 - xy)^2}{2}$$

Xét $VT = xy(x^4 + y^4) = xy \frac{(1 - xy)^2}{2} = 2xy \cdot \frac{1 - xy}{2} \cdot \frac{1 - xy}{2} \leq 2 \left(\frac{xy + \frac{1 - xy}{2} + \frac{1 - xy}{2}}{3} \right)^3 = \frac{2}{27}$

Dấu bằng xảy ra khi
$$\begin{cases} xy = \frac{1 - xy}{2} \\ xy = \frac{1}{3} \\ x^4 = y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Thử lại ta thấy, nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$.

Bình luận.

Đối với hệ phương trình trên ta có thể biến đổi từ (1) như sau
$$\begin{cases} xy \leq 1 \\ x^4 + y^4 = \frac{(1 - xy)^2}{2} \end{cases}$$

Thế vào phương trình (2) ta có $xy \frac{(1 - xy)^2}{2} = \frac{2}{27}$

Bài 31. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \left(\sqrt{b(3 - a^2 - b)} - a\sqrt{b} \right) (\sqrt{b} - a) + (3 - a^2)a = 2(1) \\ a^2 + b^2 + \sqrt{a} = 3b(2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện. $a \geq 0; b \geq 0$.

Ta sẽ làm việc với $PT(1)$. Nhận thấy một dấu hiệu rất đặc biệt

$$\sqrt{b(3 - a^2 - b)} \text{ và } (3 - a^2)a$$

Nên ta sẽ bung phương trình ra và ghép để có $(3 - a^2 - b)$ và đặc lượng $\sqrt{3 - a^2 - b}$, và khi đó bài toán thực sự bắt đầu.

Đặt $a = x, \sqrt{b} = y$

Biến đổi $PT(1) \Leftrightarrow (y\sqrt{3 - x^2 - y^2} - xy)(y - x) + (3 - x^2)x = 2$

$$\Leftrightarrow x^2 y + y^2 \sqrt{3 - x^2 - y^2} + (3 - x^2 - y^2)x - xy\sqrt{3 - x^2 - y^2}$$

Đặt $\sqrt{3-a-b} = z \Rightarrow x^2y + y^2z + z^2x - xyz = 2$ với $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

Ta sẽ chứng minh $P = x^2y + y^2z + z^2x - xyz \leq 2$ với $x, y, z \geq 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Thật vậy. Giả sử $x \geq y \geq z$. Ta có. $z(x-y)(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow yz^2 \geq y^2z + z^2x - xyz$

$$\Rightarrow P \leq y(z^2 + x^2) = y(3 - y^2) = \sqrt{y^2(3 - y^2)} = 2\sqrt{y^2 \cdot \frac{3 - y^2}{2} \cdot \frac{3 - y^2}{2}} \leq 2\sqrt{\frac{\left(y^2 + \frac{3 - y^2}{2} + \frac{3 - y^2}{2}\right)^3}{27}} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1 \Rightarrow a = b = 1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $a = b = 1$.

Bài 32. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x+3}{y+3} + \frac{y+3}{5} + \frac{5}{x+3} \\ x^3 + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 8 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện. $x, y \geq 0$

Ta sẽ chứng minh một kết quả tổng quát, một kết quả rất thường được sử dụng vào chế tác hệ phương trình với phương thức đánh giá, sau đây tôi xin giới thiệu một cách rất nhanh, rất đơn giản

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x+k}{y+k} + \frac{y+k}{z+k} + \frac{z+k}{x+k}$$

Sử dụng phương pháp SOS – Schur ta có

Không mất tính tổng quát, giả sử $z = \min\{x, y, z\}$

$$\text{Ta có } \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - 3 = \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(x-z)(y-z)}{zx}$$

$$\text{Và } \frac{x+k}{y+k} + \frac{y+k}{z+k} + \frac{z+k}{x+k} - 3 = \frac{(x-y)^2}{(x+k)(y+k)} + \frac{(x-z)(y-z)}{(x+k)(z+k)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x+k)(y+k)} \right) (x-y)^2 + \left(\frac{1}{zx} - \frac{1}{(x+k)(z+k)} \right) (x-z)(y-z) \geq 0$$

Theo giả thiết ta có. $(x-z)(y-z) \geq 0$

$$\text{Ta có } \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x+k)(y+k)} \geq 0 \text{ và } \frac{1}{zx} - \frac{1}{(x+k)(z+k)} \geq 0 \quad \forall k \geq 0$$

Từ đó bất đẳng thức được chứng minh!

Áp dụng vào bài toán suy ra $x = y = 2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 2$.

Bài 33. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{x-y} = \sqrt{5} \\ |(x-y+1)(x-2y+1)y| = \sqrt{5} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq y \geq 1$

Đặt $\sqrt{x} = a$; $\sqrt{y-1} = b$; $\sqrt{x-y} = c$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = \sqrt{5} \\ \left| (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) \right| = \sqrt{5} \end{cases}$$

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó ta có

$$a + b = \sqrt{5} - c \leq \sqrt{5}. \text{ Đặt } P = \left| (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) \right|, \text{ ta sẽ chứng minh } P \leq \sqrt{5}.$$

Thật vậy. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$\begin{aligned} P^2 &= (a^2 - b^2)^2 (b^2 - c^2)^2 (c^2 - a^2)^2 \leq a^4 b^4 (a - b)^2 (a + b)^2 \leq 5a^4 b^4 (a - b)^2 \\ &\leq 5 \left[\frac{4ab + (a - b)^2}{5} \right]^5 \leq 5 \left[\frac{(a + b)^2}{5} \right]^5 \leq 5 \Rightarrow P \leq \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra nên $(a; b; c) = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}; \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; 0 \right)$. Thử lại thấy không thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 34. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{(x+1)(3-y)} + \sqrt{xy} - \sqrt{x} = 2x + 2 & (1) \\ 3\sqrt{(3x+8)(y+6)} + \sqrt{x} = 12 + \sqrt{xy} & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} (x+1)(3-y) \geq 0 \\ x \geq 0 \\ xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Cộng (1), (2) theo từng vế ta được

$$4\sqrt{(x+1)(3-y)} + 6\sqrt{(3x+8)(y+6)} = 4x + 28 \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có.

$$\begin{cases} 4\sqrt{(x+1)(3-y)} \leq 1 + 1 + (x+1) + (3-y) = 6 + x - y \\ 6\sqrt{(3x+8)(y+6)} \leq 8 + (3x+8) + (y+6) = 3x + y + 22 \end{cases} \Rightarrow VT(*) \leq 4x + 28 = VP(*)$$

$$\text{Do vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x + 1 = 3 - y \\ 8 = 3x + 8 = y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $(x; y) = (0; 2)$.

Câu 35. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x-2} - \sqrt{1-y} = x & (1) \\ \sqrt{(x+3)(5-y)} + \sqrt{y^2-3y+2} + x\sqrt{2-y} = 2x - y + 4 & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ y \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(5-y)} + \sqrt{y-1} \cdot \sqrt{2-y} + x\sqrt{2-y} = 2x - y + 4 \quad (3)$$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow \sqrt{1-y} = \sqrt{3x-2} - x$, thay vào (3) ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+3)(5-y)} + (\sqrt{3x-2}-x)\sqrt{2-y} + x\sqrt{2-y} = 2x-y+4 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(5-y)} + \sqrt{(3x-2)(2-y)} = 2x-y+4 \quad (*) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{cases} \sqrt{(3x-2)(2-y)} \leq \frac{3x-2+2-y}{2} = \frac{3x-y}{2} \\ \sqrt{(x+3)(5-y)} \leq \frac{x-y+8}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } VT(*) \leq \frac{3x-y}{2} + \frac{x-y+8}{2} = 2x-y+4 = VP(*).$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=2-y \\ x+3=5-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(1;1)$.

$$\text{Câu 36. Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} + 1 = 2\left(\frac{x+y}{xy}\right) & (1) \\ 6\sqrt[3]{(x+1)(y+1)^2} + 3\sqrt{(2x-1)(2y-1)} = 5x+7y+3 & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x, y \neq 0 \\ (2x-1)(2y-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{x} - \frac{2}{y} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{y}-1\right)^2 = 1$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 0 \leq \frac{1}{x} \leq 2 \\ 0 \leq \frac{1}{y} \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{cases} 6\sqrt[3]{(x+1)(y+1)^2} \leq 6 \frac{(x+1)+(y+1)+(y+1)}{3} = 2x+4y+6 \\ 3\sqrt{(2x-1)(2y-1)} \leq 3 \frac{(2x-1)+(2y-1)}{2} = 3x+3y-3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } VT(2) \leq 5x+7y+3 = VP(*)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=y+1 \\ 2x-1=2y-1 \end{cases} \Rightarrow x=y$$

$$\text{Thay vào (1) ta có } \left(\frac{1}{x}-1\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là } (x;y) = \left\{ (2+\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}), (2-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}) \right\}.$$

$$\text{Câu 37. Giải hệ phương trình } \begin{cases} 4(1+2\sqrt{y+1})\sqrt{x-2} = 1-4y \\ \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{y+1}+1} + \frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{x-2}+1} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Giải

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x-2}=a, \sqrt{y+1}=b \quad (a, b \geq 0)$$

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 8ab + 4a = 1 - 4(b^2 - 1) \\ \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(a+b)^2 = 4 + (2a-1)^2 \quad (1) \\ \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = \frac{2}{3} \quad (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $(a+b)^2 \geq 1 \Rightarrow a+b \geq 1$

Từ (2) ta lại có .

$$VT(*) = \frac{a^2}{ab+b} + \frac{b^2}{ab+a} \geq \frac{(a+b)^2}{2ab+(a+b)} \geq \frac{(a+b)^2}{2 \frac{(a+b)^2}{4} + (a+b)} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{a+b}} \geq \frac{2}{3}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}.$$

$$\text{Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là } (x; y) = \left(\frac{9}{4}; -\frac{3}{4}\right).$$

Câu 38. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{y(x-2)} + \sqrt{x(y+2)} = x+y \quad (1) \\ \sqrt{y+3} + \frac{4(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})}{3(\sqrt{y+1})^2} = 3 \quad (2) \end{cases}$$

Giải

Từ điều kiện $x \geq 2 \Rightarrow y \geq 0$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$VT(1) = \sqrt{y(x-2)} + \sqrt{x(y+2)} \leq \frac{y+(x-2)}{2} + \frac{x+(y+2)}{2} = x+y = VP(1)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-2 \\ x = y+2 \end{cases} \Leftrightarrow y = x-2$$

$$\text{Do đó } (1) \Rightarrow y = x-2$$

Thay vào (2) ta có phương trình

$$\sqrt{x+1} + \frac{4(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})}{3(\sqrt{x-2}+1)^2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \frac{4}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x-2}+1)^2} = 3$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x+1}=a; \sqrt{x-2}=b \quad (a > b \geq 0) .$$

$$\text{Ta có phương trình } . a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} = 3$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ta

$$a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} + 1 = (a-b) + \left(\frac{b+1}{2}\right) + \left(\frac{b+1}{2}\right) + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2}$$

$$\geq 4\sqrt{(a-b)\left(\frac{b+1}{2}\right)^2} \cdot \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} = 4 \Rightarrow a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}.$$

Thay trở lại ta tìm được $x=3$. Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

Câu 39. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x+y}} - \frac{x}{(y+\sqrt{x})^2} = \frac{y^4}{(x+y^2)^2} & (1) \\ \sqrt{y+\sqrt{x-1}} = 32(x-2y+1)\sqrt{2y-2} & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện} \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ y + \sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{x}{y^2} + 1\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{x}} + 1\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{y} + 1}$$

$$\text{Đặt } a = \frac{x}{y}; b = y \ (a, b > 0) \text{ ta có } \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} = \frac{1}{ab+1} \quad (*)$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có

$$\begin{cases} (ab+1)\left(\frac{a}{b}+1\right) \geq (a+1)^2 \\ (ab+1)\left(\frac{b}{a}+1\right) \geq (b+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(a+1)^2} \geq \frac{b}{a+b} \cdot \frac{1}{ab+1} \\ \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{a}{a+b} \cdot \frac{1}{ab+1} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } VT(*) \geq \frac{a+b}{(a+b)(ab+1)} = \frac{1}{ab+1} = VP(*) .$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = \frac{a}{b} \\ ab = \frac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow x=y^2$$

Với $x=y^2$ thay trở lại ta có phương trình .

$$\sqrt{y+\sqrt{y-1}} = 32(y-1)^2 \sqrt{2y-2} \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2-1} = 2(4y-4)^5$$

Đặt $4y-4=u \ (u \geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành .

$$2u^5 - \frac{u+4}{4} - \sqrt{\left(\frac{u+4}{4}\right)^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 8u^5 = \sqrt{u^2+8u} + u + 4 \quad (*)$$

• Rõ ràng $u=0$ không là nghiệm của phương trình (*)

• Với $u \neq 0$, phương trình (*) tương đương với $8 = \frac{4}{u^5} + \frac{1}{u^4} + \sqrt{\frac{1}{u^8} + \frac{8}{u^9}}$

Hàm số $f(u) = \frac{4}{u^5} + \frac{1}{u^4} + \sqrt{\frac{1}{u^8} + \frac{8}{u^9}}$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và $f(1)=0$

| Phương pháp bất đẳng thức

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $u = 1$.

Thay trở lại ta có nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = \left(\frac{25}{16}; \frac{5}{4}\right)$.

Bài 40. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x-3y+2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2x-5y+3}+1}} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} & (1) \\ 3x^2 - 13xy + 17y^2 + 8x - 21y + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq \min\left\{\frac{x+2}{3}; \frac{2x+3}{5}\right\} \end{cases}$$

Ta có $PT(2) \Leftrightarrow 6x^2 - 26xy + 34y^2 + 16x - 42y + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-3y+2)^2 + (2x-5y+3)^2 + x^2 = 1$$

Đặt $\sqrt{x-3y+2} = a$; $\sqrt{2x-5y+3} = b$; $\sqrt{x} = c$ ($a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0$).

Khi đó hệ đã cho được viết lại như sau.
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} + \frac{1}{\sqrt{c+1}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} & (*) \\ a^4 + b^4 + c^4 = 1 & (**) \end{cases}$$

Từ (**) $\Rightarrow a \in [0; 1] \Rightarrow \sqrt{a+1} \in [1; 2] \Rightarrow (\sqrt{a+1}-1)(\sqrt{a+1}-\sqrt{2}) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a+1})^2 - (1+\sqrt{2})\sqrt{a+1} + \sqrt{2} \leq 0$$

Tương tự, ta cũng có
$$\begin{cases} \sqrt{b+1} + \sqrt{\frac{2}{b+1}} \leq 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{c+1} + \sqrt{\frac{2}{c+1}} \leq 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được.

$$\sum \sqrt{a+1} + \sum \sqrt{\frac{2}{a+1}} \leq 3 + 3\sqrt{2} \Rightarrow VT^{(*)} \sqrt{2} \leq 3 + 3\sqrt{2} - \left(\sum \sqrt{a+1}\right)$$

Do $a, b, c \in [0; 1] \Rightarrow \begin{cases} a \geq a^4; b \geq b^4; c \geq c^4 \\ \sum (\sqrt{a+1}-1)(\sqrt{b+1}-1) \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c \geq a^4+b^4+c^4 = 1 \\ \sum \sqrt{a+1}\sqrt{b+1} \geq 2\sum \sqrt{a+1} - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\sum \sqrt{a+1}\right)^2 = a+b+c+3+2\left(\sum \sqrt{a+1}\sqrt{b+1}\right) \geq 4+2\left(2\sum \sqrt{a+1}-3\right) = 4\sum \sqrt{a+1}-2$$

$$\Rightarrow \sum \sqrt{a+1} \geq 2 + \sqrt{2} \Rightarrow VT^{(*)} \sqrt{2} \leq 3 + 3\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2} \Rightarrow VT^{(*)} \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = VP^{(*)}$$

$$\text{Từ đó (*) xảy ra khi và chỉ khi.} \begin{cases} a, b, c > 0; a^4 + b^4 + c^4 = 1 \\ a = a^4; b = b^4; c = c^4 \\ \sqrt{a+1} + \sqrt{\frac{2}{a+1}} = 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{b+1} + \sqrt{\frac{2}{b+1}} = 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{c+1} + \sqrt{\frac{2}{c+1}} = 1 + \sqrt{2} \\ \sum (\sqrt{a+1} - 1)(\sqrt{b+1} - 1) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (a; b; c) = (0; 0; 1)$ và các hoán vị $\Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 41. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2(x-y)^2 + 6x - 2y + 4} - \sqrt{y} = \sqrt{x+1} \\ \sqrt{2x^4 - 2(y-1)^3 + x^2} = 2(\sqrt{x^2 - y + 2} - 1) + x \end{cases}$$

Giải

Biến đổi phương trình đầu ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(x-y)^2 + 6x - 2y + 4} - \sqrt{y} = \sqrt{x+1} \\ & \Leftrightarrow 2x^2 - 4xy + 2y^2 + 6x - 2y + 4 + x + y + 1 + 2\sqrt{y(x+1)} \\ & \Leftrightarrow 2(x+1-y)^2 + (\sqrt{x+1} - \sqrt{y})^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = y \end{aligned}$$

Thế vào phương trình 2 ta được $\sqrt{2x^4 - 2x^3 + x^2} = 2(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1) + x$

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq 0$ ta có $2\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{(x-2)^2 + 3x^2} \geq |x-2| \Rightarrow 2\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2 > 0$

Nhân 2 vế phương trình trên với $2\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2$ ta thu được phương trình mới là

$$\sqrt{2x^4 - 2x^3 + x^2} (2\sqrt{x^2 - x + 1} - (x-2)) = 3x^2$$

Chia cả 2 vế cho x^2 ta có $\sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} (2\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2) = 3$

Ta có $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} + 1 \geq 1, \sqrt{(x+1)^2 + 3(x-1)^2} \geq |x+1| \geq x+1 \Rightarrow 2\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2 \geq 3$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0 \\ \sqrt{(x+1)^2 + 3(x-1)^2} = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Câu 42. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)\sqrt{\frac{3y-x+2}{x+y+2}} = \frac{x^2+y^2}{x+y} + 1 & (1) \\ \sqrt{x+y-1} + \sqrt{5-2x} = 4xy - 12y + 7 & (2) \end{cases}$$

Giải

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ x+y-1 \geq 0 \\ 3y-x+2 \geq 0 \end{cases}$$

Với điều kiện $x+y \geq 1 \Rightarrow VP(1) \geq 0$ nên $VT(1) \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 0$

$$\text{Lại có } VP(1) = \frac{x^2+y^2}{x+y} + 1 \geq \frac{(x+y)^2}{2(x+y)} + 1 = \frac{x+y}{2} + 1$$

$$VT(1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4(x+1)^2(3y-x+2)}{x+y+2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[2(x+1)+2(x+1)+3y-x+2]^3}{27(x+y+2)}} = \frac{x+y+2}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2(x+1)=3y-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y$$

Với $x=y$, thay vào (2) ta có $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x} = 4x^2 - 12x + 7$

$$\Leftrightarrow 2(4x^2 - 12x + 5) + \sqrt{2x-1} \left(\frac{2x-5}{\sqrt{2x-1}+2} \right) + \sqrt{5-2x} \left(\frac{1-2x}{\sqrt{5-2x}+2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)(5-2x)} \left(2\sqrt{(2x-1)(5-2x)} + \frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{2x-1}+2} + \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{5-2x}+2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right), \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right) \right\}$.

Câu 43. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}} + \frac{1}{\sqrt{y+3x}} \right) = 2 & (1) \\ \frac{2-y}{4} = \sqrt{2x-3} - \sqrt[3]{y-1} & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x+y}{x+3y} \right) \\ \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2y}{x+3y} \right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{3}{2} \right) \quad (3)$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự cho ta } \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{3}{2} \right) \quad (4)$$

$$\text{Lấy (3) + (4) theo từng vế cho ta } VT(1) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{3}{2} \right) = 2 = VP(1)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

Với $x=y$ thay vào phương trình (2) ta được. $\frac{x-2}{4} + \sqrt{2x-3} - \sqrt[3]{x-1} = 0$ (*) $\left(x \geq \frac{3}{2} \right)$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x-2}{4} + \sqrt{2x-3} - \sqrt[3]{x-1}$ $\left(x \geq \frac{3}{2} \right)$, ta có

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2x-3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} > 0, \forall x \geq \frac{3}{2}$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến, mà $f(2) = 0$

Nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Từ đó suy ra $(x; y) = (2; 2)$ là nghiệm của hệ đã cho.

Câu 44. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+5y-4)\sqrt{x-y^2} = 2xy-2y & (1) \\ y\sqrt{x-1}+3\sqrt{x-y^2} = 2x+y & (2) \end{cases}$$

Giải

Phân tích.

Xét phương trình (1).

Cho $x = 0 \Rightarrow (5y-4)\sqrt{-y^2} = -2y \Rightarrow y = 0$. Ta nhận được $(x; y) = A_1(0; 0)$.

Cho $y = 0 \Rightarrow (x-4)\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$. Ta nhận được $(x; y) = B_1(4; 0)$.

Cho $x = 1 \Rightarrow (5y-3)\sqrt{1-y^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$.

Ta nhận được $(x; y) = \left\{ C_1(1; 1), C_2(1; -1), C_3\left(1; \frac{3}{5}\right) \right\}$

Cho $y = 1 \Rightarrow (x+1)\sqrt{x-1} = 2(x-1) \Rightarrow x = 1$. Ta nhận được $(x; y) = C_1(1; 1)$

Cho $y = -1 \Rightarrow (x-9)\sqrt{x-1} = 2(1-x) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$. Ta nhận được $(x; y) = \{C_2(1; -1), E_1(5; -1)\}$

Suy luận và dự đoán.

- Nhận thấy từ các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 chúng ta không thiết lập được mối quan hệ bậc nhất nào.
- Trong phương trình (2) chứa $\sqrt{x-y^2}$ nên chúng ta nảy sinh ý nghĩ, có thể là mối quan hệ giữa nó với các biến x, y .

Khi đó chỉ có thể là $\sqrt{x-y^2} = ax + by + c$ (*)

+ Điểm $A_1 \in (*) \Rightarrow c = 0$

+ Điểm $B_1, C_1 \in (*) \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{2\sqrt{x-y^2} = x-y} \quad (a)$

+ Điểm $B_1, C_2 \in (*) \Rightarrow a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{2\sqrt{x-y^2} = x+y} \quad (b)$

+ Điểm $B_1, C_3 \in (*) \Rightarrow a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{2\sqrt{x-y^2} = x+y} \quad (b)$

+ Điểm $E_1 \in (b)$, nên ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến là .

$$\boxed{2\sqrt{x-y^2} = x+y}$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq y^2 \end{cases}$.

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (x+5y-4)(2\sqrt{x-y^2}-x-y) + (x+y)^2 - 4(x-y^2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+5y-4)(2\sqrt{x-y^2}-x-y) - (2\sqrt{x-y^2}+x+y)(2\sqrt{x-y^2}-x-y) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (2\sqrt{x-y^2}-x-y)(4y-4-2\sqrt{x-y^2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-y^2} = x+y \\ \sqrt{x-y^2} = 2y-2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Với $2\sqrt{x-y^2} = x+y$, kết hợp với (2) cho ta hệ .

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} 2\sqrt{x-y^2} = x+y \\ y\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-y^2} = 2x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-y^2} = x+y \\ 2y\sqrt{x-1} = x-y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0, (x-y)y \geq 0 \\ x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x = 0 \\ x^2 + 5y^2 - 2xy - 4xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0, (x-y)y \geq 0 \\ x \geq 1, x \geq y^2 \\ x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x = 0 \\ 4x(y-1-y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Với $\sqrt{x-y^2} = 2y-2$, kết hợp với (2) cho ta hệ .

$$\begin{cases} \sqrt{x-y^2} = 2y-2 \\ y\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-y^2} = 2x+y \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} y\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-y^2} = 2x+y \end{cases} \quad (4)$$

Từ (3) ta có $y \geq 1$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM , ta có .

$$VT(4) \leq \frac{y^2 + x - 1}{2} + \frac{3}{2}(x - y^2 + 1) = 2x + 1 - y^2 < 2x + 1 \leq 2x + y, \forall y \geq 1$$

Do đó hệ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$.

Câu 45. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-1)\sqrt{x-y+1} + (x-y)\sqrt{x+3} = 3x-2y-1 & (1) \\ \sqrt{y+1-\frac{1}{x}} + \sqrt{y+x^2-x^3} = \frac{1}{2}(x^2+3) & (2) \end{cases}$$

Giải

Biến đổi phương trình đầu ta được .

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x-y+1} - (x-1) + (x-y)\sqrt{x+3} - 2(x-y) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-1)\frac{x-y}{\sqrt{x-y+1}+1} + (x-y)\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-1)(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x-y+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=y \end{cases}
 \end{aligned}$$

Thế vào (2) cho ta $\sqrt{x+1-\frac{1}{x}} + \sqrt{y+x^2-x^3} = \frac{1}{2}(x^2+3)$ (*)

$$\text{Ta có } VT(*) = \sqrt{x+1-\frac{1}{x}} + |x|\sqrt{\frac{1}{x}+1-x} \leq \sqrt{2(x^2+1)}$$

$$\text{Lại có } VP(*) = \frac{1}{2}(x^2+3) = \frac{1}{2}[(x^2+1)+2] \geq \frac{1}{2}(2\sqrt{2(x^2+1)}) = \sqrt{2(x^2+1)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \pm 1$

Câu 46. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y+1} = y + \frac{9}{4} & (1) \\ \frac{x-1}{\sqrt{y+1}+1} + \frac{y+1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{3} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-1} = a \\ \sqrt{y+1} = b \end{cases} (a, b \geq 0)$.

Hệ phương trình đã cho trở thành
$$\begin{cases} a + 2b = b^2 + \frac{5}{4} \\ \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Từ (3) ta có $a + b = \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + 1 \Leftrightarrow a + b = \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \Rightarrow a + b \geq 1 (*)$

Từ (4) ta lại có.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} \geq \frac{(a+b)^2}{(a+b)+2} \Rightarrow 3(a+b)^2 - (a+b) - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b-1)(3a+3b+2) \leq 0 \Leftrightarrow a+b \leq 1, \text{ do } a, b \geq 0 (**) \end{aligned}$$

Từ (*), (**) suy ra hệ phương trình tương đương với. $a = b = \frac{1}{2}$

Do vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

Câu 47. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y-1)\sqrt{2(3-y^2)} = 2-xy & (1) \\ y\sqrt{5-x^2} = x-y-4 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 3-y^2 \geq 0 \\ 5-x^2 \geq 0 \end{cases}$.

Áp dụng bất đẳng thức $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}, \forall a, b \in R$. Từ phương trình (1) ta có.

$$2-xy = (x-y-1)\sqrt{2(3-y^2)} \leq \frac{(x-y-1)^2 + 6 - 2y^2}{2} \Rightarrow (x^2 - y^2) - 2(x-y) + 3 \geq 0 \quad (3)$$

Từ phương trình (2) ta lại có $(2) \Leftrightarrow \left(y + \sqrt{5-x^2}\right)^2 = -(x^2 - y^2) + 2(x-y) - 3$
 $\Rightarrow (x^2 - y^2) - 2(x-y) + 3 \leq 0 \quad (4)$

Từ (3), (4) suy ra hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x-y-1 = \sqrt{6-2y^2} \\ y = -\sqrt{5-x^2} \\ x^2 - y^2 - 2(x-y) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ x^2 = 5 - y^2 \\ x-y = 1 + \sqrt{6-2y^2} \\ (6-2y^2) - 2\sqrt{6-2y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (2; -1)$.

Câu 48. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{y+1}+1} = \frac{2}{3} \\ \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}} - \frac{2}{\sqrt{xy}} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Giải

Ta có (1):
$$\frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{y+1}+1} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} + \frac{\sqrt{y+1}-1}{y}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{2}{3}$$

Từ phương trình (2) ta suy ra
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}} \geq \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \sqrt{\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2}} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}\right) \geq \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{xy}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} \Leftrightarrow x = y$$

Thế vào phương trình (1) ta được $x = y = 3$.

Câu 49. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4y-2)\sqrt{x-1} + 2y\sqrt{3y-2} = y^2 + 3y & (1) \\ (4y+x-3)^3 = 27y(2-y) & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{2}{3} \end{cases}$. Từ phương trình (2) ta có.

$$(4y+x-3)^3 = 27(2y-y^2) = 27[1-(y-1)^2] \leq 27 \Rightarrow 4y+x \leq 6 \quad (*)$$

Lại có (1) $\Rightarrow y^2 + 3y = (4y-2)\sqrt{x-1} + 2y\sqrt{3y-2} \leq (4y-2)\sqrt{x-1} + (y^2 + 3y - 2)$

$$\Rightarrow (2y-1)\sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq (2y-1)^2(x-1), \text{ do } y \geq \frac{2}{3}$$

Suy ra $1 \leq (2y-1)^2(x-1) \leq \left(\frac{2y-1+2y-1+x-1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4y+x-3}{3}\right)^3 \Rightarrow 4y+x \geq 6 \quad (**)$

Từ (*), (**) ta có hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} y-1=0 \\ 4y+x=6 \\ y=\sqrt{3y-2} \\ 2y-1=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (2; 1)$.

Câu 50. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x-2} + \sqrt{2y+2} = (x-3y)\sqrt{x+y} & (1) \\ (y+1)\sqrt{3x-y-4} = (2y+1)\sqrt{x+y} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \\ 3x-y-4 \geq 0 \end{cases}$

- Trường hợp 1. $x + y = 0$ hệ đã cho trở thành $\begin{cases} \sqrt{2x-2} + \sqrt{2y+2} = 0 \\ (y+1)\sqrt{3x-y-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

- Trường hợp 2. $x + y > 0$ ta có $PT(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2(x-1)}{x+y}} + \sqrt{\frac{2(y+1)}{x+y}} = x - 3y$
 $\Rightarrow x - 3y = \sqrt{\frac{2(x-1)}{x+y}} + \sqrt{\frac{2(y+1)}{x+y}} \leq \sqrt{(1+1)\left(\frac{2(x-1)}{x+y} + \frac{2(y+1)}{x+y}\right)} = 2 \quad (3)$

Lại có $PT(2) \Leftrightarrow \frac{2y+1}{y+1} = \sqrt{\frac{3x-y-4}{x+y}}, \text{ do } y \neq -1$

$$\Rightarrow \frac{2y+1}{y+1} = \sqrt{\frac{3x-y-4}{x+y}} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3x-y-4}{x+y} \right) = \frac{2x-2}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow (2y+1)(x+y) \leq (2x-2)(y+1) \Leftrightarrow x-3y \geq 2y^2+2 \Rightarrow x-3y \geq 2 \quad (4)$$

Kết hợp (3), (4) suy ra hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} \frac{x-1}{x+y} = \frac{y+1}{x+y} \\ \frac{3-y-4}{x+y} = 1 \\ y = 0 \\ x-3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm $(x; y) = \{(1; -1), (2; 0)\}$.

Câu 51. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y}(\sqrt{y}+1) = \sqrt{x^2+y^2}+2 & (1) \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1} = \frac{x^2+4y-4}{2} & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Từ phương trình (2).

$$\begin{aligned} x^2 + 4y - 4 &= x \cdot 2\sqrt{y-1} + y \cdot 2\sqrt{x-1} \leq \frac{x^2 + 4y - 4}{2} + \frac{y^2 + 4x - 4}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4y - 4}{2} &\leq \frac{y^2 + 4x - 4}{2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 4y - 4x \leq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-4) \leq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Từ phương trình (1).

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} - 2 &= \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{xy+y^2} \\ \Leftrightarrow \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}+2} &= \frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{xy+y^2}} \Rightarrow (x-y)(x+y-4) \geq 0 \quad (**) \end{aligned}$$

Suy ra hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 2\sqrt{y-1} \\ y = 2\sqrt{x-1} \\ (x-y)(x+y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 2)$.

Câu 52. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} = \sqrt{\frac{2(x+y)}{y+1}} & (1) \\ (y-1)\sqrt{x-1} = \frac{x^2-y}{2} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có.

$$\frac{x^2-y}{2} = (y-1)\sqrt{x-1} \leq \frac{(y-1)^2 + (x-1)}{2} \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) \leq 0 \Rightarrow x \geq y \quad \left(\text{do } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \right)$$

Với $x \geq y$ từ phương trình (1) cho ta.

$$\begin{aligned} VT(1) &= \sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} \leq \sqrt{(1+1)\left(\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}\right)} \\ &\leq \sqrt{(1+1)\left(\frac{x}{y+1} + \frac{y}{y+1}\right)} = \sqrt{2\left(\frac{x+y}{y+1}\right)} = VP(1) \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Với $x = y$ thay trở lại phương trình (2) ta có

$$2(x-1)\sqrt{x-1} = x(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ ban đầu là $(x; y) = \{(1; 1), (2; 2)\}$.

Câu 53. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^8 + y^8 + y - 5x + 2 = 0 & (1) \\ 5x^3 - x^2y = 4x^2y^2(x^2 + 1) + y - 5x & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (2) ta có $5x^3 - x^2y = 4x^2y^2(x^2 + 1) + y - 5x$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 5x(x^2 + 1) = 4x^2y^2(x^2 + 1) + y(1 + x^2) \\ &\Leftrightarrow 5x = 4x^2y^2 + y \Rightarrow -4x^2y^2 = y - 5x \end{aligned}$$

Thế vào phương trình (1) ta được

$$\begin{aligned} &x^8 + y^8 - 4x^2y^2 + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^8 + y^8 - 2x^4y^4) + 2x^4y^4 - 4x^2y^2 + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^4 - y^4)^2 + 2(x^2y^2 - 1)^2 = 0 \end{aligned}$$

Ta có VT ≥ 0 nên dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x^4 - y^4 = 0 \\ x^2y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Câu 54. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 2x + y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$

Lấy (1)–(2) theo từng vế và biến đổi ta có.

$$\begin{aligned}x^2 + 3x + 2 + \sqrt{x+2} &= 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1} \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+1) + \sqrt{x+2} &= 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1}\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t + \sqrt{t+1}$, $t \geq -1$ ta có.

$$\begin{aligned}f'(t) &= 2t + 1 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}} = 2(t+1) + \frac{1}{4\sqrt{t+1}} + \frac{1}{4\sqrt{t+1}} - 1 \\ &\geq 3\sqrt[3]{2(t+1) \cdot \frac{1}{16(t+1)}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 > 0\end{aligned}$$

Hay hàm số $f(t)$ đồng biến, do vậy từ $f(x+1) = f(2y) \Leftrightarrow x+1 = 2y$

Với $x = 2y - 1$ thay vào phương trình (2) ta có $6y^2 - 7y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left\{ (1; 2), \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{6} \right) \right\}$.

Câu 55. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{5y-x-y^2-1} = y-x+2 & (1) \\ \sqrt{3y-x} + 2\sqrt{x-1} = x+2y-1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 3y-x \geq 0 \\ 5x-y^2-x-1 \geq 0 \end{cases}$$

Lấy (1)+(2) theo từng vế ta được. $\sqrt{5y-x-y^2-1} + \sqrt{3y-x} + 2\sqrt{x-1} = 3y+1$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\begin{aligned}VT(*) &\leq \frac{5y-x-y^2-1+1}{2} + \frac{1+3y-x}{2} + 1 + (x-1) = \frac{-y^2+8y+1}{2} = \\ &= \frac{-(y^2-2y+1)+6y+2}{2} = \frac{6y+2-(y-1)^2}{2} \leq \frac{6y+2}{2} = 3y+1 = VP(*)\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 5y-x-y^2-1=1 \\ 3y-x=1 \\ x-1=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (2; 1)$.

Câu 56. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$$

Giải

Biến đổi hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} 3xy^2 + x^3 + 49 = 0 \\ y^2 - y(8x+8) + x^2 + 17x = 0 \end{cases}$$

Để ý rằng trên kia không có y nên phương trình 2 dưới phải mất y vậy $x = -1$

Thế vào (1) ta được $-3y^2 + 48 = 0 \Rightarrow -3(y^2 - 16) = 0 \Rightarrow -3(y-4)(y+4) = 0$

Phương trình (2) trở thành $y^2 - 16 = 0$

| Phương pháp bất đẳng thức

Vậy ta lấy $-3PT(2) - PT(1) = 0$ ta được

$$\begin{aligned} & -3(x^2 - 8xy + y^2 - 8y + 17x) - (x^3 + 3xy^2 + 49) = 0 \\ & \Leftrightarrow -(x+1)(x^2 + 2x + 3y^2 - 24y + 49) = 0 \\ & \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x^2 + 2x + 3y^2 - 24y + 49 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Với phương trình $(*)$: $(x+1)^2 + (3y^2 - 24y + 48) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 3(y-4)^2 = 0$

Ta có $VT \geq 0$ nên dấu bằng xảy ra khi $x = -1$ và $y = 4$ (hỏa)

Với $x = -1 \Rightarrow y = 4$ hay $y = -4$.

Câu 57. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} & (1) \\ 11 + y - 6x = \sqrt{10 - 4x - 2x^2} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} -y^2 - 4y - 2 \geq 0 \\ 10 - 4x - 2x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Lấy $(1) + (2)$ theo từng vế ta được

$$x^2 - 4x + y + 9 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} + \sqrt{10 - 4x - 2x^2} \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\begin{aligned} VP(*) &= \sqrt{-y^2 - 4y - 2} + \frac{1}{2}(2\sqrt{10 - 4x - 2x^2}) \leq \frac{-y^2 - 4y - 2 + 1}{2} + \frac{10 - 4x - 2x^2 + 4}{4} \\ &= \frac{-2x^2 - 2y^2 - 4x - 8y + 12}{4} = A \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh $VT(*) \geq A$, thật vậy

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y + 9 &\geq \frac{-2x^2 - 2y^2 - 4x - 8y + 12}{4} \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 2y^2 + 12y + 24 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 6(x-1)^2 + 2(y+3)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}). \end{aligned}$$

Từ $\begin{cases} VT(*) \geq A \\ VP(*) \leq A \end{cases}$ nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} \\ 2 = \sqrt{10 - 4x - 2x^2} \\ x - 1 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (1; -3)$.

Câu 58. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \left(\sqrt{1-x} + \sqrt{2x+y} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5x+3y+1}} + \frac{1}{\sqrt{3-x+y}} \right) = 2 \\ xy + 2\sqrt{2x^4 - x^3 + 7x^2 + y + 2} = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 2x+y \geq 0 \\ 5x+3y+1 > 0 \\ 3-x+y > 0 \\ 2x^4 - x^3 + 7x^2 + y + 2 \geq 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a=1-x \\ b=2x+y \end{cases}, a, b \geq 0$. Ta có $\begin{cases} 5x+3y+1=a+3b \\ 3-x+y=b+3a \end{cases}$.

Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành .

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \left(\frac{1}{\sqrt{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt{b+3a}} \right) = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} = 2 \quad (1)$$

Rõ ràng với $(a, b) = (0; 0)$ là không thỏa (1).

Do đó với $a, b > 0$ ta đặt $t = \frac{a}{b}, t > 0$ ta đưa (1) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+3}} + \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{3t+1}} = 2$.

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có .

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+3}} = \sqrt{\frac{t}{t+1} \cdot \frac{t+1}{t+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t+1} + \frac{t+1}{t+3} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{t+3}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{t+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{t+3} \right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t+1} + \frac{3}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{3t+1}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{3t+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2t}{3t+1} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{3t+1}} = \sqrt{\frac{1}{t+1} \cdot \frac{t+1}{3t+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{3t+1} \right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{3t+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} + \frac{3}{2} \right).$$

Do đó ta có. $\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+3}} + \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{3t+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{t+1}{t+1} + 3 \right) = 2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . $\begin{cases} t > 0 \\ \frac{t}{t+1} = \frac{t+1}{t+3} \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{t+3} \\ \frac{1}{2} = \frac{2t}{3t+1} \\ \frac{1}{t+1} = \frac{t+1}{3t+1} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$

Lúc này ta sẽ có $a = b \Leftrightarrow 1 - x = 2x + y \Leftrightarrow y = 1 - 3x$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình .

$$x(1-3x) + 2\sqrt{2x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 3} = 4 \Leftrightarrow x - 3x^2 + 2\sqrt{2x^2(x^2+3) - x(x^2+3) + x^2+3} = 4$$

$$\Leftrightarrow x - 3x^2 + 2\sqrt{(x^2+3)(2x^2-x+1)} = 4$$

Lại theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có . $2\sqrt{(x^2+3)(2x^2-x+1)} \leq 3x^2 - x + 4$.

Từ đó ta có . $x - 3x^2 + 2\sqrt{(x^2+3)(2x^2-x+1)} \leq x - 3x^2 + 3x^2 - x + 4 = 4$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi .

$$2x^2 - x + 1 = x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 2 \Rightarrow y = -5 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (1; 4)$.

Câu 59. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{(x-2)^2 + y^2}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{y+1}} = \frac{(x-2)^2}{1 + \sqrt{y+1}} + \frac{y^2}{1 + \sqrt{x}} & (1) \\ {}^{2017}\sqrt{x-2} + {}^{2017}\sqrt{y} = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (1) ta đặt $a = x - 2, b = y$ ($a, b \geq -2$), khi đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{1 + \sqrt{a+2} + \sqrt{b+1}} &= \frac{a^2}{1 + \sqrt{b+1}} + \frac{b^2}{1 + \sqrt{a+2}} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{1 + \sqrt{a+2} + \sqrt{b+1}} &= \frac{a^2 + b^2 + a^2\sqrt{a+2} + b^2\sqrt{b+1}}{(1 + \sqrt{b+1})(1 + \sqrt{a+2})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (a^2 + b^2)(1 + \sqrt{b+1})(1 + \sqrt{a+2}) &= (a^2 + a^2\sqrt{b+1} + b^2 + b^2\sqrt{b+1})(1 + \sqrt{a+2}) \\ &= a^2 + a^2\sqrt{a+2} + a^2\sqrt{b+1} + a^2\sqrt{(b+1)(a+2)} + b^2 + b^2\sqrt{a+2} + b^2\sqrt{b+1} + b^2\sqrt{(a+2)(b+1)} \\ &= (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)(\sqrt{a+2} + \sqrt{b+1}) + (a^2 + b^2)\sqrt{(a+2)(b+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có tiếp } (a^2 + b^2 + a^2\sqrt{a+2} + b^2\sqrt{b+1})(1 + \sqrt{a+2} + \sqrt{b+1}) &= (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)(\sqrt{a+2} + \sqrt{b+1}) + a^2\sqrt{a+2} \\ &\quad + a^2\sqrt{a+2}(\sqrt{a+2} + \sqrt{b+1} + b^2\sqrt{b+1} + b^2\sqrt{b+1} + b^2\sqrt{b+1}(\sqrt{a+2} + b+1)) \\ &\Rightarrow a^2\sqrt{a+2} + a^2(a+2) + b^2\sqrt{b+1} + b^2(b+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } VT \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2\sqrt{a+2} = 0 \\ a^2(a+2) = 0 \\ b^2\sqrt{b+1} = 0 \\ b^2(b+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ hay } a = -2 \\ b = 0 \text{ hay } b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ hay } x = 0 \\ y = 0 \text{ hay } y = -1 \end{cases}$$

Thế vào phương trình (2) ta thấy $x = 2, y = 0$ là thỏa mãn hệ

Câu 60. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y+1} = y + \frac{9}{4} \\ \frac{x-1}{\sqrt{y+1}+1} + \frac{y+1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện. $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$. Nhận thấy hệ không có nghiệm $(x, y) = (1; -1)$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x-1} \\ b = \sqrt{y+1} \end{cases}, a, b > 0. \text{ Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành hệ. } \begin{cases} a + 2b = b^2 + \frac{5}{4} \\ \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \frac{A^2}{X} + \frac{B^2}{Y} \geq \frac{(A+B)^2}{X+Y} (*), \forall A, B \in \mathbb{R}, X, Y > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng bổ đề này ta có } \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} &\geq \frac{(a+b)^2}{a+b+2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{(a+b)^2}{a+b+2} \\ &\Leftrightarrow 3(a+b)^2 - (a+b) - 2 \leq 0 \Leftrightarrow a+b \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1-b. \end{aligned}$$

Với đánh giá này, kết hợp với phương trình thứ nhất ta có .

$$a = b^2 - 2b + \frac{5}{4} \Rightarrow b^2 - 2b + \frac{5}{4} \leq 1 - b \Leftrightarrow (2b - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Với } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{y+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Đối chiếu và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

Câu 61. Giải phương trình
$$\begin{cases} 8(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \frac{5 - 8y^2}{x} = \sqrt{\frac{y}{x}} \left(8\sqrt{xy} + \frac{1}{xy}\right) \\ 8(x^2 + y^2) + \frac{1}{\sqrt{xy}} = 5 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y > 0$

Phương trình (2) của hệ tương đương $8(x^2 + y^2) + \frac{1}{\sqrt{xy}} = 5 \Rightarrow 5 - 8y^2 = 8x^2 + \frac{1}{\sqrt{xy}}$

Thay $5 - 8y^2 = 8x^2 + \frac{1}{\sqrt{xy}}$ vào phương trình (1) ta có

$$\begin{aligned} 8(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \frac{8x^2 + \frac{1}{\sqrt{xy}}}{x} &= \sqrt{\frac{y}{x}} \left(8\sqrt{xy} + \frac{1}{xy}\right) \\ \Leftrightarrow 8(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + 8x + \frac{1}{x\sqrt{xy}} &= 8y + \frac{1}{x\sqrt{xy}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} + x - y &= 0 \Leftrightarrow (x - y) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- **Trường hợp 1.** Nếu $x = y$ phương trình (2) của hệ tương đương

$$16x^2 + \frac{1}{x} = 5 \Leftrightarrow 16x^3 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow (4x - 1)(4x^2 + 4x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} \\ x = \frac{\sqrt{17} - 1}{8} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{17} - 1}{8} \end{cases}$$

- **Trường hợp 2.** Nếu $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{xy}} &\geq \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}\right)^2} = 4 \Rightarrow 8(x^2 + y^2) \geq 4(x + y)^2 \\ &= [2(x + y)]^2 \geq \left[(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2\right]^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 = 1 \end{aligned}$$

Cộng 2 vế trên của bất đẳng thức ta có $8(x^2 + y^2) + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 5$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = \frac{1}{4}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{8}; \frac{\sqrt{17}-1}{8}\right)$

Câu 62. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3+2x^2y-x^4y^2}+x^2(1-2x^2)=y^4 & (1) \\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}+x^2(x^4-2x^2-2xy^2+1)=0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Hệ tiếp theo là 1 hệ đánh giá, ban đầu nhìn vào thì rất khó đoán ý tác giả nhưng thử để ý xem

- $\sqrt{3+3x^2y-x^4y^2}+x^2-2x^4=y^4$
- $1+\sqrt{1+(x-y)^2}+x^6-2x^4-2x^3y^2+x^2=0$

Lấy (1) thế vào (2) ta được $1+\sqrt{1+(x-y)^2}+x^6-2x^3y^2=2x^4-x^2$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{1+(x-y)^2}+x^6-2x^3y^2=\sqrt{3+2x^2y-x^4y^2}-y^4$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{1+(x-y)^2}+(x^3-y^2)^2=\sqrt{3+2x^2y-x^4y^2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{1+(x-y)^2}+(x^3-y^2)^2=\sqrt{4-(x^2y-1)^2}$$

Ta có $VT \geq 2$ mà cũng có $VP \leq 2$ nên dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} \sqrt{1+(x-y)^2}=1 \\ \sqrt{4-(x^2y-1)^2}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2y=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=1$$

Thế vào hệ ban đầu ta thấy thỏa mãn.

Câu 63. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2-5xy+4y^2-1-2(x-y)\sqrt{4x^2-2xy-2y^2}=0 & (1) \\ 2x^2-5xy+7y^2-2-2(x-y)\sqrt{4x^2-2xy-2y^2}=0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Nguyễn Trường Phát

Giải

Bài toán này ý tưởng cũng khó khăn không kém, do bài này tôi chế nên tôi sẽ đưa lời gốc lên cho mọi người thưởng thức!

Ta lấy $4PT(1)-2PT(2)=0$, khi đó ta được

- $4PT(1): 12x^2-20xy+16y^2-4(2x-2y)\sqrt{4x^2-2xy-2y^2}=4$
 - $-2PT(2): -4x^2+10xy-14y^2+2(2x-2y)\sqrt{4x^2-2xy-2y^2}=-4$
- $$\Rightarrow 8x^2-10xy+2y^2-2(2x-2y)\sqrt{4x^2-2xy-2y^2}=0$$
- $$\Leftrightarrow (4x^2-8xy+4y^2)-2(2x-2y)\sqrt{4x^2-2xy-2y^2}+(4x^2-2xy-2y^2)=0$$
- $$\Leftrightarrow (2x-2y)^2-2(2x-2y)\sqrt{4x^2-2xy-2y^2}+(\sqrt{4x^2-2xy-2y^2})^2=0$$
- $$\Leftrightarrow (2x-2y-\sqrt{4x^2-2xy-2y^2})^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-2xy-2y^2}=2y-2x$$

Thế vào (1),(2) ta được
$$\begin{cases} 3x^2-5xy+y^2-2(x-y)(2y-2x)=1 & (*) \\ 2x^2-5xy+7y^2-2(x-y)(2y-2x)=2 & (**) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 - 13xy + 8y^2 = 1 \\ 6x^2 - 13xy + 11y^2 = 2 \end{cases}$$

Lấy (*) thế vào (**): $6x^2 - 13xy + 11y^2 = 2(7x^2 - 13xy + 8y^2) \Leftrightarrow y = x \text{ hay } y = \frac{8x}{5}$

Thế vào (*) với $x = y \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (nhận)

Thế vào (**) với $y = \frac{8x}{5} \Rightarrow x = \pm \frac{5}{\sqrt{167}} \Rightarrow y = \pm \frac{8}{\sqrt{167}}$ (loại)

Câu 64. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + y^3 + y^6 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} = 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $xy - x^2y^2 \geq 0$ (*)

Ta có $y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(xy - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^6 + 2y^3 + 2x^2 + 4xy^3 \leq \frac{1}{2} + y^3 + 4xy^3$

Cộng chéo vế theo vế đánh giá này với phương trình thứ hai ta thu được

$$\begin{aligned} y^6 + 2y^3 + 2x^2 + 4xy^3 + 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} &\leq 1 + 2y^3 + 8xy^3 \\ \Leftrightarrow y^6 + 4x^2 - 4xy^3 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} &\leq 1 \Leftrightarrow (y^3 - 2x)^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \leq 1 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y^3 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - y = 0 \\ x = \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Thử lại ta thấy, nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.

Câu 65. Giải phương trình
$$\begin{cases} 3\sqrt{x+1} + \frac{\sqrt{3y+1} + \sqrt{2y+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + 1} = (6 - 2\sqrt{2x+1})y + 5 \\ \sqrt{\frac{y+1}{x+1}} = \frac{xy^2 - 4xy - 4x}{yx^2 - 4xy - 4y} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}; y \geq -\frac{1}{3}; (x; y) \neq (0; 0)$

Phương trình (2) tương đương

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{y+1}{x+1}} &= \frac{xy^2 - 4xy - 4x}{yx^2 - 4xy - 4y} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y+1}{x+1}} - 1 = \frac{xy^2 - 4xy - 4x}{yx^2 - 4xy - 4y} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{y-x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{y+1} + \sqrt{x+1})} &= \frac{xy(y-x) + 4(y-x)}{yx^2 - 4xy - 4y} \\ \Leftrightarrow (y-x) \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}(\sqrt{y+1} + \sqrt{x+1})} - \frac{xy+4}{yx^2 - 4xy - 4y} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ yx^2 - 4xy - 4y = (xy+4)(\sqrt{(x+1)(y+1)} + x+1) \end{cases} (*) \end{aligned}$$

Ta có (*) $\Leftrightarrow yx^2 - 4xy - 4y = (xy+4)\sqrt{(x+1)(y+1)} + x^2y + 4x + xy + 4$

$$\Leftrightarrow (xy+4)\sqrt{(x+1)(y+1)} + 4(x+y) + 5xy + 4 = 0$$

Ta có $(xy+4)\sqrt{(x+1)(y+1)} + 4(x+y) + 5xy + 4 \geq \frac{25}{6} \cdot \sqrt{3} - \frac{10}{3} + \frac{5}{6} + 4 > 0$

Phương trình (*) vô nghiệm. Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1} &= (6 - 2\sqrt{2x+1})x + 5 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1} &= 6x + 5 \end{aligned}$$

| Phương pháp bất đẳng thức

Xét hàm số $f(x) = 3\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} + \sqrt{(2x+1)^3} - 6x - 5, \forall x \geq -\frac{1}{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2} \left(2\sqrt{1+2x} + \frac{1}{\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 4 \right) \\ &\geq \frac{3}{2} \left(2\sqrt{1+2x} + \frac{4}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+1}} - 4 \right) = \frac{3}{2} \left(2\sqrt{1+2x} + \frac{2}{\sqrt{2x+1}} - 4 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Do đó hàm số $f(x)$ là hàm số đồng biến.

Ta có $f(0) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0(L)$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 66. Giải phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}+y)(\sqrt{y^2+1}+x)=1 \\ \frac{\sqrt{3x^3+2y^2+2}+\sqrt{3y^3+x^2+2x-1}}{y^2+x+1}=2 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x^2+1}+x \\ v = \sqrt{y^2+1}+y \end{cases} (u, v > 0) &\Rightarrow \begin{cases} u-x = \sqrt{x^2+1} \\ v-y = \sqrt{y^2+1} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} u^2-2ux+x^2=x^2+1 \\ y^2-2xy+y^2=y^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u^2+1}{2u} \\ y = \frac{v^2+1}{2v} \\ \sqrt{x^2+1} = u-x = \frac{u^2-1}{2u} \\ \sqrt{y^2+1} = v-y = \frac{v^2-1}{2v} \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó phương trình (1) tương đương

$$\begin{aligned} &\left(\frac{u^2-1}{2u} + \frac{v^2+1}{2v} \right) \left(\frac{v^2-1}{2v} + \frac{u^2+1}{2u} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow [v(u^2-1) + u(v^2+1)][u(v^2-1) + v(u^2+1)] = 4u^2v^2 \\ &\Leftrightarrow [uv(u+v) + u-v][uv(u+v) + v-u] = 4u^2v^2 \\ &\Leftrightarrow u^2v^2(u+v)^2 - (u-v)^2 = 4u^2v^2 \\ &\Leftrightarrow (uv-1)(uv(u+v)^2 + (u-v)^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow uv = 1 \end{aligned}$$

Khi $uv = 1$ ta có

$$\begin{aligned} &(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y) = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y} = \sqrt{y^2+1}-y \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1} + x + y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} + x + y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + y) \left(\frac{x - y}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} + 1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + y) (x - y + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}) = 0 \end{aligned}$$

Do $x - y + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} > x - y - x + y = 0 \Rightarrow x = -y$

Thay $x = -y$ vào phương trình (2) được

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} + \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1}}{x^2 + x + 1} = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} + \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} = 2(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta được

$$\begin{aligned} &\bullet \quad \sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} \leq \frac{3x^3 + 2x^2 + 2 + 1}{2} \\ &\bullet \quad \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} \leq \frac{-3x^3 + x^2 + 2x - 1 + 1}{2} \\ &\Rightarrow VT = \sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} + \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} \leq \frac{4(x^2 + x + 1) - (x + 1)^2}{2} \leq 2(x^2 + x + 1) = VP \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 3x^3 + 2x^2 + 2 = 1 \\ -3x^3 + x^2 + 2x - 1 = 1 \\ (x + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$

Câu 67. Giải phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 6\sqrt{3y - 3x^2} + 6\sqrt[3]{x^2 y^2 + 3y^2} = 7y + 15 \\ \frac{\sqrt{y} + 2}{x^2 - 1} + \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 2}{6 - y} = 2(\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{y - 2}) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $3y - 3x^2 \geq 0; y \geq 2; y \neq 6; x \neq \pm 1$

Phương trình (1) tương đương với $x^2 + 6\sqrt{3(y - x^2)} + 6\sqrt[3]{y^2(x + 3)} = 7y + 15$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } AM - GM \text{ ta có } \begin{cases} 6\sqrt{3(y - x^2)} \leq 3(3 + y - x^2) \\ 6\sqrt[3]{y^2(x + 3)} \leq 2(y + y + x^2 + 3) \end{cases}$$

Do đó ta có $VT(1) \leq x^2 + 3(3 + y - x^2) + 2(y + y + x^2 + 3) = 7y + 15 = VP(1)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2 + 3 = y$

Thay $x^2 + 3 = y$ vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{y} + 2}{x^2 - 1} + \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 2}{6 - y} = 2(\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{y - 2}) \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2}{x^2 + 1} + \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 2}{3 - x^2} = 2(\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} + \frac{1}{2 - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x^2 + 3} - 2 \\ b = 2 - \sqrt{x^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow a + b = \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 1}.$$

Phương trình trở thành

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow b(a+b) + a(a+b) = 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\text{Hay } \sqrt{x^2 + 3} - 2 = 2 - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 1} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 4 + 2\sqrt{x^2 + 3}\sqrt{x^2 + 1} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3}\sqrt{x^2 + 1} = 6 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 3 = 36 - 12x^2 + x^4 \Leftrightarrow 16x^2 = 33 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{33}{16}} \Rightarrow y = \frac{81}{16}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm } (x; y) = \left(\sqrt{\frac{33}{16}}; \frac{81}{16} \right); \left(-\sqrt{\frac{33}{16}}; \frac{81}{16} \right)$$

Câu 68. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{1-2y-x^2} + x - 1 = \sqrt{2(x^2 - y^2 + 2)} \\ \sqrt{1+2x-y^2} - y - 1 = \sqrt{2(y^2 - x^2 + 2)} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 1-2y-x^2 \geq 0 \\ 1+2x-y^2 \geq 0 \\ x^2 - y^2 + 2 \geq 0 \\ y^2 - x^2 + 2 \geq 0 \end{cases}.$$

Cộng vế theo vế hai phương trình ta có

$$\sqrt{1-2y-x^2} - (y+1) + \sqrt{1+2x-y^2} + x - 1 = \sqrt{2(x^2 - y^2 + 2)} + \sqrt{2(y^2 - x^2 + 2)}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có .

$$\begin{cases} \sqrt{1-2y-x^2} - (y+1) \leq \sqrt{(1^2 + (-1)^2)(1-2y-x^2 + (y+1)^2)} = \sqrt{2(y^2 - x^2 + 2)} \\ \sqrt{1+2x-y^2} + (x-1) \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(1+2x-y^2 + (x-1)^2)} = \sqrt{2(x^2 - y^2 + 2)} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta sẽ có được dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{1-2y-x^2} = -y-1 \\ \sqrt{1+2x-y^2} = x-1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, y \leq -1 \\ 1-2y-x^2 = y^2 + 2y + 1 \\ 1+2x-y^2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, y \leq -1 \\ x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, y \leq -1 \\ y = -x \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, y \leq -1 \\ y = -x \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, y \leq -1 \\ y = -x \\ x = 0 \vee x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (2; -2)$.

Câu 69. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4xy + x + 4\sqrt{(2-x)(y+2)} = 14 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } (2-x)(y+2) \geq 0$$

Từ phương trình (2) ta có $2 = (x+1)^2 + y^2 \geq 2(x+1)y \Rightarrow y(x+1) \leq 1(*)$, đồng thời

$$2 = (x+1)^2 + y^2 \Rightarrow |y| \leq \sqrt{2} \Rightarrow y + 2 > 0$$

Kết hợp điều kiện xác định suy ra $2-x > 0$

Do đó từ (1) cho ta $14 - 4xy - x = 2\sqrt{2-x}(2\sqrt{y+2}) \leq (2-x) + 4(y+2) \Rightarrow y(x+1) \geq 1$ (**)

Từ (*), (**) suy ra hệ có nghiệm khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x+1=y \\ \sqrt{2-x}=2\sqrt{y+2} \\ y(x+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (-2; 1)$.

Câu 70. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-y+4}(\sqrt{x-y+2}+2\sqrt{y-x})=3\sqrt{3} \\ x^3+\sqrt{2x-1}=2-\sqrt{y-2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ y \geq 2 \\ -2 \leq x-y \leq 0 \end{cases}$. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có

$$\sqrt{x-y+2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2(y-x)} \leq \sqrt{(1+2)(x-y+2+2y-2x)} = \sqrt{3(y-x+2)}$$

Do đó ta có $\sqrt{x-y+4}(\sqrt{x-y+2}+2\sqrt{y-x}) \leq \sqrt{3}(\sqrt{y-x+2} \cdot \sqrt{x-y+4})$ (1)

Mặt khác từ điều kiện $-2 \leq x-y \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y-x \leq 2 \Rightarrow y-x+2 > 0$.

Do đó áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* ta có

$$\sqrt{y-x+2} \cdot \sqrt{x-y+4} \leq \frac{y-x+2+x-y+4}{2} = 3 \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có được $\sqrt{x-y+4}(\sqrt{x-y+2}+2\sqrt{y-x}) \leq 3\sqrt{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức ở các đánh giá (1), (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-y+2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{y-x}}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{x-y+4} = \sqrt{y-x+2} \end{cases} \Leftrightarrow y = x+1.$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình

$$x^3 + \sqrt{2x-1} = 2 - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^3 - 1 + \sqrt{2x-1} - 1 + \sqrt{x-1} = 0 \quad (x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \left(\underbrace{(x^2+x+1)\sqrt{x-1} + \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}}_P + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \text{ vì } P > 0, \forall x \geq 1.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ đã cho là $(x, y) = (1; 2)$.

Câu 71. Giải phương trình
$$\begin{cases} (2x-y)\sqrt{2x-1}+2x=y^3+y+1 \\ x\sqrt{9x^2-8x+2}+2y^2\sqrt{8x^2-y^2-4x}=\sqrt{3}(8x^2-y^2-4x) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}; 9x^2 - 8x + 2 \geq 0; 8x^2 - y^2 - 4x \geq 0$

Ta có phương trình (1) tương đương $(2x-y)\sqrt{2x-1}+2x-1=y^3+y$

Đặt $a = \sqrt{2x-1} \geq 0$ thì phương trình trở thành

$$(a^2+1-y)a+a^2=y^3+y$$

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow a^3 + a^2 + a - ay = y^3 + y \\
 &\Leftrightarrow a^3 - y^3 + a^2 - ay + a - y = 0 \\
 &\Leftrightarrow (a - y)(a^2 + ay + y^2 + a + 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow a = y \left(\text{do } a^2 + ay + y^2 + a + 1 > 0, \forall a \geq 0 \right) \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} = y
 \end{aligned}$$

Thay $\sqrt{2x - 1} = y$ vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned}
 &x\sqrt{9x^2 - 8x + 2} + 2(2x - 1)\sqrt{8x^2 - 6x + 1} = \sqrt{3}(8x^2 - 6x + 1) \\
 &\Leftrightarrow x\sqrt{2(2x - 1)^2 + x^2} + 2(2x - 1)\sqrt{(2x - 1)^2 + 2x(2x - 1)} = \sqrt{3}\left[(2x - 1)^2 + 2x(2x - 1)\right] \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{2\left(\frac{2x - 1}{x}\right)^2 + 1} + 2 \cdot \frac{2x - 1}{x} \sqrt{\left(\frac{2x - 1}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2x - 1}{x}} = \sqrt{3}\left[\left(\frac{2x - 1}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2x - 1}{x}\right]
 \end{aligned}$$

Đặt $\frac{2x - 1}{x} = t \geq 0$ phương trình trở thành

$$\sqrt{2t^2 + 1} + 2t\sqrt{t^2 + 2t} = \sqrt{3}(t^2 + 2t) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2t^2 + 1}}{t^2 + 2t} + \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 2t}} = \sqrt{3}$$

Ta lại có $2t + 1 \geq \sqrt{3(t^2 + 2t)} \Leftrightarrow (t - 1)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2t^2 + 1}}{t^2 + 2t} + \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 2t}} \geq \frac{\sqrt{2t^2 + 1}}{\sqrt{2t^2 + 1} \cdot \sqrt{t^2 + 2t}} + \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 2t}} = \frac{2t + 1}{\sqrt{t^2 + 2t}} \geq \frac{\sqrt{3(t^2 + 2t)}}{\sqrt{t^2 + 2t}} = \sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$

Vậy hệ phương trình có $(x; y) = (1; 1)$

Câu 72. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3(x - y - 1)\sqrt{x^2 - y^2 + 9} = y(y - x) - 3 \\ 10y\sqrt{10 - x^2} = x - y - 94 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 9 \geq 0 \\ 10 - x^2 \geq 0 \end{cases}.$$

Sử dụng đánh giá $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Ta có

$$3(x - y - 1)\sqrt{x^2 - y^2 + 9} \leq \frac{(x - y - 1)^2 + 9(x^2 - y^2 + 9)}{2}.$$

Từ đó ta có $2y^2 - 2xy - 6 \leq x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y + 9x^2 - 9y^2 + 81$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 - y^2) - (x + y) + 44 \geq 0 \quad (1).$$

Mặt khác từ phương trình thứ hai ta có được biến đổi

$$\begin{aligned}
 &5(y^2 + 2y\sqrt{10 - x^2} + 10 - x^2) = -5x^2 + 5y^2 + x - y - 44 \\
 &\Leftrightarrow 5(y + \sqrt{10 - x^2})^2 = -5(x^2 - y^2) + x - y - 44.
 \end{aligned}$$

Từ đây ta có $-5(x^2 - y^2) + x - y - 44 \geq 0 \Leftrightarrow 5(x^2 - y^2) - (x - y) + 44 \leq 0 \quad (2)$

$$\begin{aligned}
 \text{Từ (1),(2) ta có } & \begin{cases} x-y-1=3\sqrt{x^2-y^2+9} \\ y=-\sqrt{10-x^2} \\ 5(x^2-y^2)-(x-y)+44=0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x-1+\sqrt{10-x^2}=3\sqrt{2x^2-1} \\ y=-\sqrt{10-x^2} \\ 5(x^2-y^2)-(x-y)+44=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10-x^2=9(2x^2-1)+6(1-x)\sqrt{2x^2-1}+(1-x)^2 \\ y=-\sqrt{10-x^2} \\ 5(x^2-y^2)-(x-y)+44=0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)(10x+9)=3(1-x)\sqrt{2x^2-1} \\ y=-\sqrt{10-x^2} \\ 5(x^2-y^2)-(x-y)+44=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ 10x+9=3\sqrt{2x^2-1} \\ y=-\sqrt{10-x^2} \\ 5(x^2-y^2)-(x-y)+44=0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ 10x+9 \geq 0 \\ 41x^2+90x+45=0 \end{cases} \\ y=-\sqrt{10-x^2} \\ 5(x^2-y^2)-(x-y)+44=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-45+6\sqrt{5}}{41} \\ y=-\sqrt{10-x^2} \\ 5(x^2-y^2)-(x-y)+44=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (1; -3)$.

Câu 73. Giải phương trình $\begin{cases} (x-1+\sqrt{(x-1)^2+4})(y+\sqrt{y^2+4})=4 & (1) \\ \sqrt{4-3y}+\sqrt{9-5y}=x^4-x^2+2x+3 & (2) \end{cases}$

Giải

Từ phương trình đầu ta có $x-1+\sqrt{(x-1)^2+4}=(-y)+\sqrt{(-y)^2+4}$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+4}$, chứng minh được hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $x-1=-y$ thế vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1+3x}+\sqrt{4+5x} &= x^4-x^2+2x+3 \\
 \Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{\sqrt{1+3x}+x+1} + \frac{-x^2+x}{\sqrt{4+5x}+x+2} &= x^4-x^2 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1+3x}+x+1} - \frac{1}{\sqrt{4+5x}+x+2} = x(x+1) \end{cases} & (*)
 \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh (*) vô nghiệm với mọi $x \geq -\frac{1}{3}$

| Phương pháp bất đẳng thức

Theo bất đẳng thức AM – GM $\begin{cases} \sqrt{1+3x} \leq \frac{3x+2}{2} \\ \sqrt{4+5x} \leq \frac{5+5x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3x} + x + 1 \leq \frac{3x+2}{2} + x + 1 \\ \sqrt{4+5x} + x + 2 \leq \frac{5+5x}{2} + x + 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1+3x} + x + 1} + \frac{-1}{\sqrt{4+5x} + x + 2} \leq -\frac{1}{\frac{3x+2}{2} + x + 1} - \frac{1}{\frac{5+5x}{2} + x + 2}$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $-\frac{1}{\frac{3x+2}{2} + x + 1} - \frac{1}{\frac{5+5x}{2} + x + 2} < x^2 + x$ (với $x \geq -\frac{1}{3}$)

$$\Rightarrow -\frac{2}{5x+4} - \frac{2}{7x+9} - x^2 - x < 0 \Leftrightarrow \frac{-2(7x+9) - 2(5x+4) - (x^2+x)(5x+4)(7x+9)}{(5x+4)(7x+9)} < 0$$

Ta có $\begin{cases} x^2 \left(35x^2 + 108x + \frac{109}{2} \right) > 0 \\ \frac{109x^2}{2} + 55x + 20 > 0 \\ 5x + 6 > 0 \\ (5x+4)(7x+9) > 0 \end{cases}$ với $x \geq -\frac{1}{3}$

Vậy $VT < VP$ với mọi $x \geq -\frac{1}{3}$

Câu 74. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{3(2y-2)} = (x+5y)\sqrt{x+2y} \\ (y-1)\sqrt{x-2y+8} = (y-3)\sqrt{x+2y} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq 1 \\ x - 2y + 8 \geq 0 \end{cases}$.

- **Trường hợp 1.** $x + 2y = 0$. Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành hệ.

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{3(2y-2)} = 0 \\ (y-1)\sqrt{x-2y+8} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ \sqrt{x+2}=0 \\ x=2y-8 \\ \sqrt{2y-6} + \sqrt{3(2y-2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

- **Trường hợp 2.** $x + 2y > 0, y > 1$.

Khi đó phương trình thứ hai được biến đổi thành phương trình $\frac{y-3}{y-1} = \sqrt{\frac{x-2y+8}{x+2y}}$.

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có đánh giá sau

$$\sqrt{\frac{x-2y+8}{x+2y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x-2y+8}{x+2y} + 1 \right) = \frac{x+4}{x+2y}.$$

Từ đây ta có $\frac{y-3}{y-1} \geq \frac{x+4}{x+2y} \Leftrightarrow (y-3)(x+2y) \geq (x+4)(y-1)$

$$\Leftrightarrow x + 5y \geq y^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x + 5y \geq 2 \quad (*)$$

Mặt khác từ phương trình thứ nhất áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

Ta có $\sqrt{x+2} + \sqrt{3(2y-2)} \leq \sqrt{(1+3)(x+2+2y-2)} = 2\sqrt{x+2y}$.

Từ đây ta có $(x+5y)\sqrt{x+2y} \leq 2\sqrt{x+2y} \Leftrightarrow x+5y \leq 2 \quad (**).$

Từ $(*)$, $(**)$ suy ra hệ đã cho tương đương với hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 3\frac{x+2}{x+2y} = \frac{2y-2}{x+2y} \\ \frac{x-2y+8}{x+2y} = 1 \\ y = 0 \\ x+5y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) = (-2; 1)$.

Câu 75. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (y-2x)^2 + 4 = y - 6x + 2\sqrt{2(x+1)(y+1)}(1) \\ (y-1)(x^2+x) + 1 = \sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{1-3x}(2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

Từ (1) ta biến đổi thành phương trình sau

$$\begin{aligned} (y-2x)^2 - 2(y-2x) + 1 + 2x + 2 - 2\sqrt{2(x+1)(y+1)} + y + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (y-2x-1)^2 + (\sqrt{2x+2} - \sqrt{y+1})^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x-1=0 \\ \sqrt{2x+2} = \sqrt{y+1} \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x+1. \end{aligned}$$

Thế vào (2) ta có phương trình $2x^3 + 2x^2 + 1 = \sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1-3x}$.

Từ điều kiện $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$, ta có $2x^3 + 2x^2 + 1 = 2x^2(x+1) + 1 > 0$.

Suy ra $\sqrt[3]{1-3x} > 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$. Vậy tổng hợp các điều kiện ta có $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có
$$\begin{cases} \sqrt{1+2x} \leq \frac{1+1+2x}{2} = x+1 \\ \sqrt[3]{1-3x} \leq \frac{1+1+1-3x}{3} = 1-x \end{cases}$$

Từ đây ta suy ra $0 < \sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1-3x} \leq (x+1)(1-x)$.

Vậy ta cần chứng minh $2x^3 + 2x^2 + 1 \leq (x+1)(1-x)$, $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$.

Ta có $2x^3 + 2x^2 + 1 \leq 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2(2x+3) \geq 0$, luôn đúng $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ (thỏa mãn). Suy ra $y = 1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (0; 1)$

Câu 76. Giải phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2y-x}} + \frac{1}{\sqrt{2y+x}} = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{3y-x}} \\ 81\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 8(y+2)^2\sqrt{y-2} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $y \geq 2; x \geq 1; 2y-x > 0; 3y-x > 0$

Đặt $y = tx (t > 0)$. Phương trình (1) tương đương $\frac{1}{\sqrt{2t-1}} + \frac{1}{\sqrt{2t+1}} = \frac{1}{\sqrt{t+1}} + \frac{1}{\sqrt{3t-1}}$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{2t-1} \\ b = \sqrt{2t+1} \\ c = \sqrt{t+1} \\ d = \sqrt{3t-1} \end{cases} (a, b, c, d > 0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{c+d}{cd} \Leftrightarrow cd(a+d) = ab(c+d) \\ &\Leftrightarrow c^2d^2(a^2+b^2+2ab) = a^2b^2(c^2+d^2+2cd) \\ &\Leftrightarrow c^2d^2(a^2+b^2+2ab) = a^2b^2(a^2+b^2+2cd) \\ &\Leftrightarrow (a^2+b^2)(c^2d^2-a^2b^2) + 2abc^2d^2 - 2a^2b^2cd = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2+b^2)(cd+ab)(cd-ab) + 2abcd(cd-ab) = 0 \\ &\Leftrightarrow (cd-ab)[(a^2+b^2)(cd+ab) + 2abcd] = 0 \\ &\Leftrightarrow cd = ab \left(\text{do } (a^2+b^2)(cd+ab) + 2abcd > 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(t+1)(3t-1)} = \sqrt{(2t-1)(2t+1)} \\ &\Leftrightarrow (t+1)(3t-1) = (2t-1)(2t+1) \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (loại)} \\ t = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = 2 \Rightarrow y = 2x$. Thay $y = 2x$ vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned} &81\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 8(2\pi+2)^2\sqrt{2x-2} \\ &\Leftrightarrow 81\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 32(x+1)^2\sqrt{2x-2} \\ &\Leftrightarrow 81\sqrt{2x+2}\sqrt{(x-1)(x+1)} = 64(x+1)^2\sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow 81\sqrt{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})^2} = 64(x+1)^2\sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow 81(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}) = 64(x+1)^2\sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow 81\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}[64(x+1)^2-81] \\ &\Leftrightarrow 81 = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}(64(x+1)^2-81) (*) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } u(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}; v(x) = 64(x+1)^2 - 81 \Rightarrow u(x), v(x) > 0$$

$$\text{Ta có } v'(x) = 128(x+1); u'(x) = \frac{1}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} > 0$$

Suy ra $f'(x) \Rightarrow u'(x)v(x) + v'(x)u(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$

Vậy phương trình (*) có tối đa một nghiệm.

$$\text{Ta có } f\left(\frac{5}{4}\right) = 81 \text{ nên } (*) \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm } (x; y) = \left(\frac{5}{4}; \frac{5}{2}\right)$$

Câu 77. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^2 - xy + 1} + \sqrt[3]{y^2 - xy + 1} - 2 = 2(x - y)^2 \\ (16xy - 5)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 4 = 0 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{x^2 - xy + 1} \\ b = \sqrt[3]{y^2 - xy + 1} \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 = (x - y)^2 + 2$

$$\Leftrightarrow 2(x - y)^2 = 2(a^3 + b^3) - 4 \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \geq 2.$$

Mặt khác từ phương trình thứ nhất ta có

$$a + b - 2 = 2(x - y)^2 \Leftrightarrow a + b - 2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2$$

Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình

$$a + b - 2 = 2(a^3 + b^3) - 4 \Leftrightarrow a + b = 2(a^3 + b^3) - 2 \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} = 2(a^3 + b^3) - 2 (*)$$

Mặt khác ta lại có $a^2 - ab + b^2 = \frac{1}{4}(a + b)^2 + \frac{3}{4}(a - b)^2 \geq \frac{1}{4}(a + b)^2 \geq 1$

Vậy ta sẽ có $\frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} \leq \frac{a^3 + b^3}{1}$, do đó từ (*) ta có

$$2(a^3 + b^3) - 2 \leq a^3 + b^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 \leq 2$$

Vì $\begin{cases} a^3 + b^3 \geq 2 \\ a^3 + b^3 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow a^3 + b^3 = 2 \Leftrightarrow (x - y)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow (x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y.$

Thế vào phương trình thứ hai ta thu được phương trình $(16x^2 - 5)\sqrt{x} + 2 = 0$ (3).

Đặt $t = \sqrt{x}, t \geq 0$. Lúc đó phương trình (3) trở thành phương trình.

$$\begin{aligned} (16t^4 - 5)t + 2 &= 0 \Leftrightarrow 16t^5 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)^2(4t^3 + 4t^2 + 3t + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow 2t - 1 &= 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ vì } 4t^3 + 4t^2 + 3t + 2 > 0, \forall t \geq 0. \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right).$

Bài 78. Cho x, y là các số thực không âm, giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + 1}} + \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{xy} + \sqrt{xy + 1}} \\ \sqrt{x(2y + 1)(y + 3x^2)} = y^3 \cdot \sqrt{y^2 + 1} \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình trên, sử dụng bất đẳng thức đã biết ta dễ dàng suy ra $x = y$. Thay vào phương trình dưới ta được

$$\begin{aligned} y(2y + 1)(y + 3y^3) &= y^6(y^2 - 1) \Leftrightarrow (2y + 1)(3y + 1) = y^6 - y^4 \\ \Leftrightarrow y^6 - y^4 - 6y^2 - 5y - 1 &= 0 \Leftrightarrow (y^3 - 3y - 1)(y^3 + 2y + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow y^3 - 3y - 1 &= 0 \text{ (vì } y \geq 0) \end{aligned}$$

Tới đây ta phải sử dụng phép thế lượng giác

Đặt $y = 2 \cos t \left(t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \right)$, phương trình trở thành

| Phương pháp bất đẳng thức

$$8\cos^3 t - 6\cos t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $t = \frac{\pi}{9} \Rightarrow y = 2\cos \frac{\pi}{9} \Rightarrow x = 4\cos^2 \frac{\pi}{9}$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \left\{\left(4\cos^2 \frac{\pi}{9}; 2\cos \frac{\pi}{9}\right)\right\}$

Bài 79. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} + \frac{1}{x + \sqrt{y(2x-y)}} = \frac{2}{y + \sqrt{x(2x-y)}} \\ 2(y-4)\sqrt{2x-y+3} - (x-6)\sqrt{x+y+1} = 3(y-2) \end{cases}.$$

Giải

Nhận thấy $x=0$ hoặc $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y > 0$, ta đặt $x = ty, (t > 0)$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(\sqrt{t} + 1)^2} + \frac{1}{t + \sqrt{2t-1}} = \frac{2}{1 + \sqrt{t(2t-1)}} \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{(\sqrt{t} + 1)^2} + \frac{2}{(\sqrt{2t-1} + 1)^2} = \frac{2}{1 + \sqrt{t(2t-1)}} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{(\sqrt{t} + 1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2t-1} + 1)^2} = \frac{1}{1 + \sqrt{t(2t-1)}} \end{aligned}$$

Chú ý ta có bất đẳng thức sau $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$.

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$(1+ab)(a+b) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{ab} \cdot \sqrt{b})^2 = a(1+b)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{a}{a+b} \cdot \frac{1}{a+b}.$$

Tương tự ta có $\frac{1}{(1+a)^2} \geq \frac{b}{a+b} \cdot \frac{1}{1+ab}$.

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab} \left[\frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} \right] = \frac{1}{1+ab}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Do vậy $\sqrt{t} = \sqrt{2t-1} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ phương trình ta được

$$2(x-4)\sqrt{x+3} - (x-6)\sqrt{2x+1} = 3(x-2).$$

Nhận thấy $x=2$ là một nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq 2$ khi đó

$$\begin{cases} 2(x-4)\sqrt{x+3} - (x-6)\sqrt{2x+1} = 3(x-2) \\ 2(x-4)\sqrt{x+3} + (x-6)\sqrt{2x+1} = \frac{4(x-4)^2(x+3) - (x-6)^2(2x+1)}{3(x-2)} = \frac{2x^2 + 7x - 78}{3} \end{cases}$$

Cộng về theo về hai phương trình ta được.

$$4(x-4)\sqrt{x+3} = \frac{2x^2 + 7x - 78}{3} + 2(x-2) = \frac{2x^2 + 16x - 78}{3}$$

$$\Leftrightarrow 12(x-4)\sqrt{x+3} = 2(x-4)(x+12) \Leftrightarrow 2(x-4)[6\sqrt{x+3} - x - 12] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 6 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy thỏa mãn

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $S = \{(2;2);(4;4);(6;6)\}$.

Câu 80. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} - y = \frac{2}{3\sqrt{3}} & (1) \\ x\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{3} & (2) \end{cases}$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$x\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \stackrel{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{x\sqrt{x} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}(1-x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{Lấy (1)-(2)} \Leftrightarrow \sqrt{x}(1-x) - \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Suy ra $VT \leq VP$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{1}{3}$

Câu 81. Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} x^2 - x + 2 = 2\sqrt{-y^2 + 5y - 5} & (1) \\ -x + y + 3 = 2\sqrt{-2y^2 + 8y - 4} & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -y^2 + 5y - 5 \geq 0 \\ -2y^2 + 8y - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) ta có } x^2 - x + 2 &= 2\sqrt{-y^2 + 5y - 5} \leq -y^2 + 5y - 5 + 1 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - x - 5y + 6 \leq 0 (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (2) ta có } -x + y + 3 &= 2\sqrt{-2y^2 + 8y - 4} \leq \frac{-2y^2 + 8y - 4 + 4}{2} = -y^2 + 4y \\ &\Rightarrow y^2 - x - 3y + 3 \leq 0 (**) \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (*) và (**) ta được

$$x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2(y-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$

Câu 82. Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} x - 1 = \sqrt{(2x-1)^2 - 4y + 4} & (1) \\ 3y - 6x + 25 = 4\sqrt{41 - (y-6)^2} & (2) \end{cases}$$

Giải

Phương trình (2) trở thành

$$\begin{aligned} 6y - 12x = 50 &= 8\sqrt{41 - (y-6)^2} \leq \left[16 + (41 - (y-6)^2)\right] = -y^2 + 12y + 21 \\ &\Rightarrow y^2 - 6y - 12x + 29 \leq 0 (*) \end{aligned}$$

| Phương pháp bất đẳng thức

Phương trình (1) trở thành $x^4 - 6x^2 + 4y + 4x - 4 = 0 (**)$

Từ (*), (**) $\Rightarrow x^4 - 6x^2 - 8x + y^2 - 2y + 25 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 + 2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow x = 2, y = 1$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2, y = 1$

Câu 84. Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} x^2 + 2 = \sqrt{5x^2 + 3y - 5} \\ y - 2x + 7 = 4\sqrt{4y - y^2 + 1} \end{cases}$$

Giải

Bài này nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$. Sau đây sẽ quyết định đánh giá phương trình nào, bài này đánh giá phương trình (2) như sau

Với nghiệm đã nói thì $\sqrt{4y - y^2 + 1} = 2$ dùng bất đẳng thức $AM - GM$ như sau

$$y - 2x + 7 = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{4y - y^2 + 1} \stackrel{AM-GM}{\leq} 4 + \left(\sqrt{4y - y^2 + 1}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 2x + 2 \leq 0 \quad (1)$$

Khi đó $(x^2 + 2)^2 = \left(\sqrt{5x^2 + 3y - 5}\right)^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 3y + 9 = 0 \quad (2)$

Lấy (1) + (2) ta được $x^4 - x^2 + y^2 - 6y - 2x + 11 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1) + (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Câu 85. Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} 2x - 1 = \sqrt{2(3y^2 - x^4 - x^2)} - 1 \\ 2y^4 + 4y^2 + 10 = 8x\sqrt{2(y + 1)} \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện} \begin{cases} 2(3y^2 - x^4 - x^2) - 1 \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{2}; y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình (1) trở thành $4x^2 - 4x + 1 = 6y^2 - 2x^4 - 2x^2 - 1$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 2(x - 1)^2 + 2x^4 + 1 = 6y^2$$

$$\Leftrightarrow 6y^2 + 2 = 2(x^2 - 1)^2 + 2(x - 1)^2 + 8x^2 \geq 8x^2 \Leftrightarrow 2x \leq \sqrt{3y^2 + 1}$$

Phương trình (2) trở thành $2y^4 + 4y^2 + 10 = 4 \cdot 2x \cdot \sqrt{2(y + 1)} \leq 4\sqrt{2(y + 1)(3y^2 + 1)}$

$$\leq 2(2y + 2 + 3y^2 + 1) = 4y + 4 + 6y^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow y^4 - y^2 - 2y + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2(y^2 + 2y + 2) \leq 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = y = 1$

Câu 86. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 + (4x - 1)^2 = \sqrt[3]{4x(8x + 1)} \\ 40x^2 + x = y\sqrt{14x - 1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Cách 1.

Điều kiện. $14x \geq 1; y \in \mathbb{R}$

Ta có $\sqrt[3]{4x(8x + 1)} + 2y\sqrt{14x - 1} = y^2 + (4x - 1)^2 + 2(40x^2 + x)$

Mặt khác theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta được

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{4x(8x+1)} + 2y\sqrt{14x-1} &= \sqrt[3]{8x \frac{(8x+1)}{2}} \cdot 1 + 2y\sqrt{14x-1} \\ &\leq \frac{1}{3} \left(8x + \frac{8x+1}{2} + 1 \right) + y^2 + 14x - 1 \\ &\leq y^2 + (4x-1)^2 + 2(40x^2+x) - \frac{3}{2}(8x-1)^2 \leq y^2 + (4x-1)^2 + 2(40x^2+x) \end{aligned}$$

Do đó dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{8}; y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đây là nghiệm duy nhất của hệ.

Cách 2.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{14}$

Với điều kiện như thế thì phương trình hai hiển nhiên $y > 0$. Ta có đánh giá sau đây

$$40x^2 + x = y\sqrt{14x-1} \leq \frac{y^2 + 14x - 1}{2} \Leftrightarrow y^2 \geq 80x^2 - 12x + 1$$

Từ phương trình (1) ta lại có

$$\sqrt[3]{4(8x+1)} = y^2 + (4x-1)^2 \geq 80x^2 - 12x + 1 + (4x-1)^2 = 2(48x^2 - 10x + 1)$$

Đồng thời $\sqrt[3]{4x(8x+1)} = \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (32x^2 + 4x)} \leq \frac{1 + 1 + 32x^2 + 4x}{3}$

Từ đó suy ra $2(48x^2 - 10x + 1) \leq \frac{32x^2 + 4x + 2}{3} \Leftrightarrow 2(8x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{8}; y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cách 3.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{14}$

hệ phương trình đã cho được viết lại thành
$$\begin{cases} y^2 + 16x^2 - 8x + 1 = \sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ 80x^2 + 2x = 2y\sqrt{14x-1} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế hai phương trình ta được.

$$\begin{aligned} (y^2 - 2y\sqrt{14x-1} + 14x - 1) + 96x^2 - 20x + 2 &= \sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ \Leftrightarrow (y - \sqrt{14x-1})^2 + 96x^2 - 20x + 2 &= \sqrt[3]{4x(8x+1)}(1) \end{aligned}$$

Ta có $VT(1) \geq 96x^2 - 20x + 2 = \frac{1}{2} [3(8x-1)^2 + 8x + 1] \geq \frac{1}{2}(8x+1)$

$$= \frac{1}{6} (16x + 8x + 1 + 2) \geq \frac{1}{2} \sqrt[3]{16x(8x+1)} \cdot 2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)} = VP(1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x; y) = \left(\frac{1}{8}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

Câu 87. Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} x^2 + 1 = \sqrt{16 - 2xy - \frac{3}{2}y^2} \\ x + y = \sqrt[3]{9x^2 + 14xy - 42} \end{cases}$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có $x + y = \sqrt{2 \cdot 2 \sqrt{9x^2 + 14xy - 42}} \leq \sqrt{9x^2 + 14xy - 38}$

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \leq 9x^2 + 14xy - 38 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 - 4x^2 - 6xy + 19 \leq 0 \quad (1)$$

Ta có $(x^2 + 1)^2 = \left(\sqrt{16 - 2xy - \frac{3}{2}y^2} \right)^2 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 - 15 = 0 \quad (1)$

Lấy (1)+(2) ta được $x^4 - 2x^2 - 4xy + 2y^2 + 4 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 + 2(x - y)^2 \leq 0 \Rightarrow x = y = \sqrt{2}$$

Câu 88. Giải phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+y-1} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{4x^3 + 3y^2 + 2} \\ 2\sqrt{\frac{x^2+2}{6}} + \sqrt{\frac{3x-2y}{2}} = \sqrt{\frac{2x^2+4x-y+4}{2}} \end{cases}$$

Giải

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^3 + 3y^2 + 2} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2(x+y-1)} + 1 \cdot \sqrt{2x-1} \\ &\leq \sqrt{(2+1)(2(x+y-1)+2x-1)} = \sqrt{3(4x+2y-3)} \end{aligned}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{3(4x+2y-3)} \leq \sqrt{4x^3 + 3y^2 + 2}$

Thật vậy bất đẳng thức tương đương

$$3(4x+2y-3) \leq 4x^3 + 3y^2 + 2 \Leftrightarrow 4x^3 + 3y^2 + 11 \geq 12x + 6y$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta được
$$\begin{cases} 4(x^3 + 1 + 1) \geq 4 \cdot 3x = 12x \\ 3(y^2 + 1) \geq 3 \cdot 2y = 6y \end{cases}$$

Suy ra bất đẳng thức trên đúng.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$

Ta thay vào phương trình thứ 2 ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 89. Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 3x^2 - x + \frac{1}{2} = y\sqrt{x^2 + x} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x; y > 0$

Hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 6x^2 - 2x + 1 = 2y\sqrt{x^2 + x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 5x^2 + (x-1)^2 = 2y\sqrt{x^2 + x} \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\sqrt[3]{2 \cdot 4x \cdot (2x+1)} \leq \frac{2x+1+4x+2}{3} = 2x+1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq \frac{2x+1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 + 2y^2 \leq 2x+1 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 + 2y^2 \leq 0$$

Kết hợp lại ta được

$$2(5x^2 - 3x + 1 - y^2) + 2x^2 - 6x + 1 + 2y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

Câu 90. Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} \sqrt{(x^2+1)^3} - 8x^3 = 2\sqrt{2y-1} - 2 \\ y^2 + 1 = 2\sqrt{-9x^3 + 3x + 1} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{2} \\ -9x^3 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có $VP(1) \leq 2y - 1 + 1 - 2 = 2y - 2 \leq y^2 + 1 - 2 = y^2 - 1$

Mà $y^2 - 1 = 2\sqrt{-9x^3 + 3x + 1} - 2 \leq -9x^3 + 3x + 1 - 2 = -9x^3 + 3x$

Suy ra $\sqrt{(x^2+1)^3} - 8x^3 \leq -9x^3 + 3x \Leftrightarrow \sqrt{(x^2+1)^3} \leq -x^3 + 3x \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + 3x \geq 0 & (*) \\ (x^2+1)^3 \leq (-x^3 + 3x)^2 & (**) \end{cases}$

Phương trình (**) tương đương $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 \leq x^6 - 6x^4 + 9x^2 \Leftrightarrow 9x^4 - 6x^2 + 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (3x^2 - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Kết hợp (*) thấy $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thỏa mãn. Khi đó $y = 1$ (t/m)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right)$

Câu 91. Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} = \sqrt{3xy - \frac{x^3}{2} - 2y - \frac{7}{4}} \\ y = \sqrt{\frac{2x}{y-x+1}} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}, y \geq 0$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= 6xy - x^3 - 4y - \frac{7}{2} \stackrel{AM-GM}{\leq} \left[(x^2 + 4) + 2x\right]y - x^3 - 4y - \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow x^3 - x^2y + 2x^2 - 2xy - 2x + 4 \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác $y^2(y - x + 1) = 2x \Leftrightarrow y^3 - xy^2 + y^2 - 2x = 0 \quad (2)$

Lấy (1) + (2) về theo về ta có $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4 \leq 0$

$$\Leftrightarrow [x^3 + y^3 - xy(x + y)] + (x - y)^2 + (x - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Câu 92. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3 = \sqrt{(y+1)^2 + 2xy - 2} \\ \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8x - x^2 - 3} \end{cases}$$

Giải

Phương trình đầu tương đương $x^2 + 6x - y^2 - 2y - 2xy + 11 = 0 \quad (1)$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{8x - x^2 - 3}} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{9 + 8x - x^2 - 3} \\ &\Rightarrow 3(y - 1)^2 \leq 8x - x^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 3y^2 - 6y + 3 \leq 0 \quad (2) \end{aligned}$$

| Phương pháp bất đẳng thức

Lấy (1)+(2) ta có $2x^2 + 2y^2 - 2x - 8y - 2xy + 14 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 + (x-y+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=2 \wedge y=3$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$.

Câu 93. Giải phương trình
$$\begin{cases} (y-2x)^2 + 6x + 2 = y + 2\sqrt{y(2x+1)} \\ \frac{1}{1+\sqrt{y-x}} + \frac{x}{1+\sqrt{y}} + \frac{1}{1+\sqrt{x+y}} = 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $y \geq x; y \geq 0; x \geq -\frac{1}{2}$

Phương trình (1) tương đương $(y-2x)^2 + 6x + 2 = y + 2\sqrt{y(2x+1)}$

$$\Leftrightarrow [(y-2x)^2 - 2(y-2x) + 1] + [y - 2\sqrt{y(2x+1)} + 2x + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2x-1)^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{2x+1})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + 1$$

Thay $y = 2x + 1$ vào phương trình (2) ta được

$$\frac{1}{\sqrt{y-x}+1} + \frac{\frac{y-1}{2}}{1+\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y+x}+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y-x}+1} + \frac{1}{\sqrt{y+x}+1} + \frac{\sqrt{y}-1}{2} = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có
$$\begin{cases} \sqrt{y-x} \leq \frac{y-x+1}{2} \\ \sqrt{y+x} \leq \frac{y+x+1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y-x}+1} + \frac{1}{\sqrt{y+x}+1} \geq \frac{1}{\frac{y-x+1}{2}+1} + \frac{1}{\frac{y+x+1}{2}+1} = \frac{2}{y-x+3} + \frac{2}{y+x+3}$$

Áp dụng $Cauchy-Schwarz$ ta được $\frac{2}{y-x+3} + \frac{2}{y+x+3} \geq \frac{8}{2y+6} = \frac{4}{y+3}$

Khi đó ta cần chứng minh $\frac{4}{3+y} + \frac{\sqrt{y}-1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{8}{3+y} + \sqrt{y} \leq 3$

Xét hàm số $f(y) = \frac{8}{3+y} + \sqrt{y}$ với $y \geq 0$ ta có $f'(y) = \frac{-8}{(y+3)^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{(y+3)^2 - 16\sqrt{y}}{2\sqrt{y}(y+3)^2} > 0$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(1) = 3 \Rightarrow f(y) \leq 3 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 0$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (0; 1)$

Câu 94. Giải phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x+y-4}+1)^2 = 2y-7+2\sqrt{4x-x} \\ \frac{x+1}{y+2} + \frac{y+1}{x+2} = 1 + \frac{\sqrt{xy}}{4} \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+y-4 \geq 0 \\ 4x-xy \geq 0 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \text{ . Phương trình (1) tương đương}$$

$$\begin{aligned} x+y-4+2\sqrt{x+y-4}+1 &= 2y-7+2\sqrt{4x-xy} \\ \Leftrightarrow (x-2\sqrt{x(4-y)}+4-y)+2\sqrt{x+y-4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{4-y})^2+2\sqrt{x+y-4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{4-y}=0 \\ \sqrt{x+y-4}=0 \end{cases} &\Leftrightarrow y=4-x \end{aligned}$$

Thay $y=4-x$ vào phương trình (2) ta được $\frac{x+1}{6-x} + \frac{5-x}{x+2} = 1 + \frac{\sqrt{x(4-x)}}{4}$

Điều kiện $0 \leq x \leq 4$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2)+(6-x)(5-x)}{(6-x)(x+2)} &= 1 + \frac{\sqrt{x(4-x)}}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{2x^2-8x+32}{-x^2+4x+12} &= 1 + \frac{\sqrt{x(4-x)}}{4} \Leftrightarrow \frac{3x^2-12x+20}{-x^2+4x+12} = \frac{\sqrt{x(4-x)}}{4} \\ \Leftrightarrow 12x^2-48x+80 &= (-x^2+4x+12)\sqrt{x(4-x)} \\ \Leftrightarrow 14x^2-56x+56 &= (-x^2+4x+12)(\sqrt{x(4-x)}-2) \\ \Leftrightarrow 14(x-2)^2 + \frac{(4-x)+12}{\sqrt{x(4-x)}+2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 \left(14 + \frac{x(4-x)+12}{\sqrt{x(4-x)}+2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x=2 \left(\text{do: } 14 + \frac{x(4-x)+12}{\sqrt{x(4-x)}+2} > 0 \right) \end{aligned}$$

Với $x=2 \Rightarrow y=2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 2)$

Câu 95. Giải phương trình
$$\begin{cases} (x-y)^2 + 4(x+3y) = 28 + 8\sqrt{y(x-2)} + 8\sqrt{(y-2)(x-4)} \\ \sqrt{(y-2)(x-4)} + 2\sqrt{(y-3)(x-5)} = (y-x)^2 \end{cases}$$

Giải

Biến đổi phương trình đầu của hệ tương đương

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y + 4 - 2(xy - 2x - 4y + 8) &= 16 + 8\sqrt{y(x-2)} + 8\sqrt{(y-2)(x-4)} \\ \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 - 2(y-2)(x-4) &= 16 + 8\sqrt{y(x-2)} + 8\sqrt{(y-2)(x-4)} \\ \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 &= 2\left[(y-2)(x-4) + 4\sqrt{(y-2)(x-4)} + 4\right] + 8\sqrt{y(x-2)} + 8 \\ \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 &= 2\left(\sqrt{(y-2)(x-4)} + 2\right)^2 + 8\sqrt{y(x-2)} + 8 \quad (*) \end{aligned}$$

| Phương pháp bất đẳng thức

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{y} \\ b = \sqrt{x-2} \end{cases} (a \geq 0; b \geq 0)$. Phương trình (*) trở thành

$$(a^2 + 2)^2 + (b^2 + 2)^2 = 2\left(\sqrt{(a^2 - 2)(b^2 - 2)} + 2\right)^2 + 8ab + 8$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(a^2 - 2)(b^2 - 2)} + 2\right)^2 &\leq (a^2 + 2 - 2)(b^2 + 2 - 2) = a^2 b^2 \\ \Rightarrow 2\left(\sqrt{(a^2 - 2)(b^2 - 2)} + 2\right)^2 + 8ab + 8 &\leq 2a^2 b^2 + 8ab + 8 = 2(ab + 2)^2 \\ \Rightarrow (a^2 + 2)^2 + (b^2 + 2)^2 &\geq 2(a^2 + 2)(b^2 + 2) \geq 2(ab + 2)^2 \end{aligned}$$

Do đó $VT \geq 2(ab + 2)^2 \geq VP$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b \Leftrightarrow y = x - 2$

Thay $y = x - 2$ vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{(y-2)^2} + 2\sqrt{(y-3)^2} &= 4 \Leftrightarrow |y-2| + 2|y-3| = 4 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y-2+2(y-3)=4 & (y \geq 3) \\ y=0 & (L) \\ 2-y-2(y-3)=4 & (y \leq 2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \Rightarrow x=6 \\ y=0 & (L) \\ y=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{10}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (6; 4); \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Câu 96. Giải phương trình $\begin{cases} (x+y+1)(xy+x+y+1)=12xy & (1) \\ x\sqrt{1+y-2y^2}+y\sqrt{3x-2x^2-1}+xy-1=0 & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \leq 1; -\frac{1}{2} \leq y \leq 1$

Nếu $-\frac{1}{2} \leq y \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ -\frac{1}{2} \leq xy \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (x+y+1)(xy+x+y+1) > 0 \geq 12xy$, vô nghiệm

Suy ra $\frac{1}{2} \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow xy \leq 1$

Từ phương trình (1) ta suy ra $12xy \geq (2\sqrt{xy}+1)(xy+2\sqrt{xy}+1)$

Đặt $t = \sqrt{xy} (t \in [0; 1]) \Rightarrow 12t^2 \geq (2t+1)(t+1)^2 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+5t-1) \leq 0$

Do $t \in [0; 1] \Rightarrow 2t^2 - 5t - 1 < 0 \Rightarrow t \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1$

Từ đó suy ra $x = y = 1$

Vậy hệ phương trình $(x; y) = (1; 1)$

Câu 97. Giải phương trình $\begin{cases} (x+7y)\sqrt{x}+(y+7x)\sqrt{y}=8\sqrt{2xy(x+y)} \\ (x^2+3y^2+y-2x-7)\sqrt{2x-y+2}=10+3x+y-8x^2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x \geq 0; y \geq 0$

Ta thấy $x = y = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Phương trình (1) của hệ tương đương $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} + 7(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 8\sqrt{2(x+y)}$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{y} \end{cases} (a, b \geq 0)$. Phương trình trở thành $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + 7(a+b) \geq 8\sqrt{2(a^2+b^2)}$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{8}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + a+b} \right) = 0$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} = \frac{8}{(a+b) + (a+b)} \geq \frac{8}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + a+b}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Hay phương trình (1) $\Leftrightarrow x = y$

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned} (4x^2 - x - 7)\sqrt{x+2} &= 10 + 4x - 8x^2 \\ \Leftrightarrow (4x^2 - x - 7)\sqrt{x+2} &= 2x - 4 - 2(4x^2 - x - 7) \\ \Leftrightarrow (4x^2 - x - 7)(\sqrt{x+2} + 2) &= 2(x-2) \\ \Leftrightarrow 4x^2 - x - 8 &= \frac{2(x-2)}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{2[(x+2) - 4]}{\sqrt{x+2} + 2} \\ \Leftrightarrow 4x^2 - x - 8 &= \frac{2(\sqrt{x+2} + 2)(\sqrt{x+2} - 2)}{\sqrt{x+2} + 2} = 2(\sqrt{x+2} - 2) \\ \Leftrightarrow 4x^2 - x - 3 &= 2\sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow 16x^4 - 8x^3 - 23x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(4x-1)(4x^2 - 5x - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -1 \\ x = \frac{5+\sqrt{41}}{8} \Rightarrow y = \frac{5+\sqrt{41}}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1); \left(\frac{5+\sqrt{41}}{8}; \frac{5+\sqrt{41}}{8} \right)$

Câu 98. Giải phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y-2x-3} = (x+1)\sqrt{y+1-x^2} \\ \sqrt[3]{xy+2x+3y+2(x+3)}\sqrt{y+1+6} - \sqrt[3]{xy+2y+x+2} = 1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x \geq 0; y - 2x - 3 \geq 0; y + 1 - x^2 \geq 0$

Phương trình (1) tương đương $\sqrt[3]{(x+3)(\sqrt{y+1}+1)^2} = 1 + \sqrt[3]{(x+2)(y+1)}$

Đặt $a = x+2 > 0; b = \sqrt{y+1} \geq 0$

Từ (3), ta có $\sqrt[3]{(1+a)(1+b)^2} = 1 + \sqrt[3]{ab^2} \Leftrightarrow 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{1+a} \cdot \frac{1}{1+b} \cdot \frac{1}{1+b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{1+a} \cdot \frac{b}{1+b} \cdot \frac{b}{1+b}}$

| Phương pháp bất đẳng thức

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt[3]{\frac{1}{1+a} \cdot \frac{1}{1+b} \cdot \frac{1}{1+b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{1+a} \cdot \frac{b}{1+b} \cdot \frac{b}{1+b}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+b} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} \right) = 1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hay $x + 2 = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow y = x^2 + 4x + 3$

Thay $y = x^2 + 4x + 3$ vào (2) ta được

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^2 + 2x} &= (x^4 + 1)\sqrt{4x+4} \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 2x})^2 = (x+1)^2(x+1) \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2x\sqrt{x+2} &= 8x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^9 + 2x^2 + 1 - 2x\sqrt{x+2} = 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x+2) - 2x\sqrt{x+2} + 1 &= 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{x+2} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x+2} = 1 \\ \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 1 &= 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(L) \\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{5+3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{5-3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{5+3\sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{5-3\sqrt{5}}{2} \right)$

Câu 99. Giải phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y + 1) = 2x\sqrt{y+1} + 2y\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y} \\ x\sqrt{x+y} + (y+1)\sqrt[4]{x+3y} = xy + 3x - 1 \end{cases}$$

Giải

Phân tích. Bài hệ này là một bài hệ đánh giá khá là khó. Chúng ta phải đoán được nghiệm của nó là $x = 1; y = 0$ để tiện cho việc đánh giá mối quan hệ x và y .

Áp dụng công thức bất đẳng thức AM – GM ta có $x + y + 1 \geq 2\sqrt{x(y+1)}$.

Do đó ta có $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y + 1) \geq 2x\sqrt{y+1} + 2\sqrt{xy}(y+1)$.

Thay vào (1), ta được

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{y+1} + 2y\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y} &= (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y + 1) \geq 2x\sqrt{y+1} + 2\sqrt{xy}(y+1) \\ \Leftrightarrow y\sqrt{x-1} + \sqrt{y} &\geq \sqrt{xy}(y+1) \Leftrightarrow \sqrt{y}(\sqrt{xy-y} + 1 - \sqrt{x(y+1)}) \geq 0\sqrt{xy-y} + 1 - \sqrt{x}(y+1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{xy-y} + 1 &\geq \sqrt{x(y+1)} \Leftrightarrow xy - y + 1 + 2\sqrt{xy-y} \geq xy + x \\ \Leftrightarrow x - 1 + y - 2\sqrt{y(x-1)} &\leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - \sqrt{y})^2 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y + 1 \end{aligned}$$

Tới đây ta đã tìm ra mối quan hệ giữa x và y . Bài toán coi như đã tháo được nút thắt.

Thế vào phương trình (2) ta được

$$4x\sqrt{x+y} + 4x\sqrt[4]{x+3y} = 4(xy + 3x - 1) = 4x^2 + 8x - 4$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

- $2.2x\sqrt{x+y} \leq 2(x^2 + x + y) = 2x^2 + 4x - 2(3)$
- $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x+3y} \leq 1 + x^2 + x^2 + (x + 3y) = 2x^2 + x + 3y + 1 = 2x^2 + 4x - 2(4)$

Lấy (3) + (4) $\Rightarrow 4x\sqrt{x+y} + 4x\sqrt[4]{x+3y} \leq 4x^2 + 8x - 4$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 0)$

Câu 100. Giải phương trình
$$\begin{cases} 11\sqrt[3]{3x^3 - 4x^2y + 2xy^2} + 6\sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} = 17x + 6y \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt[4]{y+3} = 2x - y + \sqrt{2x} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Áp dụng công thức bất đẳng thức $AM - GM$ ta được $6\sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} \geq 6\sqrt[3]{4 \cdot \frac{(x+y)^3}{4}}$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} 17x + 6y &\geq 11\sqrt[3]{3x^3 - 4x^2y + 2xy^2} + 6\sqrt[3]{4 \cdot \frac{(x+y)^3}{4}} = 11\sqrt[3]{3x^3 - 4x^2y + 2xy^2} + 6(x+y) \\ \Leftrightarrow 11x &\geq 11\sqrt[3]{3x^3 - 4x^2y + 2xy^2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{3x^3 - 4x^2y + 2xy^2} \\ \Leftrightarrow x^3 &\geq 3x^3 - 4x^2y + 2xy^2 \Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2y + 2xy^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x(x-y)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Thay $x = y$ vào phương trình (2) của hệ, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x+3} &= x + \sqrt{2x} - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2x} - \sqrt[4]{x+3}) + (x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4x^2 - x + 3}{f(x)} + (x-1) &= 0 \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{4x+3}{f(x)} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

Trong đó $f(x) > 0$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$

Câu 101. Giải phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 2x = y(x+1) + 4x\sqrt{2x-y} \\ \sqrt{x^2 - \frac{14xy - 6y^2}{9}} + \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} = x \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x^2 - \frac{14xy - 6y^2}{9} \geq 0 \end{cases}$

Ta có $\sqrt{x^2 - \frac{14xy - 6y^2}{9}} = x - \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2y + xy^2 - y^3 \geq 0 \Leftrightarrow y(x^2 + xy - y^2) \geq 0 (*)$

Ta lại có $4x^2 - 4x\sqrt{2x-y} + 2x - y = x^2 + xy - y \Leftrightarrow x^2 + xy - y^2 = (2x - \sqrt{2x-y})^2 \Rightarrow x^2 + xy - y^2 \geq 0$

Do đó, từ (*) suy ra $y \geq 0$ kèm theo $x \geq 0$.

Xét 2 đánh giá sau $\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y, \frac{y^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x$

Biến đổi tương đương, ta có

$$3x^3 \geq (2x-y)(x^2 + xy + y^2) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức luôn đúng.

Xét phương trình (2), ta có

| Phương pháp bất đẳng thức

$$x = \sqrt{x^2 - \frac{14xy - 6y^2}{9}} + \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{\sqrt{9x^2 - 14xy + 6y^2}}{3} + \frac{1}{3}(x + y)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2 - 14xy + 6y^2} \leq 2x - y \Leftrightarrow 5(x - y)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thay $x = y$ vào phương trình (1), ta được

$$x^2 = (2x - \sqrt{x})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - \sqrt{x} \\ x = \sqrt{x} - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{1}{9} \Rightarrow y = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1); \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{9}\right)$

Câu 102. Giải phương trình
$$\begin{cases} x(y^2 + 16) + 7x^2 + 5(x - y) + 5 = (1 - 2y)\sqrt{-y(3x + 7) + 5} \\ \sqrt{4x(x + y) + y^2 + 16} + \sqrt{4(y^2 + xy + 4) + x^2} - \sqrt{9(x + y)^2 + 64} = 0 \end{cases}$$

Giải

Phương trình (2) tương đương

$$\sqrt{4x(x + y) + y^2 + 16} + \sqrt{4(y^2 + xy + 4) + x^2} = \sqrt{9(x + y)^2 + 64}$$

Áp dụng bất đẳng thức Mincopxki, ta có $VT = \sqrt{4x(x + y) + y^2 + 16} + \sqrt{4(y^2 + xy + 4) + x^2}$

$$= \sqrt{(2x + y)^2 + 4^2} + \sqrt{(2y + x)^2 + 4^2} \geq \sqrt{(2x + y + 2y + x)^2 + (4 + 4)^2} = \sqrt{9(x^2 + y^2) + 64} = VP$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Thay $x = y$ vào phương trình (1) của hệ, ta có

$$\Leftrightarrow x^3 + 7x^2 + 16x + 5 = (1 - 2x)\sqrt{-3x^2 - 7x + 5}$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^3 + x^2 + 4x - 3 = (1 - 2x)\sqrt{(1 - 2x)(x + 2) - (x^2 + 4x - 3)} (*)$$

Đặt $a = x + 2; b = \sqrt[3]{(1 - 2x)(x + 2) - (x^2 + 4x - 3)}$.

Khi đó từ (*) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a^3 = (1 - 2x)b - (x^2 + 4x - 3) \\ b^3 = (1 - 2x)a - (x^2 + 4x - 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b^3 - a^3 = (1 - 2x)(a - b) \Leftrightarrow (b - a)(a^2 + ab + b^2 + 1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a^2 + ab + b^2 + 1 - 2x = 0 \end{cases}$$

• **Trường hợp 1.** $a^2 + ab + b^2 + 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3a^2 + 4 - 8x}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3(x + 2)^2 + 4 - 8x}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3x^2 + 4x + 16}{4} = 0$$

• **Trường hợp 2.** $a = b \Rightarrow \sqrt[3]{(1 - 2x)(x + 2) - (x^2 + 4x - 3)} = x + 2$

$$\Leftrightarrow x^3 + 9x^2 + 19x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 + 6x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = -3 \\ x = -3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 2\sqrt{2} \\ x = -3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow y = -3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm

$$(x; y) = (-3; -3); (-3 - 2\sqrt{2}; -3 - 2\sqrt{2}); (-3 + 2\sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2})$$

Câu 103. Giải phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + 8xy = 2x^2 + 4x + y + 3 \\ 10(y-1)^2 + x + y - 2 = 14x(1-y) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Phương trình (1) tương đương

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + (2-x) + (3-2y) + (2-x)(3-2y) = 2x^2 - 6xy - 5y + 14 \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + (2-x) + (3-2y) + (2-x)(3-2y) \leq \frac{x+1}{2} + \frac{y+1}{2} + (2-x)^2 + (3-2y)^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6xy - 5y + 14 \leq \frac{2x^2 + 8y^2 - 7x - 23y + 30}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8y^2 - 12xy + 7x + 13y - 2 \leq 0 \quad (4)$$

Mặt khác từ phương trình (2) ta có $10y^2 + 14xy - 19y - 13x + 8 = 0 \quad (5)$

Cộng vế theo vế $(4) + (5) \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x - 6y + 6 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x+y-2)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 104. Giải phương trình
$$\begin{cases} \frac{2x^2 + 4y^2}{xy} = 4\sqrt{\left(\frac{2}{y} - \frac{3}{x}\right)(x+y)} - 1 \\ \sqrt{(x - \sqrt{xy+3x})^2 + 2(x+y+3)} = \sqrt{x} + \sqrt{y+3} \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (1) ta có $2x^2 + 4y^2 = 4\sqrt{(2x-3y)x(x+y)y-xy}$

$$\Leftrightarrow 4y^2 + 4xy + 2x^2 - 3xy = 2\sqrt{(2x^2 - 3xy)(4y^2 + 3xy)}$$

Đây là dạng $a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

$$\text{Hay } 4y^2 + 4xy = 2x^2 - 3xy \Leftrightarrow 2x^2 - 7xy - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ y = -2x \end{cases}$$

Từ phương trình (2) ta có $\sqrt{x} + \sqrt{y+3} = \sqrt{(x - \sqrt{xy+3x})^2 + 2(x+y+3)} \geq \sqrt{2(x+y+3)}$

$$\Leftrightarrow x + y + 3 + 2\sqrt{x(y+3)} \geq 2(x+y+3)$$

$$\Leftrightarrow x + y + 3 - 2\sqrt{x(y+3)} \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y+3})^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y+3} \Leftrightarrow x = y+3 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4), suy ra } \begin{cases} x = y+3 \\ x = 4y \\ x = y+3 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Thử lại vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (4; 1)$.

Câu 105. Giải phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{2-\sqrt{2x-y}} + 2(x+y-1) = 3\sqrt{y(2x-1)} \\ 2(x-\sqrt{y}) = \frac{1}{x} - 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}; y \geq 0$.

Phương trình (1) tương đương $\frac{2}{2-\sqrt{2x-y}} + 4(x+y-1) = 6\sqrt{y(2x-1)}$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có $6\sqrt{y(2x-1)} \leq 3(y+2x-1)$

$$\Rightarrow \frac{2}{2-\sqrt{2x-y}} + 4(x+y-1) \leq 3(y+2x-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{2-\sqrt{2x-y}} - 2 \right) - (2x-y-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y-1) \left(\frac{2}{(2-\sqrt{2x-y})(1+\sqrt{2x-y})} - 1 \right) \leq 0$$

- **Trường hợp 1.** $2x-y \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{(2-\sqrt{2x-y})(1+\sqrt{2x-y})} - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2 \geq 2 - (2x-y) + \sqrt{2x-y} \Leftrightarrow (2x-y) - \sqrt{2x-y} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-y} \leq 0 \\ \sqrt{2x-y} \geq 1 \end{cases}$$

Ta thấy $\sqrt{2x-y} = 0$ không là nghiệm của hệ $\Rightarrow \sqrt{2x-y} \geq 1 \Rightarrow 2x-y \geq 1$.

Suy ra $2x-y=1$

- **Trường hợp 2.** $2x-y \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{(2-\sqrt{2x-y})(1+\sqrt{2x-y})} - 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 2 - (2x-y) + \sqrt{2x-y} \Leftrightarrow (2x-y) - \sqrt{2x-y} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{2x-y} \leq 1 \Rightarrow 2x-y=1$$

Với 2 trường hợp ta đều có $2x-y=1$. Thay $2x-y=1$ vào phương trình (2)

$$2x - 2\sqrt{2x-1} = \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow 2x-1 - 2\sqrt{2x-1} + \frac{2x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=0 \\ \sqrt{2x-1}=2-\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y) = \left(\frac{1}{2}; 0\right); (1; 1)$

Câu 106. Giải phương trình
$$\begin{cases} y^3 - x - 9\sqrt{2x+5} = \sqrt[3]{xy^3 + 9x+4} + 10 \\ \sqrt{y-1} + \sqrt{2y+xy-x^2} = \sqrt{2y^2-2(y+2)x+10y} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{-5}{2}; y \geq 1; 2y+xy-x^2 \geq 0; 2y^2-2(y+2)x+10y \geq 0$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} \Rightarrow \sqrt{y-1} + \sqrt{2y+xy-x^2} \leq \sqrt{2(3y+xy-x^2-1)}$$

Ta cần chứng bất đẳng thức sau $\sqrt{2(3y+xy-x^2-1)} \leq \sqrt{2y^2-2(y+2)x+10y}$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{y-1} + \sqrt{2y+xy-x^2} \leq \sqrt{2y^2-2(y+2)x+10y}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y + 1$

Thay $x = y + 1$ vào phương trình (1) ta được

$$\begin{aligned} y^3 - y - 11 - \sqrt[3]{y^4 + y^3 + 9y + 13} - 9\sqrt{2y+7} &= 0 \\ \Leftrightarrow (y^3 - 11y - 14) - (\sqrt[3]{y^4 + y^3 + 9y + 13} - y - 3) + 9(y - \sqrt{2y+7}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (y^2 - 2y - 7)f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Trong đó ta có

$$f(y) = y + 2 - \frac{y^2}{\left(\sqrt[3]{y^4 + y^3 + 9y + 13}\right)^2 + (y+3)\sqrt[3]{y^4 + y^3 + 9y + 13} + (y+3)^2} + \frac{9}{y + \sqrt{2y+7}}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y + 2 - \frac{y^2}{\left(\sqrt[3]{y^4 + y^3 + 9y + 13}\right)^2 + (y+3)\sqrt[3]{y^4 + y^3 + 9y + 13} + (y+3)^2} \\ > y + 2 - \frac{y^2 + 2y + 2}{y + 3} = \frac{3y + 4}{y + 3} > 0 \\ \Rightarrow y + 2 - \frac{y^2}{\left(\sqrt[3]{y^4 + y^3 + 9y + 13}\right)^2 + (y+3)\sqrt[3]{y^4 + y^3 + 9y + 13} + (y+3)^2} + \frac{9}{y + \sqrt{2y+7}} > 0 \end{aligned}$$

Vậy phương trình tương đương $y^2 - 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = 1 + 2\sqrt{2}$ do $y \geq 1 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{2}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2})$

Câu 107. Giải phương trình
$$\begin{cases} (x+y)^3 + 4xy(x+y) = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} \\ \sqrt{x^4+y^4} = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $xy > 0$

Xét $x, y < 0 \Rightarrow \begin{cases} VT(1) < 0 \\ VP(1) > 0 \end{cases}$, suy ra hệ vô nghiệm.

Do đó $x, y > 0$, phương trình (1) tương đương

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x+y)^3 - 4xy(x+y) &= 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} - 8xy(x+y) \\ \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 &= 8xy \frac{(x-y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)} + x + y} \\ \Leftrightarrow (x-y)^2 \left(x + y - \frac{8xy}{\sqrt{2(x^2+y^2)} + x + y} \right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y - \frac{8xy}{\sqrt{2(x^2+y^2)} + x + y} = 0(*) \end{cases} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $x + y \leq \sqrt{2(x^2+y^2)}$

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\Rightarrow VT(*) \geq x + y - \frac{8xy}{2(x+y)} = \frac{2(x+y)^2 - 8xy}{2(x+y)} = \frac{2(x-y)^2}{2(x+y)} \geq 0$$

Dấu “=” xảy ra khi chỉ khi $x = y$

Thay $x = y$ vào phương trình (2), ta được $x = y = \sqrt[4]{2}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2})$

Câu 108. Giải phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{xy+2y-x+1} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5-y+x}} \\ 8\sqrt{x} + 2\sqrt{13-x-y} + 15x + 3y = 38 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} xy + 2y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 5 - y + x > 0 \\ 13 - x - y \geq 0 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có $\sqrt{xy+2y} = \sqrt{y(x+2)} \leq \frac{x+y+2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5-y+x}} + x - 1 \leq \frac{x+y+2}{2} \Leftrightarrow (y-x+4)\sqrt{5-(y-x)} \geq 6\sqrt{3}$$

Xét hàm số $f(y-x) = [(y-x)+4]\sqrt{5-(y-x)}$

$$\Rightarrow f'(y-x) = 0 \Leftrightarrow y-x = 2 \Rightarrow f(y-x) \geq f(2) = 6\sqrt{3} = VP$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $y-x = 2$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{13-x-y} \end{cases} (a \geq 0; b \geq 0)$. Phương trình (2) trở thành

$$12a^2 + 8a + 2b - 3b^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (6a + 3b + 1)(2a - b + 1) = 0 \Leftrightarrow 2a - b + 1 = 0$$

Hay $2\sqrt{x} - \sqrt{13-x-y} + 1 = 0$

Thay $y = x + 2$ vào phương trình (2), ta có

$$2\sqrt{x} + 1 = \sqrt{11-2x} \Leftrightarrow 5-3x = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 3)$

Câu 109. Giải phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2-x-y}\sqrt[3]{x-y} = y \\ \sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{y-1} + \sqrt[4]{3-y} + 6(y+1)\sqrt{3x} = x^3 + 30 \end{cases}$$

Giải

Xét $x = -y$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x \neq -y$, phương trình (1) tương đương

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{x^2-x-y}\sqrt[3]{x-y} - \sqrt{x^2-x-y} \right) + \left(\sqrt{x^2-x-y} - y \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-y} \left(\sqrt[3]{x-y} - 1 \right) + \left(\sqrt{x^2-x-y} - y \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-y} \frac{x-y-1}{\left(\sqrt[3]{x-y} \right)^2 + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{(x-y-1)(x+y)}{\sqrt{x^2-x-y} + y} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1) \left(\frac{\sqrt{x^2-x-y}}{\left(\sqrt[3]{x-y}\right)^2 + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y+y}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=y+1 \left(\text{do } \frac{\sqrt{x^2-x-y}}{\left(\sqrt[3]{x-y}\right)^2 + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y+y}} > 0 \right)$$

Thay $x = y + 1$ vào phương trình (2), ta có

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} = x^3 + 30 \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có
$$\begin{cases} \sqrt[4]{(x-2)(4-x)} \leq \sqrt{\frac{x-2+4-x}{2}} = 1 & (3) \\ 6x\sqrt{3x} = 2\sqrt{27x^3} \leq x^3 + 27 & (4) \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$, ta có

$$\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} \leq \sqrt{2(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})} \leq \sqrt{2\sqrt{2(x-2+4-x)}} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Lấy (3) + (4) + (5)} \Rightarrow VT(*) \leq VP(*)$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=4-x \\ x^3=27 \\ \sqrt{x-2}=\sqrt{4-x} \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 2)$

Câu 110. Giải phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{8y-5} + y\sqrt{8x-5} = \sqrt[4]{24(x^2+y^2+4)} \\ 11x^2 - 6xy + 3y^2 = 12x - 4y \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{5}{8}; y \geq \frac{5}{8}$

Ta có $x\sqrt{8y-5} + y\sqrt{8x-5} = \sqrt{x}\sqrt{x(8y-5)} + \sqrt{y}\sqrt{y(8x-5)} \quad (*)$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$, ta có

$$\sqrt[4]{24(x^2+y^2+4)} = \sqrt[4]{4 \cdot (1+1+4)(x^2+y^2+4)} \geq \sqrt[4]{4(x+y+2)^2} = \sqrt{2(x+y+4)}$$

Phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+y)(4(x+y)^2 - 5(x+y))} &\geq \sqrt{2(x+y+4)} \\ \Leftrightarrow (x+y)^2 [4(x+y) - 5] &\geq 2(x+y+4) \\ \Leftrightarrow (x+y-2) [4(x+y)^2 + 3(x+y) + 4] &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x+y &\geq 2 \end{aligned} \quad (3)$$

Đặt $t = x + y \geq 2 \Rightarrow y = t - x$. Phương trình (2) trở thành

$$\begin{aligned} 11x^2 - 6x(t-x) + 3(t-x)^2 &= 12x - 4(t-x) \\ \Leftrightarrow 20x^2 - 4(3t+4)x + 3t^2 + 4t &= 0 \end{aligned}$$

Để phương trình có nghiệm $\Delta' = 4(3t+4)^2 - 20(3t^2+4t) \geq 0$

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq t \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq x+y \leq 2(4)$$

Từ (3),(4) suy ra $x+y=2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x=y=1$

Câu 111. Giải phương trình

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x^2 - 7x = (3y^2 - 6y + 4)\sqrt{3y^2 - 6y + 7} \\ (x^3 - 3x^2)\left(\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + 3\right) + 8 = (x^2 + y^2 - 2y)^2 - 7(x^2 + y^2 - 2y) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Ta có } (3y^2 - 6y + 4)\sqrt{3y^2 - 6y + 7} = \left[3(y-1)^2 + 1\right]\sqrt{3(y-1)^2 + 4} \geq 2$$

$$\text{Khi đó từ phương trình (1) ta có } 4x^3 - 4x^2 - 7x \geq 2 \Leftrightarrow (x-2)(2x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\text{Ta lại có } (x^2 + y^2 - 2y)^2 - 7(x^2 + y^2 - 2y) - 8$$

$$\begin{aligned} &= (x^2 + y^2 - 2y + 1)(x^2 + y^2 - 2y - 8) \\ &= \left[x^2 + (y-1)^2\right] \left[\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + 3\right] \left[\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - 3\right] \end{aligned}$$

Khi đó từ phương trình (2) ta có

$$x^2(x-3) = \left[x^2 + (y-1)^2\right] \left[\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - 3\right] \geq x^2(|x|-3) = x^2(x-3) = VT$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (2;1)$

Câu 112. Giải phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{6x^2 - 2y^2 + xy - 21x + 18} + \sqrt[3]{x^2 + y^2 + 2xy - 2xy^2 - y^2 - 1} = -y^2 + 7y - 10 \\ y^2 - xy + 3y + 2x + 3 = 2\left(\sqrt{3x + 3y - 9} + \sqrt{12x - 6y - 18}\right) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 6x^2 - 2y^2 + xy - 21x + 18 \geq 0 \\ 3x + 3y - 9 \geq 0 \\ 12x - 6y - 18 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3x + 3y - 9 \geq 0 \\ 12x - 6y - 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 \geq 0 \\ 2x + y - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x + 2y - 6 \geq 0$$

$$\text{Khi đó } 6x^2 - 2y^2 + xy - 21x + 18 \geq 0 \Leftrightarrow (3x + 2y - 6)(2x - y - 3) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - y - 3 \geq 0$$

Từ điều kiện trên ta có

$$VT = \sqrt{(3x + 2y - 6)(2x - y - 3)} + \sqrt[3]{x^3 + (2x - y)(y - y^2) - 1} \geq 0 + \sqrt[3]{x^3 - 3y^2 + 3y - 1}$$

$$VP = -(y-3)^2 + y - 1 \leq y - 1$$

$$\text{Suy ra } \sqrt[3]{x^3 - 3y^2 + 3y - 1} \geq y - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3y^2 + 3y - 1 \geq y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \Leftrightarrow x^3 \geq y^3 \Leftrightarrow x \geq y$$

Phương trình (2) tương đương với

$$3x + y + 2 = -(y+1)(y-x+1) + 2\sqrt{2(x+y-3)} + 2\sqrt{6(2x+y-3)}$$

Ta có $VP \leq -(y+1) + x + y + 2x + y + 3 = 3x + y + 2 = VT$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 3$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 3)$

Câu 113. Giải phương trình
$$\begin{cases} 3\sqrt{y^3(2x-y)} + \sqrt{x^2(5y^2-4x^2)} = 4y^2 \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{y+1} + 2 = x + y^2 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \leq 2; y \geq -1; y^3(2x-y) \geq 0; x^2(5y^2-4x^2) \geq 0$

Áp dụng công thức $AM - GM$ ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{y^3(2x-y)} = \sqrt{y^2(2xy-y^2)} \leq \frac{y^2+2xy-y^2}{2} = xy \\ \sqrt{x^2(5y^2-4x^2)} \leq \frac{x^2+5y^2-4x^2}{2} = \frac{5y^2-3x^2}{2} \end{cases} \\ \Rightarrow 3\sqrt{y^3(2x-y)} + \sqrt{x^2(5y^2-4x^2)} \leq 3xy + \frac{5y^2-3x^2}{2} \end{aligned}$$

Từ phương trình (1) ta có $4y^2 \leq 3xy + \frac{5y^2-3x^2}{2} \Leftrightarrow 3(x-y)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y$

Thay $x = y$ vào phương trình (2), ta có $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+1} + 2 = x + x^2$

Từ phương trình trên ta có $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+1} > 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 - x - 1 + (x-1-\sqrt{2-x}) + (x-\sqrt{x+1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 1 + \frac{x^2-x-1}{x-1+\sqrt{2-x}} + \frac{x^2-x-1}{x+\sqrt{x+1}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2-x-1) \left(1 + \frac{1}{x-1+\sqrt{2-x}} + \frac{1}{x+\sqrt{x+1}} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} (L) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$

Câu 114. Giải phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y - 2\sqrt{x^2y+y} = -3 \\ x^2 + y = \frac{3x^2-3y+5}{2\sqrt{x^2-y+2}} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x^2 - y + 2 \geq 0; x^2y + y \geq 0$

Lấy (1) + (2) ta được $2x^2 - 2\sqrt{x^2y+y} = -3 + \frac{3x^2-3y+5}{2\sqrt{x^2-y+2}}$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 1 - 2\sqrt{y(x^2+1)} + y \right) + \left(x^2 - y + 2 - \frac{3x^2-3y+5}{2\sqrt{x^2-y+2}} \right) = 0$$

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y} \right)^2 + \left[\frac{1}{2\sqrt{x^2-y+2}} + \frac{x^2-y+2}{2} + \frac{x^2-y+2}{2} - \frac{3\sqrt{x^2-y+2}}{2} \right] = 0(*)$$

Ta có $\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y} \right)^2 \geq 0$, việc của chúng ta là chứng minh vế còn lại không âm.

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2-y+2}} + \frac{x^2-y+2}{2} + \frac{x^2-y+2}{2} \geq 3\sqrt[3]{2\sqrt{x^2-y+2} \cdot \frac{x^2-y+2}{2} \cdot \frac{x^2-y+2}{2}} = \frac{3\sqrt{x^2-y+2}}{2}$$

Từ đó ta suy ra $VT(*) \geq 0 = VP(*)$

$$\text{Do đó dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{y} \\ \frac{1}{2\sqrt{x^2-y+2}} = \frac{x^2-y+2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 = y \\ x^2-y+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = x^2+1$$

Thay $y = x^2+1$ vào phương trình (1), ta có

$$1 - 2(x^2+1) = -1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (0; 1)$

Câu 115. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \\ y(\sqrt{x^2+1}-1) = \sqrt{3x^2+3} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện xác định $x > 0, y \neq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \Leftrightarrow y\sqrt{x} + y^2 = 2x\sqrt{x} + 2xy \Leftrightarrow y^2 + y(\sqrt{x}-2x) - 2x\sqrt{x} = 0$$

Xem đây là phương trình bậc hai tiếp theo biến y , ta có

$$\Delta_x = (\sqrt{x}-2x)^2 + 8x\sqrt{x} = x + 4x\sqrt{x} + 4x^2 = (\sqrt{x}+2x)^2 > 0$$

Do đó, phương trình này có nghiệm là

$$y_1 = \frac{(2x-\sqrt{x}) - (\sqrt{x}+2x)}{2} = -\sqrt{x}, y_2 = \frac{(2x-\sqrt{x}) + (\sqrt{x}+2x)}{2} = 2x$$

Xét hai trường hợp

- **Trường hợp 1.** Nếu $y = -\sqrt{x}$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$-\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1}-1) = \sqrt{3x^2+3}$$

Dễ thấy $-\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1}-1) < 0 < \sqrt{3x^2+3}$ nên phương trình này vô nghiệm.

- **Trường hợp 2.** Nếu $y = 2x$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$2x(\sqrt{x^2+1}-1) = \sqrt{3x^2+3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}(2x-\sqrt{3}) = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \frac{2x}{2x-\sqrt{3}} (*)$$

Dễ thấy $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ không thỏa mãn đẳng thức lên chỉ xét $x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$ và phép biến đổi trên là phù hợp

Xét hai hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x > 0$ và $g(x) = \frac{2x}{2x - \sqrt{3}}, x > 0$

Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$ nên hàm đồng biến, $g'(x) = \frac{-2\sqrt{3}}{(2x - \sqrt{3})^2} < 0$ nên là hàm nghịch biến.

Suy ra phương trình (*) có không quá một nghiệm.

Nhằm thấy $x = \sqrt{3}$ thỏa mãn (*) nên đây cũng chính là nghiệm duy nhất của (*).

Vậy hệ đã có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$,

Câu 116. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - y} \cdot \sqrt[3]{x - y} = y \\ 2(x^2 + y^2) = 11 + 3\sqrt{2x - 1} \end{cases}$$

Giải

Ta thấy $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} > 0$.

Trong phương trình thứ nhất, $x - y$ và y cùng dấu.

Nếu $y \geq x$ thì $y > 0$ và $x - y \leq 0$, mâu thuẫn.

Do đó $x > y > 0$. Đặt $\sqrt[3]{x - y} = a > 0 \Rightarrow x - y = a^3$.

Ta có $(x^2 - x - y)a^2 = y^2$. Thay $y = x - a^3$ ta được

$$(x^2 - 2x + a^3)a^2 = (x - a^3)^2$$

Đẳng thức này tương đương với $a^2x^2 - 2a^2x + a^5 = x^2 - 2a^3x + a^6$

Rõ ràng $a = 1$ thì đẳng thức đúng nên khi phân tích thành nhân tử, ta được

$$(a - 1)(x^2 + 2a^2x + ax - a^5) = 0$$

Dễ thấy rằng $x^2 + 2a^2x + ax - a^5$ không thể xảy ra vì $a^5 \leq \max\{a^3, a^6\} = \max\{x - y, (x - y)^2\}$.

- Nếu $\max\{x - y, (x - y)^2\} = (x - y)^2$ thì dễ thấy $a^5 \leq (x - y)^2 < x^2 < x^2 + 2a^2x + ax$.
- Nếu $\max\{x - y, (x - y)^2\} = x - y$ thì dễ thấy $a^5 \leq x - y$, từ đó suy ra

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > x > 1 > x - y$$

Với $x^2 + y^2 \geq \frac{11}{2}$. Nếu $x \leq 1$ thì $x^2 + y^2 \leq 2$, mâu thuẫn. Suy ra $x > 1 \Rightarrow x^2 > x > 1 > x - y$

Trong cả hai trường hợp, ta đều có $x^2 + 2a^2x + ax - a^5 > 0$.

Vậy $a = 1 \Rightarrow y = x - 1$, thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$2(2x^2 - 2x + 1) = 11 + 3\sqrt{2x - 1} \Leftrightarrow (2x - 1)^2 - 10 = 3\sqrt{2x - 1}$$

Đặt $\sqrt{2x - 1} = b \geq 0$ thì ta được phương trình sau

$$b^4 - 10 = 3b \Leftrightarrow (b - 2)(b^3 + 2b^2 + 4b + 5) = 0$$

Dễ thấy phương trình này có nghiệm không âm duy nhất là $b = 2$, tương ứng với nghiệm của hệ đã cho

$$(x, y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Câu 117. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình hai của hệ bằng đánh giá quen thuộc ta rút ra
$$\begin{cases} 2 \leq x \leq \frac{10}{3} \\ 1 \leq y \leq \frac{7}{3} \end{cases}$$

Điều kiện trên đủ để $f(x)$ và $f(y)$ đơn điệu tăng vì $f'(x) = 4x - 3 > 0 \forall x \in \left[2; \frac{10}{3}\right]$

Ta có $f(2) \cdot f(1) \leq f(x) \cdot f(y) \leq f\left(\frac{10}{3}\right) \cdot f\left(\frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow 18 \leq f(x) \cdot f(y) \leq \frac{10366}{81}$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$ và $y = 1$ thay lại vào phương trình hai thấy không thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Câu 118. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} = \sqrt{\frac{20y}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \end{cases}$$

VMO 2010

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schawarz cho vế phải ta được

$$\sqrt{\frac{20y}{x+y}} + \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \leq \sqrt{2 \left(\frac{20y}{x+y} + \frac{20x}{x+y} \right)} = 2\sqrt{10}$$

Giờ ta sẽ chứng minh $VT \geq 2\sqrt{10}$ tức là phải chứng minh

$$\sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} \geq \sqrt{10}$$

Ta có

$$VT = \sqrt{\left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} + \sqrt{\left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} \geq \sqrt{\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} - (\sin x + \cos x)\right)^2 + (2\sqrt{2})^2}$$

Hiển nhiên ta có $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$ nên ta được

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} - (\sin x + \cos x) \geq \frac{4}{\sin x + \cos x} - \sqrt{2} \geq \frac{4}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Vậy $VT \geq \sqrt{2+8} = \sqrt{10}$. Tương tự với biến y và ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

Câu 119. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 + (4x-1)^2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ 40x^2 + x = y\sqrt{14x-1} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{1}{14}$.

Với điều kiện thế thì từ phương trình hai của hệ hiển nhiên có $y > 0$.

Ta có đánh giá sau đây $40x^2 + x = y\sqrt{14x-1} \leq \frac{y^2 + 14x - 1}{2} \Leftrightarrow y^2 \geq 80x^2 - 12x + 1$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta lại có

$$\sqrt[3]{4x(8x+1)} = y^2 + (4x-1)^2 \geq 80x^2 - 12x + 1 + (4x-1)^2 = 2(48x^2 - 10x + 1)$$

Đồng thời $\sqrt[3]{4x(8x+1)} = \sqrt[3]{1.1.(32x^2 + 4x)} \leq \frac{1+1+32x^2+4x}{3}$

Từ đó suy ra $2(48x^2 - 10x + 1) \leq \frac{32x^2 + 4x + 2}{3} \Leftrightarrow 2(8x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{8}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Câu 120. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (1+x^2)^2 \left(1 + \frac{1}{y^4}\right) = 8 \\ (1+y^2)^2 \left(1 + \frac{1}{x^4}\right) = 8 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y \neq 0$.

Nhận 2 phương trình với nhau ta được $(1+x^2)^2 (1+y^2)^2 \left(1 + \frac{1}{y^4}\right) \left(1 + \frac{1}{x^4}\right) = 64$

Đến đây ta sử dụng một hệ quả của bất đẳng thức Holder như sau.

Với dãy số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta có bất đẳng thức

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq \left(1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}\right)^n$$

Áp dụng vào bài toán trên với vế trái ta có

$$(1+x^2)(1+x^2)\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)(1+y^2)(1+y^2)\left(1 + \frac{1}{y^4}\right) \geq \left(1 + \sqrt[6]{x^2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^4} \cdot y^2 \cdot y^2 \cdot \frac{1}{y^4}}\right)^6 = 64$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \pm 1, y = \pm 1$

Câu 121. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2x\sqrt{y} = y^2\sqrt{y} \\ (4x^3 + y^3 + 3x^2\sqrt{x})(15\sqrt{x} + y) = 3\sqrt{x}(y\sqrt{y} + x\sqrt{y} + 4x\sqrt{x})^2 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y \geq 0$.

Đặt $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}$. Hệ viết lại thành
$$\begin{cases} a^4 + 2a^3b = b^5 \\ (4a^6 + b^6 + 3a^5)(15a + b^2) = 3a(b^4 + a^2b + 4a^3)^2 \end{cases}$$

Ta có $a = b = 0$ là một nghiệm của hệ.

Xét $a, b > 0$. Đặt $b = ka$. Phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$1 + 2k = ak^5 \Leftrightarrow a = \frac{1+2k}{k^5} \quad (*)$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$(4a^6 + a^6k^6 + 3a^5)(15a^2 + k^2a^2) = 3a(k^3a^3 + a^3k + 4a^3)^2$$

Thế a từ $(*)$ vào ta được

| Phương pháp bất đẳng thức

$$\left(4 + k^6 + \frac{3k^5}{1+2k}\right)\left(5 + \frac{1+2k}{3k^3}\right) = (k^3 + k + 4)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** cho vế trái ta được

$$VT \geq \left(\sqrt{5(4+k^6)} + \sqrt{\frac{3k^5}{1+2k} \cdot \frac{1+2k}{3k^3}}\right)^2 = \left(\sqrt{(2^2+1^2)(4+k^6)} + k\right)^2 \geq (4+k^3+k)^2 = VP$$

Đẳng thức xảy ra khi $k=1 \Leftrightarrow a=b=3 \Leftrightarrow x=y=9$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;0),(9;9)$.

Câu 122. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y = 4y^2 + 9x + 9 \\ 9\sqrt{\frac{41}{2}\left(x^2 + \frac{1}{2x+y}\right)} = 3 + 40x \\ x, y > 0 \end{cases}$$

Giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương
$$\sqrt{82\left(x^2 + \frac{1}{2x+y}\right)} = \frac{6+80x}{9}$$

Ta có
$$VT = \sqrt{(1^2+9^2)\left(x^2 + \frac{1}{2x+y}\right)} \geq \left|9x + \frac{1}{\sqrt{2x+y}}\right| \geq 9x + \frac{3}{\sqrt{9(2x+y)}} \geq 9x + \frac{6}{2x+y+9}$$
$$\Rightarrow \frac{6+80x}{9} \geq \frac{6}{2x+y+9} \Leftrightarrow 3x - 2x^2 - xy + 6y \geq 0 \quad (*)$$

Lấy (*) cộng với phương trình thứ hai ta được

$$-x^2 + 4xy - 4y^2 + 12y - 6x - 9 = 0 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-2y+3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x+3=2y$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=3$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(3;3)$.

Câu 123. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4(x+y)(x+1)(y+1) = 5xy + (x+y+1)^3 \\ \sqrt{(2-x)(x-1)} = \sqrt{(3-y)(y-1)} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x+y+z)^3 + 5xyz = 4(x+y)(x+z)(y+z) \\ &\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 5xyz = (x+y)(x+z)(y+z) \\ &\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 5xyz = xy(x+y) + yz(y+z) + xz(x+z) + 2xyz \\ &\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = xy(x+y) + yz(y+z) + xz(x+z) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Schur** ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + xz(x+z)$$

Đẳng thức xảy ra khi 3 biến bằng nhau hoặc 2 biến bằng nhau, biến còn lại bằng 0.

Kết hợp điều kiện suy ra $x=y=1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

Câu 124. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{2x-y} = \frac{3}{2} \\ (x+y+xy+1)(2x-y+1) = \frac{125}{64} \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình hai của hệ, ta có $(x+1)(y+1)(2x-y+1) = \frac{125}{64}$

Ta đặt $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b, \sqrt{2x-y} = c, a, b, c \geq 0$

Hệ khi đó sẽ là
$$\begin{cases} a+b+c = \frac{3}{2} \\ (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = \frac{125}{64} \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh. Nếu $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c = \frac{3}{2}$ thì $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq \frac{125}{64}$

Đặt về trái là $f(a, b, c)$. Trước hết ta sẽ chứng minh $f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$ $\left(t = \frac{b+c}{2} \right)$

Ta có $f(a, b, c) - f(a, t, t) = (a^2+1)(b-c)^2 [8 - (b+c)^2 - 4bc] \geq 0$ (*)

Vì $(b+c)^2 + 4bc \leq 2(b+c)^2 < 8$ nên (*) là đúng

Giờ ta phải chứng minh

$$f(a, t, t) \geq \frac{125}{64} \Leftrightarrow f\left(a, \frac{\frac{3}{2}-a}{2}, \frac{\frac{3}{2}-a}{2}\right) \geq \frac{125}{64} \left(a+2t = \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow (a^2+1) \left(\left(\frac{\frac{3}{2}-a}{2}\right)^2 + 1\right)^2 \geq \frac{125}{64}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+1)(4a^2-12a+25)^2 \geq 500 \Leftrightarrow (2a-1)^2 (4a^4-20a^3+69a^2-100a+125) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì

$$4a^4-20a^3+69a^2-100a+125 = (2a^2-5a)^2 + 34a^2-100a+125 > 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c = \frac{1}{2} \Rightarrow x=y = \frac{1}{4}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 125. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 12x^3 + 12x^2 + 367x - 54y^3 - 54y^2 - 18y = -144 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$$

Giải

Ta viết lại phương trình thứ hai như sau

$$\begin{cases} x^2 + x(y-7) + y^2 - 6y + 14 = 0 \\ y^2 + y(x-6) + x^2 - 7x + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_y \geq 0 \\ \Delta_x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq y \leq \frac{7}{3} \\ 2 \leq x \leq \frac{10}{3} \end{cases}$$

Xét phương trình thứ nhất. Nó có dạng $f(x) - g(y) = -144$

Với $f(x) = 12x^3 + 12x^2 + 367x$ đơn điệu tăng, và $g(y) = 54y^3 + 54y^2 + 18y$ đơn điệu tăng.

Từ đó ta có $f(x) \geq f(2) = 878, g(y) \leq g\left(\frac{7}{3}\right) = 1022 \Rightarrow f(x) - g(y) \geq 878 - 1022 = -144$

| Phương pháp bất đẳng thức

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{7}{3} \end{cases}$. Thay vào phương trình thứ hai thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(2; \frac{7}{3}\right)$

Câu 126. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x^9 - 18y - 27x - 29}{3}} - \sqrt{x - y - 1} = 2x + \sqrt{x^2 + x - 2} \\ x(x^3 + 2xy - 2x + 2) + (y - 2)^2 + 7 = 6\sqrt[3]{4(x - y + 1)} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x - y - 1 \geq 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq y + 1 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình thứ hai của phương trình tương đương

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2y - 2x^2 + 2x + y^2 - 4y + 11 &= 6\sqrt[3]{4(x - y + 1)} \\ \Leftrightarrow (x^2 + y)^2 - 2(x^2 + y) + 2(x - y + 1) + 8 &= 6\sqrt[3]{4(x - y + 1)} \\ \Leftrightarrow (x^2 + y - 1)^2 + 2(x - y + 1) + 8 &= 6\sqrt[3]{4(x - y + 1)} \end{aligned}$$

Ta có $6\sqrt[3]{4(x - y + 1)} = 3\sqrt[3]{2(x - y + 1)4 \cdot 4} \leq 2(x - y + 1) + 4 + 4$

Từ đó suy ra $(x^2 + y - 1)^2 + 2(x - y + 1) + 8 \leq 2(x - y + 1) + 4 + 4 \Leftrightarrow (x^2 + y - 1)^2 \leq 0$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x^2 + y - 1 = 0 \\ 2(x - y + 1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 0 \\ x = -2, y = -3 \end{cases}$

Câu 127. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2 - 1)^2 + 1 = 2y(2x + 1) \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

Giải

Biến đổi phương trình đầu tương đương $(x^2 - 1)^2 + 9 = 4xy + 2y + 8$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$x^2 + 4y^2 + 2y + 8 \geq 4xy + 2y + 8 = (x^2 - 1)^2 + 9 \geq 6(x^2 - 1) \Rightarrow x^2 + 4y^2 + 2y + 8 \geq 6(x^2 - 1) \quad (*)$$

Thay $x^2 = 3 + y^2$ vào (*) ta được

$$5(3 + y^2) - 4y^2 - 2y - 14 \leq 0 \Rightarrow (y - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow y = 1$$

Thay vào hệ ta có $x = 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$.

Câu 128. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2y + y = 2x \\ y^4 - x^2 = 2(1 - x) \end{cases}$$

Giải

Hệ đã cho tương đương
$$\begin{cases} y = \frac{2x}{1 + x^2} \\ y^4 = (x - 1)^2 + 1 \end{cases}$$

Hãy để ý kĩ đến ràng buộc của y .

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $y^4 \geq 1 \Leftrightarrow y^2 \geq 1$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ dễ chứng minh $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$.

Vậy ràng buộc của y trái ngược vậy nó thỏa mãn khi $y=1, x=1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 129. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2(\sqrt{1-2x} + \sqrt{2y+1}) \\ x^2 - 7xy + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2}; x \neq 0 \\ y \geq \frac{-1}{2}; y \neq 0 \end{cases}$$

Ta có phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} - 2\sqrt{1-2x} + y + \frac{1}{y} - 2\sqrt{2y+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x}(x^2 - 2x\sqrt{1-2x} + 1 - 2x) + \frac{1}{y}(y^2 - 2y\sqrt{2y+1} + 2y + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x}(x - \sqrt{1-2x})^2 + \frac{1}{y}(y - \sqrt{2y+1})^2 &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Xét phương trình hai của hệ nếu $xy < 0$ thì vế trái luôn dương (vô lý).

Vậy x, y cùng dấu. Tức dấu bằng ở $(*)$ xảy ra khi

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-2x} \\ y = \sqrt{2y+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{2} \\ y = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

So sánh với điều kiện thì ta có $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (-1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}), (-1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$.

Câu 130. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2\sqrt{xy} + x^3 + y^3 = 4x^2y \\ y + \sqrt{x} = \sqrt{-2x^2 + 14y - 9} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y > 0$.

Ta có đánh giá sau $x^2\sqrt{xy} + x^2\sqrt{xy} + x^3 + y^3 \geq 4\sqrt{x^2\sqrt{xy}x^2\sqrt{xy}x^3y^3} = 4x^2y$

Tức là $VT \geq VP$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai ta được

$$x + \sqrt{x} = \sqrt{-2x^2 + 14x - 9} \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x} + x = -2x^2 + 14x - 9 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x\sqrt{x} - 13x + 9 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x} > 0$, ta được

$$3t^4 + 2t^3 - 13t^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (3t^2 - t - 3)(t^2 + t - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1 + \sqrt{37}}{6} \Rightarrow x = \frac{19 + \sqrt{37}}{18} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

| Phương pháp bất đẳng thức

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{19 + \sqrt{37}}{18}; \frac{19 + \sqrt{37}}{18} \right), \left(\frac{7 - \sqrt{13}}{2}; \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \right)$.

Câu 131. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3x}{y^2} + \frac{4x^2 + 12y^2}{x^3 + y^3} = \frac{11 - \sqrt{xy^3 - 4}}{x} \\ \frac{3y}{x^2} + \frac{4y^2 + 12x^2}{x^3 + y^3} = \frac{11 - \sqrt{x^3y - 4}}{y} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x^3y \geq 4$.

Từ điều kiện suy ra x, y cùng dấu, nên nếu $(x; y)$ là nghiệm thì $(-x; -y)$ cũng là nghiệm.

Vậy nên ta chỉ cần xét đại diện trường hợp $y \leq x < 0$.

Đặt $t = \frac{y}{x} \geq 1$. Từ phương trình hai ta có

$$3t^2 + \frac{4t + 12}{t^3 + 1} \leq 11 \Rightarrow (t - 1)(3t^4 + 3t^3 - 8t^2 - t - 1) \leq 0$$

Từ đây suy ra $t < 2$. Vì nếu $t \geq 2$ thì

$$(t - 1)(3t^4 + 3t^3 - 8t^2 - t - 1) = (t - 1)[2t^2(t^2 - 4) + (t^4 - 1) + (t^3 - t)] > 0 \quad (\text{vô lý})$$

Như vậy, ta có $3\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}\right) + \frac{12(x^2 + y^2)}{x^3 + y^3} \leq \frac{11}{x} + \frac{11}{y}$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2(3x^4 - 5x^3y - 8x^2y^2 - 5xy^3 + 3y^4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^4(x - y)^2(3t^4 - 5t^3 - 8t^2 - 5t + 3) \leq 0$$

Cộng 2 phương trình về với về ta được

$$3\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}\right) + \frac{12(x^2 + y^2)}{x^3 + y^3} = \frac{11}{x} + \frac{11}{y} - \left(\frac{\sqrt{xy^3}}{x} + \frac{\sqrt{yx^3}}{y}\right) \quad (3)$$

Như vậy, ta có $VT(3) \leq \frac{11}{x} + \frac{11}{y}$, trong khi $VP(3) \geq \frac{11}{x} + \frac{11}{y}$ (do $x, y > 0$)

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x^3y = 4 = y^3x \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[4]{4}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (\sqrt[4]{4}; \sqrt[4]{4}), (-\sqrt[4]{4}; -\sqrt[4]{4})$.

Câu 132. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 27y^3 - 3x^2 + 9y = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{3y} = \sqrt[4]{72\left(\frac{x^2}{9} + y^2\right)} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y \geq 0$. Để ý phương trình thứ hai, ta có

$$(\sqrt{x} + \sqrt{3y})^4 \leq 4(x + 3y)^2 \leq 8(x^2 + 9y^2) = VP$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{x} = \sqrt{3y} \Leftrightarrow x = 3y$

Thay vào phương trình thứ nhất, ta được. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(1; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 133. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + y + 1} + x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} + y = 18 \\ \sqrt{x^2 + x + y + 1} - x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} - y = 2 \end{cases}$$

Giải

Đặt $\sqrt{x^2 + x + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + y + 1} = a \geq 0, x + y = b$

Ta có hệ mới
$$\begin{cases} a + b = 18 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9} = 10 \end{cases}$$

Đây là một hệ khá đơn giản và có nhiều cách.

Ta sẽ sử dụng bất đẳng thức Mincopsky $\sqrt{x^2 + 3^2} + \sqrt{y^2 + 3^2} \geq \sqrt{(x + y)^2 + (3 + 3)^2} = 10$

Đẳng thức xảy ra khi $(x; y) = (4; 4)$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 1), (1; -1), (-1; 1), (-1; -1)$.

Kĩ thuật tăng giảm sos – Hồ Xuân Hùng

Được sự cho phép của tác giả thế nên trong bài viết này sẽ đề cập tới một phương pháp khá mạnh để giải quyết các bài toán hệ phương trình giải bằng bất đẳng thức. Sau đây trước khi vào tìm hiểu cặn kẽ ta sẽ bắt đầu với 2 bài toán đầu tiên.

Câu 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + x^2 + y = x^3 \end{cases}$$

Giải

Ta có hệ phương trình
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 1 + y^3 = 0 \\ x^2y + x^2 + y = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x^2 + x + 1) + y^3 = 0 \\ (x - 1)x^2 = y(x^2 + 1) \end{cases}$$

Ta có
$$\begin{cases} PT^{(1)} \Rightarrow (x - 1)y \leq 0 \\ PT^{(2)} \Rightarrow (x - 1)y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x - 1)y = 0 \Rightarrow (x; y) = (1; 0)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 0)$

Câu 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^3 - 2y^3 - x^2(y + 1) + 2(x - 1) = 0 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x^3 - 1 + y^3 = 0 \\ x^3 - x^2 + 2x - 2 = 2y^3 + x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x^2 + x + 1) + y^3 = 0 \\ (x - 1)(x^2 + 2) = y(x^2 + 2y^2) \end{cases}$$

Ta có.
$$\begin{cases} PT^{(1)} \Rightarrow (x - 1)y \leq 0 \\ PT^{(2)} \Rightarrow (x - 1)y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x - 1)y = 0 \Rightarrow (x; y) = (1; 0)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 0)$

Kĩ thuật này đánh giá nhân tử.

$$(x - x_0)(y - y_0) = 0$$

| Phương pháp bất đẳng thức

- Ở mỗi chương trình, giả sử $x \rightarrow +\infty$ (hoặc $x \rightarrow \alpha, \beta$ với $x \in [\alpha, \beta]$) để đảm bảo đẳng thức khi $y \rightarrow +\infty$ thì $(x - x_0)(y - y_0) \geq 0$; nếu $y \rightarrow -\infty$ thì $(x - x_0)(y - y_0) \leq 0$
- So sánh lượng $(x - x_0)(y - y_0)$ từ 2PT, nếu chúng đối dấu, ta sẽ dùng phương pháp nêu trên.
- Đưa hệ phương trình về dạng
$$\begin{cases} (x - x_0)f_1(x, y) + (y - y_0)f_2(x, y) = 0 \\ (x - x_0)f_3(x, y) = (y - y_0)f_4(x, y) \end{cases}$$
- Chứng minh $f_i(x, y) \geq 0$

Kĩ thuật này dựa trên cơ sở. Khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất, giả sử x tăng một khoảng rất nhỏ, xem xét sự thay đổi tương ứng của y trên mỗi phương trình, nếu sự thay đổi so với nghiệm đúng là không giống nhau x thì ta sẽ suy ra 2 chiều ngược nhau khi so sánh biểu thức $(x - x_0)(y - y_0)$ với số 0. Thực chất kĩ thuật này có thể gọi là sử dụng điều kiện có nghiệm của bài toán.

Câu 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) = y^3 + xy + (x + y)^2 \\ x^3 + y^3 - 2x^2 - y^2 - x + y = 12 \end{cases}$$

Giải

Nhận xét.

- $PT^{(1)}$. Cho $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow +\infty$
- $PT^{(2)}$. Cho $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow -\infty$
- Nghiệm của hệ phương trình. $(x, y) = (3, 2)$

Bài giải

Ta sẽ biến đổi như sau

Ta có hệ phương trình
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + xy^2 = x^2 + y^2 + 3xy + y^3 \\ (x^3 - 2x^2 + 2x - 6) + (y^3 - y^2 + y - 6) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)(x^2 + xy + y^2) = (y - 2)(x^2 + y^2) \\ (x - 3)(x^2 + x + 2) + (y - 2)(y^2 + y + 3) = 0 \end{cases}$$

Ta có
$$\begin{cases} PT^{(1)} \Rightarrow (x - 3)(y - 2) \geq 0 \\ PT^{(2)} \Rightarrow (x - 3)(y - 2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (x - 3)(y - 2) = 0 \Rightarrow (x, y) = (3, 2)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (3, 2)$

Hãy thử kiểm tra khả năng áp dụng của nó.

Câu 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2\sqrt{x+3} - (y+4)\sqrt{y+3} = 2(x^2 - y - 4). \\ \sqrt{17x+6y+2} + x^3 + y = 7 \end{cases}$$

Giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2(\sqrt{x+3} - 2) = (y+4)(\sqrt{y+3} - 2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{(y+4)(y-1)}{\sqrt{y+3}+2} \Rightarrow (x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

Khi đó nếu $x, y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{17x+6y+2} + x^3 + y \geq 7$.

Nếu $x, y \leq 1 \Rightarrow \sqrt{17x+6y+2} + x^3 + y \leq 7$.

Vậy $x = y = 1$ là nghiệm của hệ phương trình.

Bài tập tương tự
$$\begin{cases} (x^2+1)\sqrt{x+3}+2(y+1)(y+2)-2x^2=(y^2+3y+3)\sqrt{y+1} \\ 26x^3+4y+17\sqrt{x+3}+6\sqrt{y+1}=84 \end{cases}$$

Đ/s. $(x;y)=(1;3)$

Nhận xét. Lời giải này cũng có thể hoàn toàn hiểu theo một nghĩa như sau.

Câu 5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y-1}=2 \\ x+\sqrt{12x+y^2}=19 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq 4; y \geq 1$

Từ phương trình thứ nhất, ta có $2\sqrt{x-4}-4=\sqrt{y-1}-2 \Leftrightarrow \frac{2(x-8)}{\sqrt{x-4}+1}=\frac{y-5}{\sqrt{y-1}+2}$

- Xét $x > 8 \Rightarrow y > 5$. Khi đó $VT = x + \sqrt{12x+y^2} < 8 + \sqrt{121} = 19 = VP$
- Xét $x < 8 \Rightarrow y < 5$. Khi đó $VT = x + \sqrt{12x+y^2} < 8 + \sqrt{121} = 19 = VP$

Do đó $x=8; y=5$. Thử lại thỏa mãn hệ.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8; y=5$

Nhận xét. Cách giải này sau này sẽ được khái quát lên một kĩ thuật – kĩ thuật tăng giảm được trình bày ở phần trước

Câu 6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3+y^3+x+y+3\sqrt{x+y}=11^{(1)} \\ xy\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2y}+\sqrt{y+2}=0^{(2)} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện.
$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta có

$$\begin{aligned} x^3+x+2+y^3+y-10+3\sqrt{x+y}-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+2)+(y-2)(y^2+2y+5)+3\frac{x+y-1}{\sqrt{x+y}+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+2)+(y-2)(y^2+2y+5)+3\frac{(x+1)+(y-2)}{\sqrt{x+y}+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x+2+\frac{3}{\sqrt{x+y}+1}\right)+(y-2)\left(y^2+2y+5+\frac{3}{\sqrt{x+y}+1}\right) &= 0 \\ \Rightarrow (x+1)(y-2) \leq 0. &^{(3)} \end{aligned}$$

Mặt khác, từ phương trình (2), ta có $(2) \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+3}+\sqrt{\frac{2}{y}}+\sqrt{\frac{1}{y}+\frac{2}{y^2}}=0^{(4)}$ (vì $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình) $\Rightarrow x < 0$.

Ta có $PT^{(4)} \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+3}+2+\sqrt{\frac{2}{y}}-1+\sqrt{\frac{1}{y}+\frac{2}{y^2}}-1=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x^2+3)-2}{x\sqrt{x^2+3}-2}+\frac{\frac{2}{y}-1}{\sqrt{\frac{2}{y}}+1}+\frac{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}-1}{\sqrt{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-1)(x^2+4)}{x\sqrt{x^2+3}-2} + \frac{\frac{2}{y}-1}{\sqrt{\frac{2}{y}+1}} + \frac{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}-1}{\sqrt{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \frac{(x-1)(x^2+4)}{x\sqrt{x^2+3}-2} + \left(\frac{2}{y}-1\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{y}+1}} + \frac{\frac{1}{y}+1}{\sqrt{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}+1}} \right) = 0 \Rightarrow (x+1) \left(\frac{2}{y}-1 \right) \geq 0$$

Vì $\frac{(x-1)(x^2+4)}{x\sqrt{x^2+3}-2} > 0$ do $x < 0$; $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{y}+1}} + \frac{\frac{1}{y}+1}{\sqrt{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}+1}} > 0$ do $y > 0$

Kết hợp ⁽³⁾ ta có $(x+10)(y-2)=0$. Khi đó $x=-1$ và $y=2$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(-1;2)$

Câu 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)^2 + 12\sqrt{x+y-6} = 4x+3y+37 \\ \sqrt{y^2-12} + 10\sqrt{y} = x\sqrt{x^2y-5y} + 10 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện.
$$\begin{cases} x+y \geq 6 \\ y \geq 2\sqrt{3} \\ x^2 \geq 5 \end{cases}$$

Ta có $x\sqrt{x^2y-5y} + 10 = \sqrt{y^2-12} + 10\sqrt{y} > 10 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{5}$

Ta có

$$PT^{(1)} \Leftrightarrow (x+y)[(x-3)+(y-4)] + 3(x-3) + 4(y-4) + 12(\sqrt{x+y-6}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left(x+y+3 + \frac{12}{\sqrt{x+y-6}+1} \right) + (y-4) \left(x+y+16 + \frac{12}{\sqrt{x+y-6}+1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(y-4) \leq 0^{(*)}$$

Ta lại có $PT^{(2)} \Leftrightarrow \sqrt{y-\frac{12}{y}} + 10 = x\sqrt{x^2-5} + \frac{10}{\sqrt{y}}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-\frac{12}{y}} - 1 \right) - 5 \left(\frac{2}{\sqrt{y}} - 1 \right) = (x\sqrt{x^2-5} - 6)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{4}{y} \right) \left[\frac{y+3}{\sqrt{y-\frac{12}{y}}+1} + \frac{5}{\frac{2}{\sqrt{y}}+1} \right] = (x^2-9) \cdot \frac{x^2+4}{x\sqrt{x^2-5}+6}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{4}{y} \right) (x^2-9) \geq 0 \Rightarrow (x-3)(y-4) \geq 0^{(**)}$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow (x-3)(y-4)=0 \Rightarrow x=3; y=4$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;4)$

Câu 8. Giải phương trình $(5x-4)\sqrt{2x-3} - (4x-5)\sqrt{3x-2} = 2$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{2x-3} = u \\ \sqrt{3x-2} = v \end{cases} \left(u, v \geq 0; 0 \leq \frac{u}{v} < \frac{2}{3} \right)$

Ta sẽ biểu diễn $\begin{cases} 5x-4 = \frac{2}{5}u^2 + \frac{7}{5}v^2 \\ 4x-5 = \frac{7}{5}u^2 + \frac{2}{5}v^2 \end{cases}$ và đồng thời $2v^2 - 3u^2 = 5$

Khi đó ta chỉ cần giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\frac{2}{5}u^2 + \frac{7}{5}v^2 \right)u + \left(\frac{7}{5}u^2 + \frac{2}{5}v^2 \right)v = 2 \\ 2v^2 - 3u^2 = 5 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta sử dụng kĩ thuật tăng giảm

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{u}{v}\right)^3 - 7\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 7\left(\frac{u}{v}\right) - 2 = \frac{10}{v^3} \\ 3\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \frac{5}{v^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^3 - 7a^2 + 7a - 2 = 10b^3^{(1)} \\ 3a^2 + 5b^2 = 2^{(2)} \end{cases}$

Từ phương trình $^{(1)} \Rightarrow 2a^3 - 10a^2 + 7a = 10b^3 + 5b^2$

$$\Rightarrow 2a^3 - 10a^2 + 7a - \frac{15}{32} = 10b^3 + 5b^2 - \frac{15}{32}$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{3}{4}\right)\left(2a^2 - \frac{17}{2}a + \frac{5}{8}\right) = \left(b - \frac{1}{4}\right)\left(10b^2 + \frac{15}{2}b + \frac{15}{8}\right)$$

Mà $2a^2 - \frac{17}{2}a + \frac{5}{8} > 0$ vì $0 \leq a < \frac{2}{3}$ và $10b^2 + \frac{15}{2}b + \frac{15}{8} > 0$

Suy ra $\left(a - \frac{3}{4}\right)\left(b - \frac{1}{4}\right) \geq 0^{(*)}$

$$PT^{(2)} : 3\left(a^2 - \frac{9}{16}\right) + 5\left(b^2 - \frac{1}{16}\right) = 0 \Rightarrow 3\left(a - \frac{3}{4}\right)\left(a + \frac{3}{4}\right) + 5\left(b - \frac{1}{4}\right)\left(b + \frac{1}{4}\right) = 0$$

Suy ra $\left(a - \frac{3}{4}\right)\left(b - \frac{1}{4}\right) \leq 0^{(**)}$

Từ $^{(*)}$ và $^{(**)}$ suy ra $\left(a - \frac{3}{4}\right)\left(b - \frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow x = 6$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 6$

Câu 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x-3)^3 = 2 + \sqrt{y^3 + 3y} \\ 3\sqrt{x-3} = \sqrt{y^2 + 8y} \end{cases}$

Giải

Điều kiện. $x \geq 3$, dễ dàng suy ra $y \geq 0$.

Đặt $x-3 = a (a \geq 0)$. hệ phương trình đã cho trở thành.

$$\begin{cases} \sqrt{y^3 + 3y} + 2 = (a+3)a^{3^{(1)}} \\ y^2 + 8y = 9a^{(2)} \end{cases}$$

Tuy nhiên ta nhận thấy ở cả 2 phương trình. x, y cùng tăng hoặc cùng giảm.

Vì vậy ta sẽ sử dụng phương trình hệ quả có được sự chênh lệch tăng giảm.

- Từ $PT^{(2)} \Rightarrow y^2 + 8y - 9 = 9a - 9 \Rightarrow (y-1)(y+9) = 9(a-1)$

| Phương pháp bất đẳng thức

Mặt khác $y \geq 0 \Rightarrow (y-1)(a-1) \geq 0^{(*)}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \text{Ta có } 9.PT^{(1)} - 2.PT^{(2)} &\Rightarrow 9\left(\sqrt{y^3+3y}+2\right)-2\left(y^2+8y\right)=9(a+3)a^3-18a \\ &\Leftrightarrow 2\left(y^2+8y\right)-9\sqrt{y^3+3y}+9a^4+27a^3-18a-18=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4\left(y^2+8y\right)^2-81\left(y^3+3y\right)}{2\left(y^2+8y\right)+9\sqrt{y^3+3y}}+9a^4+27a^3-18a-18=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{y(y-1)\left(4y^2-13y+243\right)}{2\left(y^2+8y\right)+9\sqrt{y^3+3y}}+9(a-1)\left(a^3+4a^2+4a+2\right)=0 \end{aligned}$$

Do $a, y \geq 0 \Rightarrow (y-1)(a-1) \leq 0^{(**)}$

Kết hợp $^{(*)}, ^{(**)} \Rightarrow (a-1)(y-1)=0 \Rightarrow a=y=1 \Rightarrow x=4$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 1)$

Bài tương tự. Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} x(x-3)^3 = 2 + \sqrt{y^3+3y^2} \\ 3\sqrt{x-3} = \sqrt{y^2+8y} \end{cases}$$

Câu 10. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{5x-6} - \frac{x}{2} = \sqrt{y^4-4y^2+1} + \frac{y}{4} \\ x^2-x-2 = \sqrt{y^3+8} \end{cases}$$

Giải

Ta có thể suy ra được điều kiện
$$\begin{cases} x \geq \frac{6}{5} \\ y \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } PT^{(2)}: x^2-x-2 &= \sqrt{y^3+8} \Leftrightarrow x^2-x-6 = \sqrt{y^3+8}-4 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x+2) = \frac{y^3-8}{\sqrt{y^3+8}+4} \\ &\Rightarrow (x-3)(y^3-8) \geq 0 \Rightarrow (x-3)(y-2) \geq 0^{(*)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } PT^{(2)} - 2.PT^{(1)} &\Rightarrow x^2-2-2\sqrt{5x-6} = \sqrt{y^3+8}-2\sqrt{y^4-4y^2-4}-\frac{y}{2} \\ &\Leftrightarrow \left(x^2-3-2\sqrt{5x-6}\right) = \left(\sqrt{y^3+8}-2\sqrt{y^4-4y^2-4}\right) - \frac{1}{2}(y-2) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^4-6x^2-20x+33}{x^2-3+2\sqrt{5x-6}} + \frac{4y^4-y^3-16y^2+8}{\sqrt{y^3+8}+2\sqrt{y^4-4y^2-4}} + \frac{1}{2}(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x^3+3x^2+3x-11)}{x^2-3+2\sqrt{5x-6}} + \frac{(y-2)(4y^3+7y^2-2y+4)}{\sqrt{y^3+8}+2\sqrt{y^4-4y^2-4}} + \frac{1}{2}(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3) \cdot \frac{x^3+3x^2+3x-11}{x^2-3+2\sqrt{5x-6}} + (y-2) \left[\frac{4y^3+7y^2-2y+4}{\sqrt{y^3+8}+2\sqrt{y^4-4y^2-4}} + \frac{1}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Do $y \geq -2 \Rightarrow 4y^3+7y^2-2y+4 > 0 \Rightarrow (x-3)(y-2) \leq 0^{(**)}$

Kết hợp $^{(*)}, ^{(**)} \Rightarrow (x-3)(y-2)=0 \Rightarrow (x; y) = (3; 2)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 2)$

Câu 11. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{x-y} + y\sqrt{x+y} = xy \\ x\sqrt{x-1} + y\sqrt{y-1} = x+y \end{cases}$$

Giải

Nhận xét. Nghiệm duy nhất $x = y = 2$, từ $PT^{(2)} \Rightarrow (x-2)(y-2) \leq 0$

Vậy ta chỉ cần chứng minh từ $PT^{(1)} \Rightarrow (x-2)(y-2) \geq 0$

Điều này đúng! Nhưng không dễ, hơn nữa cũng không cần khó khăn như vậy khi khai thác thêm từ $x \geq y \Rightarrow x \geq 2 \geq y$.

Điều kiện. $x \geq y \geq 1$

Ta có $PT^{(2)} : x\sqrt{x-1} + y\sqrt{y-1} = x+y$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{x-1}-1) + y(\sqrt{y-1}-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{y(y-2)}{\sqrt{y-1}+1} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(y-2) \leq 0 \text{ mà } x \geq y \Rightarrow x \geq 2 \geq y \geq 1$$

Ta có $PT^{(1)} \Leftrightarrow x\sqrt{x-y} + y\sqrt{x+y} = xy$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x+y} + [x\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y}(x-y)] = xy$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}(x - \sqrt{x+y}\sqrt{x-y}) = xy$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x+y} + \frac{1}{2}\sqrt{x-y}(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y})^2 = xy$$

$$\Rightarrow x\sqrt{x+y} \leq xy \Leftrightarrow \sqrt{x+y} \leq y \Leftrightarrow x \leq y^2 - y$$

$$\text{Mà } y^2 - y \leq 2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 2)$

Chương

7

Hệ phương trình nhiều ẩn

Trong chương này ta sẽ cùng tìm hiểu một lớp các bài toán hệ phương trình nhiều ẩn đã xuất hiện trong các đề thi học giỏi cấp tỉnh, cấp quốc gia đến khu vực. Các bài toán ở đây thường là các bài toán khá khó, một số cần kỹ năng biến đổi, sự tinh ý nhận ra mấu chốt của bài toán hơn là sử dụng các phương pháp có sẵn. Sau đây chúng ta sẽ bắt đầu với dạng hệ đầu tiên đó là hệ hoán vị vòng quanh.

I. Hệ hoán vị vòng quanh.

Bài toán 1. Xét hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \dots \\ f(x_{n-1}) = g(x_n) \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$$

Nếu hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng tăng trên tập A và $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình, trong đó $x_i \in A, \forall i = 1, 2, \dots, n$ thì $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Chứng minh.

Không mất tính tổng quát giả sử $x_1 = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Lúc đó ta có $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow g(x_2) \leq g(x_3) \Rightarrow x_2 \leq x_3 \dots \Rightarrow x_n \leq x_1$.

Vậy $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_1$

Từ đó suy ra $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Chúng ta sẽ tìm hiểu bài toán này thông qua ví dụ sau.

Câu 1. Lời giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}$$

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t - 3 + \ln(t^2 - t + 1)$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 + \frac{2t-1}{t^2-t+1} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta viết lại hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \min\{x, y, z\}$.

Lúc đó $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \Rightarrow y \leq z \Rightarrow f(y) \leq f(z) \Rightarrow z \leq x$. Hay $x \leq y \leq z \leq x \Rightarrow x = y = z$

Với $x = y = z$, xét phương trình $x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = 0$. Do hàm số

$$\varphi(x) = x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1)$$

đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = z = 1$.

Bài toán 2. Xét hệ phương trình có dạng (với n lẻ)

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \dots \\ f(x_{n-1}) = g(x_n) \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$$

Nếu hàm số $f(x)$ giảm trên tập A , $g(x)$ tăng trên A và $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình, trong đó $x_i \in A, \forall i = 1, 2, \dots, n$ thì $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ với n lẻ.

Chứng minh.

Không mất tính tổng quát giả sử $x_1 = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Lúc đó ta có $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow g(x_2) \geq g(x_3)$

$$\Rightarrow x_2 \geq x_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_n \leq x_1 \Rightarrow f(x_n) \geq f(x_1) \Rightarrow x_1 \geq x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Từ đó suy ra $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Chúng ta sẽ tìm hiểu bài toán này thông qua ví dụ sau.

Câu 2. Lời giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{2x^3+x^2} = y \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{2y^3+y^2} = z \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{2z^3+z^2} = x \end{cases}$$

Lời giải

Vì vế trái của các phương trình trong hệ đều dương nên hệ chỉ có nghiệm $x, y, z > 0$.

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2t^3+t^2}$, ta có $f'(t) = -(2\ln 4)(3t^2 + t) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2t^3+t^2} < 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \min\{x, y, z\}$.

Lúc đó $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow y \geq z \Rightarrow f(y) \leq f(z) \Rightarrow z \leq x \Rightarrow x = z \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow y = x$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Bài toán 3. Xét hệ phương trình có dạng (với n chẵn)

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \dots \\ f(x_{n-1}) = g(x_n) \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$$

Nếu hàm số $f(x)$ giảm trên tập A , $g(x)$ tăng trên A và $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình, trong đó $x_i \in A, \forall i = 1, 2, \dots, n$ thì $\begin{cases} x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1} \\ x_2 = x_4 = \dots = x_n \end{cases}$ với n chẵn.

Chứng minh.

Không mất tính tổng quát giả sử $x_1 = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Lúc đó ta có $x_1 \leq x_3 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_3) \Rightarrow g(x_2) \geq g(x_4) \Rightarrow x_2 \geq x_4$

$\Rightarrow f(x_2) \leq f(x_4) \Rightarrow g(x_3) \leq g(x_5) \Rightarrow x_3 \leq x_5 \dots \dots \dots$

$\Rightarrow f(x_{n-2}) \leq f(x_n) \Rightarrow g(x_{n-1}) \leq g(x_1) \Rightarrow x_{n-1} \leq x_1 \dots \dots \dots$

$\Rightarrow f(x_{n-1}) \geq f(x_1) \Rightarrow g(x_n) \geq g(x_2) \Rightarrow x_n \geq x_2$

Vậy $x_1 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_1 \Rightarrow x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1}; x_2 \geq x_4 \geq \dots \geq x_n \geq x_2 \Rightarrow x_2 = x_4 = \dots = x_n$

Chúng ta sẽ tìm hiểu bài toán này thông qua ví dụ sau.

Câu 3. Lời giải hệ phương trình	$\begin{cases} (x-1)^2 = 2y \\ (y-1)^2 = 2z \\ (z-1)^2 = 2t \\ (t-1)^2 = 2x \end{cases}$
--	--

Lời giải

Vì vế trái của các phương trình trong hệ không âm nên phương chỉ có nghiệm $x, y, z, t \geq 0$.

Xét hàm số $f(s) = (s-1)^2$, ta có $f'(s) = 2(s-1)$.

Do đó hàm số tăng trên khoảng $(1; +\infty)$ và giảm trên $[0; 1]$, do $f(s)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \min\{x, y, z, t\}$.

- Nếu $x \in (1; +\infty) \Rightarrow x, y, z, t \in (1; +\infty)$, do đó theo bài toán tổng quát 1, hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = t = 2 + \sqrt{3}$.

- Nếu $x \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2y \leq 1$, hay $y \in [0; 1]$, tương tự $\Rightarrow z, t \in [0; 1]$.

Vậy $x, y, z, t \in [0; 1]$.

Do đó ta có $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow y \geq z \Rightarrow f(y) \leq f(z) \Rightarrow z \leq x \Rightarrow x = z$.

Với $x = z \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow y = t$.

Lúc đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} (x-1)^2 = 2y \\ (y-1)^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2y \\ \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2 - \sqrt{3}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = y = z = t = 2 + \sqrt{3}$ và $x = y = z = t = 2 - \sqrt{3}$.

Nhận xét. Qua 3 bài toán đầu ta đã nắm được những tư duy cơ bản xử lý các bài toán hệ hoán vị vòng quanh rồi, những bài toán tiếp sau đây sẽ giúp ta rèn luyện và tăng khả năng tư duy, nhận biết và xử lý những bài toán dạng này hơn.

Bài tập tương tự. Lời giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = 2y \\ y^3 - 3y + 2 = 2z \\ z^3 - 3z + 2 = 2x \end{cases}$

Gợi ý. Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t + 2$ trên $\mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3(t^2 - 1); f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Xét sự biến thiên của hàm số này ta dễ dàng chỉ ra được hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Hệ đã cho được viết lại thành
$$\begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}, \text{ trong đó } g(t) = 2t \text{ luôn đồng biến.}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \min\{x; y; z\}$

Từ đây xét 3 trường hợp như bài toán 3 ta dễ dàng giải quyết được bài toán !

Câu 4. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 18 = y^3 + y \\ 2y^3 + 3y^2 - 18 = z^3 + z \\ 2z^3 + 3z^2 - 18 = x^3 + x \end{cases}$$

Olympic 30/4 – THPT chuyên Lê Quý Đôn

Lời giải

Đặt $f(t) = 2t^3 + 3t^2 - 18$ và $g(t) = t^3 + t$; $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Hệ phương trình trở thành
$$\begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}.$$

Giả sử $x = \max\{x, y, z\} \Rightarrow \begin{cases} x \geq y \\ x \geq z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq g(y) \\ g(x) \geq g(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq f(x) \\ f(z) \geq g(z) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x \geq 2x^3 + 3x^2 - 18 \\ 2z^3 + 3z^2 - 18 \geq z^3 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) \left[\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \right] \leq 0 \\ (z-2) \left[\left(z + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \right] \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ z \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \leq z \leq x \leq 2 \Rightarrow x = z = 2 \Rightarrow y = 2$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = 2$

Phân tích. Hệ trên không được giải theo hai bài toán tổng quát mà lại giải theo một hướng khác. Lí do ở đây là khi xét sự biến thiên của hàm số $f(t) = 2t^3 + 3t^2 - 18$ ta gặp khó khăn, cách giải này là một phương pháp khá hữu hiệu khi ta không thể xác định được tính biến thiên của các hàm trong hệ.

Câu 5. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 6} \cdot \log_3(6 - y) = x \\ \sqrt{y^2 - 2y + 6} \cdot \log_3(6 - z) = y \\ \sqrt{z^2 - 2z + 6} \cdot \log_3(6 - x) = z \end{cases}$$

Đề thi HSG Quốc Gia năm 2005-2006 – Bảng A

Lời giải

Điều kiện xác định $x, y, z < 6$. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \log_3(6 - y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}} & (1) \\ \log_3(6 - z) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 2y + 6}} & (2) \\ \log_3(6 - x) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - 2z + 6}} & (3) \end{cases}$$

Nhận thấy $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}}$ là hàm tăng, còn $g(x) = \log_3(6 - x)$ là hàm giảm với $x < 6$.

Nếu (x, y, z) là một nghiệm của hệ phương trình ta chứng minh $x = y = z$. Không mất tính tổng quát giả sử $x = \max\{x, y, z\}$ thì có hai trường hợp

- **Trường hợp 1.** $x \geq y \geq z$. Do $g(x)$ là hàm giảm, suy ra

$$\log_3(6 - y) \geq \log_3(6 - z) \geq \log_3(6 - x) \Rightarrow x \geq z \geq y.$$

Do $y \geq z$ nên $z = y$. Từ (1), (2) suy ra $x = y = z$.

- **Trường hợp 2.** $x \geq z \geq y$. Tương tự $\log_3(6 - y) \geq \log_3(6 - x) \geq \log_3(6 - z) \Rightarrow z \geq x \geq y$

Do $x \geq z$ nên $z = x$. Từ (1), (3) suy ra $x = y = z$

Phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x = y = z = 3$.

Câu 6. Lời giải hệ phương trình	$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x \end{cases}$
---	---

Đề thi HSG Quốc Gia năm 2005 – 2006 – Bảng B

Lời giải

Cách 1. Giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Xét hai trường hợp

- **Trường hợp 1.** $x \geq y \geq z$

$$\text{Từ hệ trên ta có } \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 \leq x \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 \geq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)[(x+2)^2 + 1] \leq 0 \\ (z-1)[(z+2)^2 + 1] \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 1 \leq z \end{cases}.$$

- **Trường hợp 2.** $x \geq z \geq y$

$$\text{Từ hệ trên ta có } \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 \leq x \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 \geq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)[(x+2)^2 + 1] \leq 0 \\ (y-1)[(y+2)^2 + 1] \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 1 \leq y \end{cases}$$

Cả hai trường hợp đều cho $x = z = y = 1$. Thử lại ta thấy $x = z = y = 1$ là nghiệm của hệ phương trình.

Tóm lại hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x = z = y = 1$.

Cách 2. Biến đổi hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} (x+1)^3 = y + x + 6(1) \\ (y+1)^3 = z + y + 6(2) \\ (z+1)^3 = x + z + 6(3) \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \max\{x, y, z\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x + z &\geq y + z \Rightarrow (z+1)^3 \geq (y+1)^3 \Rightarrow z \geq y \Rightarrow x + z \geq x + y \Rightarrow (z+1)^3 \geq (x+1)^3 \\ \Rightarrow z &\geq x \Rightarrow z = x \Rightarrow x + y = y + z \Rightarrow (x+1)^3 = (y+1)^3 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Khi đó hệ phương trình tương đương $\begin{cases} x = y = z \\ x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Nhận xét. Với cách 1 thì ta đã được tìm hiểu ở ví dụ trên, giờ ta sẽ xét cách 2. Câu hỏi đặt ra là khi nào ta xét $x + y, y + z, z + x$. Hãy để ý rằng nếu ta xét $f(t) = t^3 + 3t^2 + 2t - 5$ thì phương trình $f'(t) = 0$ có nghiệm, do đó ta sẽ nảy ra ý tưởng để làm xuất hiện một hàm số đơn điệu trên miền xác định. Để làm điều này ta sẽ biến đổi hệ như sau

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x + kx = y + kx + 5 \\ y^3 + 3y^2 + 2y + ky = z + ky + 5 \\ z^3 + 3z^2 + 2z + kz = x + kz + 5 \end{cases}$$

Xét $f(t) = t^3 + 3t^2 + 2t + kt \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 6t + 2 + k$. Ta cần tìm k để $f'(t) > 0$, điều này quá đơn giản phải không nào, và chú ý nên chọn số k nguyên, vậy $k = 1$ có lẽ hằng số tốt nhất mà ta cần phải chọn. Từ đó ta có lời giải như cách 2. Ta cùng làm một bài toán tương tự sau.

Câu 7. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 3y^3 + 2y^2 \\ y = 3z^3 + 2z^2 \\ z = 3x^3 + 2x^2 \end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} x + y = 3y^3 + 2y^2 + y \\ y + z = 3z^3 + 2z^2 + z \\ z + x = 3x^3 + 2x^2 + x \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \max\{x, y, z\}$.

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 2t^2 + t \Rightarrow f'(t) = 9t^2 + 4t + 1 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + y \geq y + z &\Rightarrow f(y) \geq f(z) \Rightarrow y \geq z \Rightarrow x + y \geq x + z \Rightarrow f(y) \geq f(x) \Rightarrow y \geq x \\ &\Rightarrow y = x \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow x + y = x + z \Rightarrow y = z. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} x = y = z \\ 3x^3 + 2x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x \in \left\{0; -1; \frac{1}{3}\right\} \end{cases}.$$

Các nghiệm của hệ phương trình là $(x; y; z) = (0; 0; 0), (-1; -1; -1), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 8. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2 + x + 1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2 + y + 1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2 + z + 1)x^2y^2 \end{cases}; x, y, z \in \mathbb{R}$$

Lời giải

- **Trường hợp 1.** $xyz = 0$.

Nếu $x = 0$ thì hệ có nghiệm $(0; 0; z), (0; y; 0)$.

Tương tự cho trường hợp $y = 0$ hoặc $z = 0$.

- **Trường hợp 2.** Chia cả hai vế của các phương trình trong hệ cho $x^2y^2z^2 > 0$ ta được

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y}\right)^2 = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 = 4 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} \\ \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)^2 = 5 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ hệ phương trình trở thành.
$$\begin{cases} (b+c)^2 = 3+a+a^2 \\ (c+a)^2 = 4+b+b^2 \\ (a+b)^2 = 5+c+c^2 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế các phương trình trên rồi rút gọn ta được.

$$(a+b+c)^2 - (a+b+c) - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 4 \\ a+b+c = -3 \end{cases}$$

Đến đây có thể dễ dàng giải được bài toán này!

Câu 9. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - 3z^2x - 3z + z^3 = 0 \\ y - 3x^2y - 3x + x^3 = 0 \\ z - 3y^2z - 3y + y^3 = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng
$$\begin{cases} x(1-3z^2) = 3z - z^3 \\ y(1-3x^2) = 3x - x^3 \\ z(1-3y^2) = 3y - y^3 \end{cases} \quad (I)$$

Từ đó, dễ thấy nếu (x, y, z) là nghiệm của hệ đã cho thì phải có $x, y, z \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Do đó $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} & (1) \\ y = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} & (2) \\ z = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} & (3) \end{cases} \quad (II)$

Đặt $x = \tan \alpha$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (4) và sao cho $\tan \alpha, \tan 3\alpha, \tan 9\alpha \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (5).

Khi đó từ (1), (2), (3) sẽ có $y = \tan 3\alpha, z = \tan 9\alpha$ và $x = \tan 27\alpha$.

Từ đây dễ dàng suy ra (x, y, z) là nghiệm của (II) khi và chỉ khi $y = \tan 3\alpha, z = \tan 9\alpha$ và $x = \tan 27\alpha$, với α được xác định bởi (4), (5) và $\tan \alpha = \tan 27\alpha$ (6).

Lại có $(6) \Leftrightarrow 26\alpha = k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Vì thế α thỏa mãn đồng thời (4), (6) khi và chỉ khi $\alpha = \frac{k\pi}{26}$ với k nguyên thỏa mãn $-12 \leq k \leq 12$. Dễ dàng kiểm tra được rằng, tất cả các giá trị α được xác định như vừa nêu đều thỏa mãn (5). Vậy tóm lại hệ phương trình đã cho có tất cả 25 nghiệm

$$\left(x = \tan \frac{k\pi}{26}, y = \tan \frac{3k\pi}{26}, z = \tan \frac{9k\pi}{26}\right), k = 0, \pm 1, \dots, \pm 12$$

Chú ý. Với mọi số thực x có một số α với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $x = \tan \alpha$.

Ngoài ra để làm được những bài toán như thế này chúng ta cần phải có một kiến thức về lượng giác tốt, cũng như sự tinh ý khi đứng trước một bài toán nào đó! Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu các bài toán dưới đây!

Câu 10. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + x^2 y = y \\ 2y + y^2 z = z \\ 2z + z^2 x = x \end{cases}$$

West Germany MO 1980

Lời giải

Từ các phương trình của hệ, suy ra $x, y, z \neq \pm 1$. Do đó ta có
$$\begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2} & (1) \\ z = \frac{2y}{1-y^2} & (2) \\ x = \frac{2z}{1-z^2} & (3) \end{cases}$$

Đặt $x = \tan \alpha$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (4)

và sao cho $\tan \alpha, \tan 2\alpha, \tan 4\alpha \neq \pm 1$ (5)

Tương tự bài trên. Hệ phương trình có 7 nghiệm

$$\left(x = \tan \frac{k\pi}{7}, y = \tan \frac{2k\pi}{7}, z = \tan \frac{4k\pi}{7}\right), k = 0, \pm 1, \dots, \pm 3$$

Câu 11. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 2y^2 - 1 \\ y = 2z^2 - 1 \\ z = 2x^2 - 1 \end{cases}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \max\{x, y, z\}$

Ta có $2x^2 - 1 = z \leq x \Rightarrow \frac{-1}{2} \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t \left(t \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]\right)$. Từ hệ phương trình ta có
$$\begin{cases} z = 2\cos^2 t - 1 = \cos 2t \\ y = 2\cos^2 2t - 1 = \cos 4t \\ x = 2\cos^2 4t - 1 = \cos 8t \end{cases}$$

Từ đây suy ra $\cos t = \cos 8t \Leftrightarrow t = \frac{k2\pi}{7} \vee t = \frac{k2\pi}{9} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t \in \left\{0; \frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}\right\}$ (do $t \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$).

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là

$$(x; y; z) = (1; 1; 1); \left(\cos \frac{2\pi}{9}; \cos \frac{4\pi}{9}; \cos \frac{8\pi}{9}\right); \left(\frac{-1}{2}; \frac{-1}{2}; \frac{-1}{2}\right); \left(\cos \frac{2\pi}{7}; \cos \frac{4\pi}{7}; \cos \frac{8\pi}{7}\right)$$

Và các hoán vị của x, y, z .

Câu 12. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 = y + 2 \\ y^2 = z + 2 \\ z^2 = x + 2 \end{cases}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \max\{x, y, z\} \Rightarrow x^2 = y + 2 \leq x + 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$

Đặt $x = 2\cos t \left(t \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]\right)$. Từ hệ phương trình ta có
$$\begin{cases} y = x^2 - 2 = 2(2\cos^2 t - 1) = 2\cos 2t \\ z = y^2 - 2 = 2(2\cos^2 2t - 1) = 2\cos 4t \\ x = z^2 - 2 = 2(2\cos^2 4t - 1) = 2\cos 8t \end{cases}$$

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Từ đây suy ra $\cos t = \cos 8t \Leftrightarrow t = \frac{k2\pi}{7} \vee t = \frac{k2\pi}{9} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t \in \left\{0; \frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}\right\}$ do $t \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Vậy các nghiệm của hệ phương trình là

$$(x; y; z) = (-1; -1; -1); (2; 2; 2); \left(2\cos\frac{2\pi}{9}; 2\cos\frac{4\pi}{9}; 2\cos\frac{8\pi}{9}\right); \left(2\cos\frac{2\pi}{7}; 2\cos\frac{4\pi}{7}; 2\cos\frac{8\pi}{7}\right)$$

Nhận xét. Để ý nếu như các bài toán trước ta đặt $x = \sin t$ hoặc $x = \tan t; x = \cos t$ thì sẽ không liên quan gì tới biểu thức $x^2 - 2$, nhưng hãy chú ý rằng

$$(2\cos t)^2 - 2 = 2(2\cos t - 1) = 2\cos 2t$$

Vì thế nên ta sẽ đặt $x = \cos 2t$. Đây là cách lượng giác hóa, sau đây ta sẽ tìm hiểu tổng quát với tham số $a \in (0; 1)$.

Câu 13. Lời giải hệ phương trình với $a \in (0; 1)$	$\begin{cases} x^2 = y + a & (1) \\ y^2 = z + a & (2) \\ z^2 = x + a & (3) \end{cases}$ Đề thi HSG tỉnh Ninh Bình 2009 - 2010
--	--

Lời giải

Nếu $x = y$ thì từ (1), (2) $\Rightarrow y = z$, từ (2), (3) $\Rightarrow z = x \Rightarrow x = y = z$.

$$\text{Hệ tương đương } \begin{cases} x = y = z \\ x^2 = x + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x^2 - x - a = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Lời giải (*) có $\Delta = 1 + 4a > 0, \forall a \in (0; 1) \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2} \Rightarrow x = y = z = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

Nếu $x \neq y$ thì từ (1), (3) $\Rightarrow z^2 \neq x^2 \Rightarrow z \neq x$.

Và từ (2) và (3) $\Rightarrow y^2 \neq z^2 \Rightarrow y \neq z$.

Giả sử $x = \max\{x, y, z\} \Rightarrow x > y; x > z$

$$\Rightarrow x + a = \max\{x + a, y + a, z + a\} \Rightarrow z^2 = \max\{x^2, y^2, z^2\} \Rightarrow |z| = \max\{|x|; |y|; |z|\}$$

Nếu $z \geq 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \max\{|x|; |y|; |z|\} \Rightarrow z = x$ (mâu thuẫn).

$\Rightarrow z < 0$ nếu $x \geq 0$ nên từ (3) $\Rightarrow z^2 - a \geq 0 \Leftrightarrow (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) \geq 0$

$$\Leftrightarrow z + \sqrt{a} \leq 0 \Rightarrow z + a \leq 0 \left(\text{vì } a \in (0; 1) \Rightarrow a \leq \sqrt{a} \right) \Rightarrow y^2 \leq 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow y < 0.$$

Do đó, nếu hệ có nghiệm mà $x \neq y$ thì x, y, z cùng dấu.

- **Trường hợp 1.** $x > 0; y > 0; z > 0$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x > y \\ x > z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 > y^2 \\ x^2 > z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + a > z + a \\ y + a > x + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > z \\ y > x \end{cases}, \text{ mâu thuẫn.}$$

- **Trường hợp 2.** $x < 0; y < 0; z < 0$. Tương tự trường hợp trên.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x = y = z = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$ với $a \in (0; 1)$.

Câu 14. Lời giải hệ phương trình	$\begin{cases} x^2 - yz = a \\ y^2 - xz = b \\ z^2 - yx = c \end{cases}, \text{ với } a, b, c > 0$
--	--

Lời giải

Ta có
$$\begin{cases} a^2 - bc = (x^2 - yz)^2 - (y^2 - xz)(z^2 - yx) = x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \\ b^2 - ac = y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \\ c^2 - ab = z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \end{cases}$$

Đặt $k = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ta có $(a^2 - bc)^2 - (b^2 - ac)(c^2 - ab) = a(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

Suy ra $k^2(x^2 - yz) = a(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \Rightarrow k = \pm \sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$

Vậy các nghiệm của hệ là $x = \frac{a^2 - bc}{k}, y = \frac{b^2 - ac}{k}, z = \frac{c^2 - ab}{k}, k = \pm \sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$

Câu 15. Lời giải và biện luận hệ phương trình theo m
$$\begin{cases} mx = z + \frac{1}{z} \\ my = x + \frac{1}{x} \\ mz = y + \frac{1}{y} \end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương
$$\begin{cases} mxz = z^2 + 1 \\ myx = x^2 + 1 \\ mzy = y^2 + 1 \\ xyz \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow mxy > 0; myz > 0; mzx > 0 \Rightarrow m^3 x^2 y^2 z^2 > 0 \Rightarrow m > 0.$$

Ta thấy x, y, z cùng dấu và nếu $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $(-x; -y; -z)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $x, y, z > 0$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \max\{x, y, z\}$.

- Nếu $x \geq y \geq z > 0$
 $\Rightarrow y^2 + 1 \geq z^2 + 1 \Rightarrow myz \geq y \geq x \Rightarrow y = x$
 $\Rightarrow y^2 + 1 = x^2 + 1 \Rightarrow myx = myz \Rightarrow x = z \Rightarrow x = y = z$
- Nếu $x \geq z \geq y > 0$
 $\Rightarrow x^2 + 1 \geq z^2 + 1 \Rightarrow myx \geq y \geq z \Rightarrow y = z$
 $\Rightarrow y^2 + 1 = z^2 + 1 \Rightarrow myz = mxz \Rightarrow x = y \Rightarrow x = y = z$

Vậy ta được $x = y = z$.

Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành
$$\begin{cases} mx^2 = x^2 + 1 \\ x = y = z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x^2 = 1 \\ x = y = z > 0 \end{cases}$$

- Với $m \leq 1$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Với $m > 1$ thì ta được $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{m-1}}$.

Câu 16. Lời giải và biện luận hệ phương trình
$$\begin{cases} ax^2 + 1 = xy \\ ay^2 + 1 = yz \\ az^2 + 1 = xz \end{cases}$$
 theo $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Ta thấy x, y, z cùng dấu và nếu $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $(-x; -y; -z)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $x, y, z > 0$

$$\text{Hệ phương trình đã cho tương đương } \begin{cases} ax + \frac{1}{x} = y \\ ay + \frac{1}{y} = z \\ az + \frac{1}{z} = x \end{cases}.$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $ax + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{a} \Rightarrow y \geq 2\sqrt{a}$, tương tự $x \geq 2\sqrt{a}; z \geq 2\sqrt{a}$.

Xét hàm số $f(t) = at + \frac{1}{t}, t \in [2\sqrt{a}; +\infty)$, với $t_1 \geq 2\sqrt{a}, t_2 \geq 2\sqrt{a}$ và $t_1 \neq t_2$.

Ta có $at_1t_2 > 4a^2 \geq 1 \Rightarrow at_1t_2 - 1 > 0$, $\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = a - \frac{1}{t_1t_2} = \frac{at_1t_2 - 1}{t_1t_2} > 0$

Vậy $f(t)$ đồng biến trên $[2\sqrt{a}; +\infty)$. Mặt khác hàm $g(t) = t$ cũng đồng biến trên $[2\sqrt{a}; +\infty)$.

$$\text{Hệ đã cho trở thành } \begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \max\{x, y, z\}$.

$$x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow g(y) \geq g(z) \Rightarrow y \geq z$$

$$y \geq z \Rightarrow f(y) \geq f(z) \Rightarrow g(z) \geq g(x) \Rightarrow z \geq x$$

Vậy $x \geq y \geq z \geq x \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{1-a}}$ (vì $x > 0, y > 0, z > 0$).

$$\text{Câu 17. Lời giải hệ phương trình } \begin{cases} x^4y - 6x^2y + 4x^3 - 4x + y = 0 \\ y^4z - 6y^2z + 4y^3 - 4y + z = 0 \\ z^4x - 6z^2x + 4z^3 - 4z + x = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Một hệ phương trình nhìn hình thức rất khủng bố phải không nào, trước tiên ta sẽ biến đổi hệ phương

$$\text{trình về dạng } \begin{cases} y = \frac{4x - 4x^3}{x^4 - 6x^2 + 1} \\ z = \frac{4y - 4y^3}{y^4 - 6y^2 + 1} \\ x = \frac{4z - 4z^3}{z^4 - 6z^2 + 1} \end{cases}$$

Ta xét hàm số $f(t) = \frac{4t - 4t^3}{t^4 - 6t^2 + 1}$, có $f'(t) = \frac{4(t^2 + 1)^3}{(t^4 - 6t^2 + 1)^2} > 0 \forall t \neq \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$

Đến đây ta sẽ suy ra được $x = y = z$ và thế vào phương trình đầu ta giải ra được nghiệm của hệ này, tuy nhiên ta đã phạm một sai lầm đó là $f(t)$ chỉ đồng biến trên từng khoảng nó xác định chứ không

đồng biến trên toàn miền như kiểu $f(2) = \frac{24}{7} > f(3) = \frac{-24}{7}$, do đó không thể sử dụng được phương pháp hàm đơn điệu. Ta sẽ nghĩ tới phương pháp lượng giác hóa.

Ta hãy chú ý tới công thức $\tan 4t = \frac{4 \tan t - 4 \tan^3 t}{\tan^4 t - 6 \tan^2 t + 1}$, do đó ta sẽ đặt $x = \tan t$.

Điều kiện $x, y, z \neq \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$

Đặt $x = \tan a \left(a \in [0; \pi) \wedge a \neq \frac{\pi}{2} \right)$, từ hệ phương trình ta tính được

$$y = f(x) = \tan 4a; z = f(y) = \tan 16a; x = f(z) = \tan 64a$$

Từ đây suy ra $\tan a = \tan 64a \Leftrightarrow a = \frac{k\pi}{63} \left(k = \overline{0, 62} \right)$.

Vậy hệ có nghiệm $(x; y; z) = (\tan a; \tan 4a; \tan 16a) \left(a = \frac{k\pi}{63}, k = \overline{0, 62} \right)$.

Nhận xét. Ta thấy rằng cách sử dụng hàm số hay gọi là nguyên lý cực hạn trong các hệ hoán vị sẽ không thể tìm hết nghiệm và triệt để với những bài toán đặt ẩn lượng giác. Sau đây lại là một bài toán như thế tiếp.

Câu 18. Lời giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x = y \\ y^3 - 3y = z \\ z^3 - 3z = x \end{cases}$
--

Lời giải

Nhìn qua ta có thể thấy chắc chắn rằng hệ này không thể sử dụng hàm số được rồi, do đó ta sẽ nghĩ tới hướng sử dụng lượng giác. Từ hệ phương trình ta suy ra

$$\left[(x^3 - 3x)^3 - 3(x^3 - 3x) \right]^3 - 3 \left[(x^3 - 3x)^3 - 3(x^3 - 3x) \right] = x$$

Trên là phương trình bậc 27 nên sẽ có tối đa 27 nghiệm. Để ý rằng nếu ta đặt $x = 2 \cos t$ thì ta sẽ có đẳng thức liên quan tới công thức lượng giác $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$, do đó ta sẽ xét trường hợp đầu tiên là $x \in [-2; 2]$. Xét $x \in [-2; 2]$ ta đặt $x = 2 \cos t$ với $t \in [0; \pi]$ thì tự hệ phương trình ta có

$$\begin{cases} y = 2 \cos 3t \\ z = 2 \cos 9t \\ x = 2 \cos 27t \end{cases} \Rightarrow \cos 27t = \cos t \Leftrightarrow \begin{cases} t = k \frac{\pi}{13} \\ t = k \frac{\pi}{14} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

- Với $t = k \frac{\pi}{13} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = \overline{0, 13}$.
- Với $t = k \frac{\pi}{14} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = \overline{0, 14}$.

Nghiệm của hệ ứng với $t = 0, t = \pi$ ở cả 2 trường hợp trùng nhau nên nghiệm của hệ là

$$\left\{ \left(2 \cos \frac{k\pi}{13}; 2 \cos \frac{k3\pi}{13}; 2 \cos \frac{k9\pi}{13} \right) (k = \overline{0, 13}) \right. \\ \left. \left(2 \cos \frac{k\pi}{14}; 2 \cos \frac{k3\pi}{14}; 2 \cos \frac{k9\pi}{14} \right) (k = \overline{1, 13}) \right\}$$

Vậy với $x \in [-2; 2]$ thì hệ đã cho có 27 nghiệm, do đó trên các khoảng còn lại hệ phương trình sẽ vô nghiệm, thế nên ta không cần phải xét nữa!

Câu 19. Lời giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_2) \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_3) \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_4) \\ x_4 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_1) \end{cases} ; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Lời giải

Từ hệ phương trình ta có $|x_i| \leq \frac{\sqrt{3}}{9} < \frac{1}{2} (i = \overline{1, 4})$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \pi x_i < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos(\pi x_i) \leq 1 \Rightarrow 0 < x_i < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \pi x_i < \frac{\pi}{2}.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_1 = \max\{x_1; x_2; x_3; x_4\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1 \geq x_3 &\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_2) \geq \frac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_4) \Rightarrow \pi x_2 \leq \pi x_4 \Rightarrow x_2 \leq x_4 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_3) &\leq \frac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_1) \Rightarrow \pi x_3 \geq \pi x_1 \Rightarrow x_3 \geq x_1 \Rightarrow x_3 = x_1. \end{aligned}$$

Khi đó ta dễ dàng suy ra được $x_2 = x_4$.

Xét hàm số $f(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x) \left(x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \right)$. Ta có $f'(x) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{9} \pi \sin(\pi x) \geq 1 - \frac{\sqrt{3}}{9} \pi > 0$ nên $f(x)$

đồng biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Có $x_1 + x_4 = x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 + \frac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_1) = x_2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Tóm lại $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_1) \Rightarrow \cos(\pi x_1) - 3\sqrt{3}x_1 = 0$.

Xét hàm số $g(x) = \cos(\pi x) - 3\sqrt{3}x$ với $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ có $g'(x) = -\pi \sin(\pi x) - 3\sqrt{3} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ do đó phương trình $g(x) = 0$ có tối đa một nghiệm trên

$\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Ta không khó để nhận ra rằng $g\left(\frac{1}{6}\right) = 0$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$.

Câu 20. Lời giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}x_1 = \cos \pi x_2 \\ 2\sqrt{2}x_2 = \cos \pi x_3 \\ 2\sqrt{2}x_3 = \cos \pi x_4 \\ 2\sqrt{2}x_4 = \cos \pi x_1 \end{cases} ; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Theo đề $|x_i| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{\pi}{2} \forall i = \overline{1, 4} \Rightarrow \cos \pi x_i > 0, \forall i = \overline{1, 4}$.

Nếu $x_1 > x_3$ thì $\cos \pi x_2 \geq \cos \pi x_4 \Rightarrow x_2 \leq x_4 \Rightarrow \cos \pi x_3 \leq \cos \pi x_1 \Rightarrow x_3 \geq x_1$. Do đó $x_1 = x_3$.

Chứng minh tương tự ta có được $x_2 = x_4$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \\ x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \pi x_2 \\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \pi x_1 \end{cases}$$

Đồ thị của hai hàm số $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \pi x_2$; $x_2 = \frac{1}{\pi} \arccos 2\sqrt{2}x_1$; $x_1 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, $x_2 \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ trong hệ trục tọa độ

Ox_1x_2 cắt nhau tại một điểm duy nhất có tọa độ $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{4}$.

Câu 21. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x = \cos\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}y\right) \\ y = \cos\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}z\right) \\ z = \cos\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}x\right) \end{cases}$$

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}x\right)$ ta có $f'(x) = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}x\right) \Rightarrow |f'(x)| < 1$.

Theo định lý Lagrange ta có $|x - y| = |f(y) - f(z)| = |f'(\xi)||y - z| \leq |y - z|$.

Tương tự ta có $|x - y| \leq |y - z| \leq |z - x| \leq |x - y| \Rightarrow |x - y| = |y - z| = |z - x|$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \max\{x, y, z\} \Rightarrow x = y = z$.

Xét hàm số $g(x) = x - \cos\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}x\right)$ ta có $g'(x) = 1 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}x\right) > 0$.

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ nên nghiệm của phương trình là $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy hệ có nghiệm $(x; y; z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Câu 22. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = y \\ y^2 + y - 1 = z \\ z^2 + z - 1 = x \end{cases}$$

Lời giải

Cách 1. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \min\{x; y; z\}$

$$x^2 - 1 = y - x \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 1$$

$$z^2 - 1 = x - z \leq 0 \Rightarrow |z| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y^2 + y - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y^2 + y \leq 2 \Rightarrow y \in [-2; -1] \cup [0; 1]$$

- Nếu $x > 0 \Rightarrow z \geq x \geq 1 \Rightarrow z = x = 1 \Rightarrow y = 1$.
- Nếu $x \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \Rightarrow z^2 + z - 1 \leq -1 \Rightarrow z \in [0; 1] \\ x \leq -1 \Rightarrow x(x+1) \geq 0 \Rightarrow y \geq -1 \end{cases}$

| Hệ phương trình nhiều ẩn

- Nếu $y = -1 \Rightarrow x = y = z = -1$.
- Nếu $y > -1 \Rightarrow y \in [0; 1]$.

Ta có
$$\begin{cases} -1 \geq z^2 + z - 1 = x \geq -\frac{5}{4} \\ y^2 + y - 1 = z \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ -1 \leq z \leq 0 \end{cases} \Rightarrow |xyz| < 1 (*)$$

Mặt khác $xyz(x+1)(y+1)(z+1) = (x^2+x)(y^2+y)(z^2+z) = (x+1)(y+1)(z+1)$.

Nếu $(x+1)(y+1)(z+1) = 0$ thì $x = y = z = -1$.

Nếu $(x+1)(y+1)(z+1) \neq 0$ thì $xyz = 1$, điều này mâu thuẫn!

Vậy hệ có nghiệm $(x; y; z) = (1; 1; 1), (x; y; z) = (-1; -1; -1)$

Cách 2. Cộng các vế của hệ phương trình ta được $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} x(x+1) = y+1 \\ y(y+1) = z+1 \\ z(z+1) = x+1 \end{cases}$$

- Nếu $x = -1 \Leftrightarrow y = z = -1$.
- Nếu $x, y, z \neq -1$ thì nhân vế theo vế ta được $xyz = 1$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$3 = x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y; z) = (1; 1; 1), (x; y; z) = (-1; -1; -1)$.

Câu 23. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 30\frac{y}{x^2} + 4y = 2012 \\ 30\frac{z}{y^2} + 4z = 2012 \\ 30\frac{x}{z^2} + 4x = 2012 \end{cases}$$

Lời giải

Ta có. $30\frac{y}{x^2} + 4y = 2012 \Leftrightarrow y\left(\frac{30}{x^2} + 4\right) = 2012 > 0 \Rightarrow y > 0$. Tương tự $x, z > 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y, x \geq z$.

Trừ vế theo vế của phương trình thứ ba cho phương trình thứ nhất ta được.

$$30\left(\frac{x}{z^2} - \frac{y}{x^2}\right) + 4(x - y) = 0 \Leftrightarrow 30(x^3 - yz^2) + 4x^2z^2(x - y) = 0.$$

Vì $x \geq y > 0, x \geq z > 0$ nên $x - y \geq 0; x^3 - yz^2 \geq 0$.

Do đó $30(x^3 - yz^2) + 4x^2z^2(x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = yz^2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$.

Câu 24. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = y^2 + 1 & (1) \\ y + \frac{1}{y} = z^2 + 1 & (2) \\ z + \frac{1}{z} = x^2 + 1 & (3) \end{cases}$$

Đề thi chính thức 30/4/2019 – TP. Hồ Chí Minh

Lời giải

Từ (1), (2) và (3) nhận thấy $x, y, z > 0$.

Cách 1.

$$\text{Biến đổi hệ phương trình thành } \begin{cases} \frac{x^2+1}{x} = y^2+1 \\ \frac{y^2+1}{y} = z^2+1 \\ \frac{z^2+1}{z} = x^2+1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} = (x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) \Rightarrow xyz = 1.$$

$$\text{Mặt khác, ta có } y^2+1 = \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Rightarrow y \geq 1.$$

Tương tự $z \geq 1, x \geq 1$. Từ đây, suy ra $xyz \geq 1$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$. Thử lại thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 1; 1)$.

Cách 2.

$$\text{Ta có } y^2+1 = \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Rightarrow y \geq 1.$$

$$\text{Ta cộng (1), (2) và (3) vế theo vế } x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{z} = x^2+1 + y^2+1 + z^2+1$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) + 1 - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) + \frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x + \frac{1}{x}\right) + (y-1)\left(y + \frac{1}{y}\right) + (z-1)\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\text{Do } x + \frac{1}{x}, y + \frac{1}{y}, z + \frac{1}{z} > 0.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 1; 1)$.

Cách 3. Nguyễn Mai Hoàng Anh.

$$\text{Không mất tính tổng quát, ta giả sử } x \geq y \geq z > 0. \text{ Khi đó } x^2+1 \geq y^2+1 \geq z^2+1 \Rightarrow z + \frac{1}{z} \geq y + \frac{1}{y} \geq x + \frac{1}{x}.$$

$$\text{Từ (2), ta có } z^2+1 = y = \frac{1}{y} \leq z + \frac{1}{z} \Rightarrow z^2+1 \leq z + \frac{1}{z} \Leftrightarrow (z-1)(z^2+1) \leq 0 \Leftrightarrow z \leq 1 \Rightarrow 0 < z \leq 1.$$

$$\text{Nếu } 0 < z < 1. \text{ Từ (2) ta có } y + \frac{1}{y} = z^2+1 < z + 1 < 2.$$

$$\text{Điều này vô lí vì theo bất đẳng thức AM - GM cho 2 số dương, ta có } y + \frac{1}{y} \stackrel{AM-GM}{\geq} 2$$

$$\text{Vậy } z = 1 \Rightarrow y + \frac{1}{y} = 2. \text{ Mà } y + \frac{1}{y} \stackrel{AM-GM}{\geq} 2. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow y = 1.$$

Tương tự, với $y = 1 \Rightarrow x = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 1; 1)$.

Câu 25. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 - (x^2 + 2y^2) - (x - 3y) = 8 \\ y^3 + z^3 - (y^2 + 2z^2) - (y - 3z) = 8 \\ z^3 + x^3 - (z^2 + 2x^2) - (z - 3x) = 8 \end{cases}$$

Lời giải

Biến đổi hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - x = -y^3 + 2y^2 - 3y + 8 \\ y^3 - y^2 - y = -z^3 + 2z^2 - 3z + 8 \\ z^3 - z^2 - z = -x^3 + 2x^2 - 3x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+x+1) = (2-y)(y^2+3) & (1) \\ (y-2)(y^2+y+1) = (2-z)(z^2+3) & (2) \\ (z-2)(z^2+z+1) = (2-x)(x^2+3) & (3) \end{cases}$$

Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình.

- **Trường hợp 1.** Nếu $x > 2$ thì từ (1), (2), (3) ta dễ dàng chỉ ra điều vô lý.
- **Trường hợp 2.** Nếu $x < 2$ thì từ (1), (2), (3) ta dễ dàng chỉ ra điều vô lý.

Vậy $x = y = z = 2$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho!

Nhận xét. Đây là một câu hệ phương trình khó, sau đây là một số kỹ năng chúng ta cần phải có để giải quyết nó.

1. Nhẩm nghiệm của hệ phương trình. Đây là một trong những kỹ năng quan trọng của việc giải phương trình, hệ phương trình không mẫu mực.
2. Tiến hành phân tích (thêm, bớt và phân tích thành nhân tử) làm rõ nhân tử để đánh giá.
3. Lựa chọn công cụ đánh giá (đánh giá theo bất đẳng thức hay đơn thuần chỉ dựa vào dấu của các biến) và chỉ ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Dấu hiệu đầu tiên để nhận biết một hệ phương trình hoán vị vòng quanh có thể giải theo hướng này là các biến số phải được cô lập.

Câu 26. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3 - 4x - 2 = y^2 \\ y^4 + 2y^3 - 4y - 2 = z^2 \\ z^4 + 2z^3 - 4z - 2 = x^2 \end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} (x^4 - 4) + 2x^3 - 4x = y^2 - 2 \\ (y^4 - 4) + 2y^3 - 4y = z^2 - 2 \\ (z^4 - 4) + 2z^3 - 4z = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2) = y^2 - 2 \\ (y^2 - 2)(y^2 + 2y + 2) = z^2 - 2 \\ (z^2 - 2)(z^2 + 2z + 2) = x^2 - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2)[(x+1)^2 + 1] = y^2 - 2 \\ (y^2 - 2)[(y+1)^2 + 1] = z^2 - 2 \\ (z^2 - 2)[(z+1)^2 + 1] = x^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x^2 - 2|[(x+1)^2 + 1] = |y^2 - 2| \\ |y^2 - 2|[(y+1)^2 + 1] = |z^2 - 2| \\ |z^2 - 2|[(z+1)^2 + 1] = |x^2 - 2| \end{cases}$$

Do $(x+1)^2 + 1 \geq 1, (y+1)^2 + 1 \geq 1, (z+1)^2 + 1 \geq 1$ nên để hệ phương trình có nghiệm thì ta phải có

$$|x^2 - 2| \geq |z^2 - 2| \geq |y^2 - 2| \geq |x^2 - 2| \Rightarrow |x^2 - 2| = |z^2 - 2| = |y^2 - 2|.$$

Khi đó

$$\begin{cases} |x^2 - 2|[(x+1)^2 + 1] = |y^2 - 2| \\ |y^2 - 2|[(y+1)^2 + 1] = |z^2 - 2| \\ |z^2 - 2|[(z+1)^2 + 1] = |x^2 - 2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 2|(x+1)^2 = 0 \\ |y^2 - 2|(y+1)^2 = 0 \\ |z^2 - 2|(z+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \\ y \in \{-1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \\ z \in \{-1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \end{cases}$$

Câu 27. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 2x - 2 = y \\ y^3 - 2y - 2 = z \\ z^3 - 2z - 2 = x \end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} (x-2)[(x+1)^2 + 1] = y-2(1) \\ (y-2)[(y+1)^2 + 1] = z-2(2) \\ (z-2)[(z+1)^2 + 1] = x-2(3) \end{cases}$$

Để dàng nhận ra
$$\begin{cases} (1) \Rightarrow |x-2| \geq |y-2| \\ (2) \Rightarrow |y-2| \geq |z-2| \\ (3) \Rightarrow |z-2| \geq |x-2| \end{cases} \Rightarrow |x-2| = |y-2| = |z-2| \Rightarrow |x-2| = |y-2| = |z-2|.$$

Ta cũng có $x-2, y-2, z-2$ cùng dấu do đó $x-2 = y-2 = z-2 \Leftrightarrow x = y = z$.

Khi đó hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} x = y = z \\ x^3 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = -1 \\ x = y = z = 2 \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y; z) = (-1; -1; -1), (2; 2; 2)$.

Câu 28. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(x+1) = 2(y^3 - x) + 1 \\ y^2(y+1) = 2(z^3 - y) + 1 \\ z^2(z+1) = 2(x^3 - z) + 1 \end{cases}$$

Lời giải

Viết lại hệ đã cho dưới dạng
$$\begin{cases} x^3 + x^2 + 2x = 2y^3 + 1 \\ y^3 + y^2 + 2y = 2z^3 + 1 \\ z^3 + z^2 + 2z = 2x^3 + 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$$

Trong đó $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ và $g(t) = 2t^3 + 1$.

Nhận xét rằng $g(t), f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0, g'(t) = 6t^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hệ đã cho tương đương với hệ
$$\begin{cases} x = y = z \\ h(x) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Trong đó $h(t) = t^3 - t^2 - 2t + 1$.

Nhận xét rằng $h(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $h(-2) < 0, h(0) > 0$, ta có $h(1) < 0, h(2) > 0$ nên phương trình $h(t) = 0$ có cả 3 nghiệm phân biệt đều nằm trong $(-2; 2)$

Đặt $x = 2\cos u, u \in (0; \pi)$. Khi đó $\sin u \neq 0$ và (4) có dạng

$$\begin{cases} x = y = z = 2\cos u, u \in (0; \pi) \\ 8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = y = z = 2\cos u, u \in (0; \pi) \\ \sin u(8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1) = 0 \end{cases}$$

| Hệ phương trình nhiều ẩn

$$\text{Hay } \begin{cases} x = y = z = 2 \cos u, u \in (0; \pi) \\ \sin 4u = \sin 3u \end{cases} \quad (5)$$

Lời giải hệ phương trình (5) ta thu được $u \in \left\{ \frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{5\pi}{7} \right\}$ và $\begin{cases} x = y = z = 2 \cos u, u \in (0; \pi) \\ u \in \left\{ \frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{5\pi}{7} \right\} \end{cases}$.

Câu 29. Lời giải hệ phương trình với x, y, z dương $\begin{cases} 2x^{2004} = y^6 + z^6 \\ 2y^{2004} = z^6 + x^6 \\ 2z^{2004} = x^6 + y^6 \end{cases}$

Lời giải

Giả sử (x, y, z) là một bộ ba số dương thoả mãn hệ phương trình đã cho. Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < x \leq y \leq z$. Như vậy

$$\begin{cases} 2x^{2004} = y^6 + z^6 \geq x^6 + x^6 \\ 2z^{2004} = x^6 + y^6 \leq z^6 + z^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{2004} \geq x^6 \\ z^{2004} \leq z^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ z \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 1$$

Đảo lại, dễ thấy $x = y = z = 1$ là một bộ ba số dương thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30. Lời giải hệ phương trình $\begin{cases} e^x - e^{x-y} = y \\ e^y - e^{y-z} = z \\ e^z - e^{z-x} = x \end{cases}$

Lời giải

- Với $x = 0$ hệ trở thành $\begin{cases} 1 - e^{-y} = y \\ e^y - e^{y-z} = z \\ e^z - e^z = 0 \end{cases}$

Xét hàm số $f(y) = 1 - e^{-y} - y (y \in \mathbb{R})$, có $f'(y) = e^{-y} - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Suy ra $f(y)$ đồng biến trên $(-\infty; 0]$ và nghịch biến trên $[0; +\infty)$.

Ta có $\max f(y) = 0$, dấu “=” xảy ra khi $y = 0 \Rightarrow z = 0$.

Vậy $(0; 0; 0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

- Với $x \neq 0$, hệ phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} e^x = \frac{ye^y}{e^y - 1} \\ e^y = \frac{ze^z}{e^z - 1} \\ e^z = \frac{xe^x}{e^x - 1} \end{cases}$

Xét hàm số $g(t) = \frac{te^t}{e^t - 1} (t \neq 0)$.

Ta có $g'(t) = \frac{e^t(e^t - t - 1)}{(e^t - 1)^2} > 0, \forall t \neq 0$ (vì $e^t > t + 1 \forall t \neq 0$); $\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = 1; \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 1$.

Do đó hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Nếu $x > y \Rightarrow g(x) > g(y) \Rightarrow e^z > e^x \Rightarrow z > x \Rightarrow g(z) > g(x) \Rightarrow e^y > e^z \Rightarrow y > z \Rightarrow y > x$

Điều này mâu thuẫn, tương tự nếu $x < y$ ta cũng thấy điều mâu thuẫn.

Vậy $x = y \Rightarrow y = z$, khi đó ta được $\begin{cases} x = y = z \neq 0 \\ e^x - 1 = x \end{cases}$.

Vậy trường hợp này hệ vô nghiệm.

Tóm lại hệ có nghiệm duy nhất $(0;0;0)$.

Câu 31. Lời giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2yz = x & (1) \\ y^2 + 2zx = y & (2) \\ z^2 + 2xy = z & (3) \end{cases}$

Lời giải

Lấy (1)–(2) ta được $x^2 - y^2 + 2z(y - x) = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 2z - 1) = 0$ (4)

Lấy (2)–(3) ta được $y^2 - z^2 + 2x(z - y) = y - z \Leftrightarrow (y - z)(y + z - 2x - 1) = 0$ (5)

- **Trường hợp 1.** $x = y = z$ thay vào hệ ta được $3x^2 = x \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$
- **Trường hợp 2.** $x = y \neq z$ thì từ (1),(5) ta có

$$\begin{cases} x(x + 2z - 1) = 0 \\ y + z - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 2z - 1) = 0 \\ z = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

- **Trường hợp 3.** x, y, z khác nhau từng đôi một ta suy ra

$$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y + z - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x - 3z = 0 \Rightarrow x = z$$

Điều này mâu thuẫn với điều đang giả sử.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0;0;0), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), (0;1;0), \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ và các hoán vị.

Câu 32. Lời giải hệ phương trình $\begin{cases} x = (y - 1)^2 \\ y = (z - 1)^2 \\ z = (t - 1)^2 \\ t = (x - 1)^2 \end{cases}$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x = \min\{x, y, z, t\}$

Từ hệ phương trình ta suy ra $x, y, z, t > 0$

- **Trường hợp 1.** $0 < x \leq 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -1 < x - 1 \leq 0 &\Rightarrow 0 \leq (x - 1)^2 < 1 \Rightarrow 0 < t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (t - 1)^2 < 1 \\ \Rightarrow 0 < z \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq (z - 1)^2 < 1 \Rightarrow 0 < y \leq 1 \end{aligned}$$

Từ đó ta có $0 < x, y, z, t \leq 1$.

Khi đó từ $z \geq x \Rightarrow (t - 1)^2 \geq (y - 1)^2 \Rightarrow y \geq t \Rightarrow (z - 1)^2 \geq (x - 1)^2$

$$\Rightarrow x \geq z \Rightarrow (y - 1)^2 \geq (t - 1)^2 \Rightarrow t \geq y \Rightarrow x = z, y = t$$

$$\text{Thế vào hệ phương trình đầu ta được } \begin{cases} x = (y-1)^2 \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1(L) \\ x = y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \end{cases}$$

- **Trường hợp 2.** $x > 1 \Rightarrow x, y, z, t > 1$. Khi đó từ $y \geq x \Rightarrow (z-1)^2 \geq (y-1)^2 \Rightarrow z \geq y$
 $\Rightarrow (t-1)^2 \geq (z-1)^2 \Rightarrow t \geq z \Rightarrow (x-1)^2 \geq (t-1)^2 \Rightarrow x \geq t$.

$$\text{Thế vào một phương trình của hệ ta được } x = (x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 \end{cases}$$

Vậy các nghiệm của hệ phương trình là

$$(x; y; z; t) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right); (0; 1; 0; 1); (1; 0; 1; 0)$$

Câu 33. Lời giải hệ phương trình	$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{1}{x_2} \right) \\ x_2 = \frac{1}{2} \left(x_3 + \frac{1}{x_3} \right) \\ \dots \\ x_n = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{1}{x_1} \right) \end{cases}$
---	---

Lời giải

Điều kiện $x_i \neq 0, \forall i = \overline{1, n}$.

Nếu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm hệ suy ra $x_1, x_2, \dots, x_n$ cùng dấu và $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ cũng là nghiệm của hệ. Xét trường hợp $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Khi đó, theo bất đẳng thức AM – GM có

$$x_i = \frac{1}{2} \left(x_{i+1} + \frac{1}{x_{i+1}} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{x_{i+1} \cdot \frac{1}{x_{i+1}}} = 1$$

Cộng theo về n phương trình của hệ ta có $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} (*)$

Do $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1 \Rightarrow VT(*) \geq VP(*)$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

Vậy hệ có 2 nghiệm $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1, x_1 = x_2 = \dots = x_n = -1$.

Câu 34. Lời giải hệ phương trình	$\begin{cases} x_1^2 + x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ x_2^2 + x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ x_3^2 + x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ x_4^2 + x_4 - x_1 - 1 = 0 \end{cases}$
---	--

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_1 = \min \{x_1; x_2; x_3; x_4\}$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 1$, hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} f(x_1) = x_2 \\ f(x_2) = x_3 \\ f(x_3) = x_4 \\ f(x_4) = x_1 \end{cases}$$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và đồng thời ta có

$$f(t) \geq f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}, \forall t \in \mathbb{R}, \text{ từ đó suy ra } x_i \geq -\frac{5}{4}, \forall i = \overline{1, 4}.$$

- **Trường hợp 1.** Nếu $x_1 \geq -\frac{1}{2}$, ta có
$$\begin{cases} x_4 \geq -\frac{5}{4} \\ f(x_4) \geq -\frac{1}{2} > \frac{-11}{6} = f\left(-\frac{5}{4}\right) \Rightarrow x_4 > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Tương tự ta có $x_2, x_3 > -\frac{1}{2}$.

$$\text{Do } x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow x_2 \leq x_3 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_3) \Rightarrow x_3 \leq x_4.$$

$$\Rightarrow f(x_3) \leq f(x_4) \Rightarrow x_4 \leq x_1 \Rightarrow x_1 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_1 \Rightarrow x_2 = x_3 = x_4 = 1.$$

- **Trường hợp 2.** Nếu $x_1 < -\frac{1}{2}$

Nếu có $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ để $x_k \geq -\frac{1}{2}$ thì theo trường hợp 1 ta có $x_i \geq -\frac{1}{2}, \forall i = \overline{1, 4}$

$$\Rightarrow x_1 \geq -\frac{1}{2}, \text{ mâu thuẫn. Vậy ta có } x_i < -\frac{1}{2}, \forall i = \overline{1, 4}$$

$$\text{Do } x_1 \leq x_3 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_3) \Rightarrow f(x_3) \Rightarrow x_2 \geq x_4 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_4) \Rightarrow x_3 \leq x_1 \Rightarrow x_3 = x_1$$

Lập luận tương tự ta có $x_2 = x_4$. Khi đó hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \\ f(x_1) = x_2 \\ f(x_2) = x_3 \end{cases} \Rightarrow x_1 + f(x_1) = x_2 + f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 1 = x_2^2 + 2x_2 - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = \pm 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \pm 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \pm 1$

Câu 35. Lời giải n phương trình với n ẩn	$\begin{cases} x_1 x_1 - (x_1 - a) x_1 - a = x_2 x_2 \\ x_2 x_2 - (x_2 - a) x_2 - a = x_3 x_3 \\ \dots \\ x_n x_n - (x_n - a) x_n - a = x_1 x_1 \end{cases}$
IMO Shortlist 1984	

Lời giải

Nếu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm hệ với tham số a thì $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cũng là nghiệm hệ với tham số $-a$.

Xét $a > 0$

- **Trường hợp 1.** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm hệ mà $x_i \leq a, \forall i = \overline{1, n}$.

$$\text{Cộng theo vế các phương trình của hệ có } (x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2 = 0.$$

| Hệ phương trình nhiều ẩn

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$$

- **Trường hợp 2.** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm hệ $\exists k \in \mathbb{N}^*$ để $x_k \geq a$.

Ta có phương trình thứ k cho ta

$$x_k^2 - (x_k - a)^2 = x_{k+1} |x_{k+1}| \Leftrightarrow x_{k+1} |x_{k+1}| = a(2x_k - a) \geq a^2 \Rightarrow x_{k+1} \geq a$$

Do đó $x_1 \geq a; x_2 \geq a; \dots; x_n \geq a$.

Dễ dàng suy ra $x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$.

Vậy hệ có nghiệm $x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$.

Câu 36. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 30\sqrt{x_1} + 4\sqrt{x_2} = \sqrt[2013]{x_3^{2012}} \\ 30\sqrt{x_2} + 4\sqrt{x_3} = \sqrt[2013]{x_4^{2012}} \\ \dots \\ 30\sqrt{x_{2012}} + 4\sqrt{x_1} = \sqrt[2013]{x_2^{2012}} \\ x_1, x_2, \dots, x_{2012} > 0 \end{cases}$$

Lời giải

Giả sử $(x_1, x_2, \dots, x_{2012})$ là một nghiệm của hệ phương trình trên.

Đặt $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{2012}\}$; $m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{2012}\}$. Suy ra $M \geq m > 0$.

Ta có
$$\begin{cases} 34\sqrt{M} \geq 30\sqrt{x_1} + 4\sqrt{x_2} = \sqrt[2013]{x_3^{2012}} \\ 34\sqrt{M} \geq 30\sqrt{x_2} + 4\sqrt{x_3} = \sqrt[2013]{x_4^{2012}} \\ \dots \\ 34\sqrt{M} \geq 30\sqrt{x_{2012}} + 4\sqrt{x_1} = \sqrt[2013]{x_2^{2012}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 34\sqrt{M} \geq \max\left\{\sqrt[2013]{x_1^{2012}}, \sqrt[2013]{x_2^{2012}}, \dots, \sqrt[2013]{x_{2012}^{2012}}\right\} \Rightarrow 34\sqrt{M} \geq \sqrt[2013]{M^{2012}}$$

$$\Rightarrow 34^{4026} M^{2013} \geq M^{4024} \Rightarrow M^{2011} \leq 34^{4026} \Rightarrow M \leq \sqrt[2011]{34^{4026}}$$

Chứng minh tương tự, ta được $m \geq \sqrt[2011]{34^{4026}}$. Suy ra $M = m = \sqrt[2011]{34^{4026}}$.

Do đó $x_1 = x_2 = \dots = x_{2012} = \sqrt[2011]{34^{4026}}$. Thử lại thấy đúng.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x_1 = x_2 = \dots = x_{2012} = \sqrt[2011]{34^{4026}}$.

Câu 37. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{2012}{x_2} \right) \\ x_2 = \frac{1}{2} \left(x_3 + \frac{2012}{x_3} \right) \\ \dots \\ x_{2012} = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{2012}{x_1} \right) \end{cases} ; x_1, x_2, \dots, x_{2012} \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Ta có $x_i x_{i+1} = \frac{1}{2} \left(x_{i+1} + \frac{2012}{x_{i+1}} \right) x_{i+1} = \frac{1}{2} (x_{i+1}^2 + 2012) > 0, \forall i = \overline{1, 2011}$.

Suy ra các x_i cùng dấu $\forall i = \overline{1, 2012}$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x_{i+1} + \frac{2012}{x_{i+1}} \geq 2\sqrt{2012} \Rightarrow 2x_i \geq 2\sqrt{2012} \Rightarrow x_i \geq \sqrt{2012}, \forall i = \overline{1, 2012}.$$

Lấy phương trình đầu tiên lần lượt trừ cho các phương trình số 2, số 3,..., số 2012 về theo về ta được

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_3) \left(1 - \frac{2012}{x_2 x_3}\right) \\ x_2 - x_3 = \frac{1}{2}(x_3 - x_4) \left(1 - \frac{2012}{x_3 x_4}\right) \\ \dots \\ x_{2012} - x_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \left(1 - \frac{2012}{x_1 x_2}\right) \end{cases}$$

Vì $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{2012}$ nên $1 - \frac{2012}{x_2 x_3} \geq 0; 1 - \frac{2012}{x_3 x_4} \geq 0; \dots; 1 - \frac{2012}{x_{2011} x_{2012}} \geq 0$ và $1 - \frac{2012}{x_1 x_2} \leq 0$.

Suy ra $\begin{cases} x_2 x_3 \geq 2012 \\ \dots \\ x_{2011} x_{2012} \geq 2012 \\ x_1 x_2 \leq 2012 \end{cases}$. Kết hợp với $|x_i| \geq \sqrt{2012}, \forall i = \overline{1, 2012}$ suy ra $x_1 = x_2 = \dots = x_{2012} = \sqrt{2012}$.

Câu 38. Lời giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 2x - y \\ y^2 = 2y - z \\ z^2 = 2z - t \\ t^2 = 2t - x \end{cases}; x, y, z, t \in \mathbb{R}.$

Lời giải

Đặt $X = 1 - x, Y = 1 - y, Z = 1 - z, T = 1 - t$.

Ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} X^2 = Y \\ Y^2 = Z \\ Z^2 = T \\ T^2 = X \end{cases} \Rightarrow X^{16} = Y^8 = Z^4 = T^2 = X.$

Như vậy $X(X^{15} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X = 1 \end{cases}.$

- Với $X = 0 \Rightarrow Y = Z = T = 0 \Rightarrow x = y = z = t = 1$.
- Với $X = 1 \Rightarrow Y = Z = T = 1 \Rightarrow x = y = z = t = 0$.

Câu 39. Lời giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1^2 + kx_1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = x_2 \\ x_2^2 + kx_2 + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = x_3 \\ \dots \\ x_n^2 + kx_n + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = x_1 \end{cases}; x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}, k \text{ là tham số.}$

Crux – Canada 1999

Lời giải

Cộng về theo về của các phương trình đã cho ta được

| Hệ phương trình nhiều ẩn

$$0 = \sum_{i=1}^n \left[x_i^2 + (k-1)x_i + \left(\frac{k-1}{2} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^n \left(x_i + \frac{k-1}{2} \right)^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1-k}{2}.$$

Vậy hệ có nghiệm $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1-k}{2}$

Câu 40. Lời giải hệ phương trình	$\begin{cases} 2012x_1 - 4025x_2 + 2013x_3 = 0 \\ 2012x_2 - 4025x_3 + 2013x_4 = 0 \\ \dots \\ 2012x_n - 4025x_1 + 2013x_2 = 0 \end{cases} ; x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}, n \geq 3$
---	--

Lời giải

Đặt $y_1 = x_1 - x_2; y_2 = x_2 - x_3; \dots; y_n = x_n - x_1$.

Hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} 2012y_1 = 2013y_2 \\ 2012y_2 = 2013y_3 \\ \dots \\ 2012y_n = 2013y_1 \end{cases} \Rightarrow 2012^n y_1 y_2 \dots y_n = 2013^n y_1 y_2 \dots y_n \Rightarrow y_1 y_2 \dots y_n = 0.$$

Như vậy phải có một chỉ số j sao cho $y_j = 0$, tuy nhiên $2012y_j = 2013y_{j+1}, \dots$ nên $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$.

Suy ra $x_1 = x_2 = \dots = x_n = a \in \mathbb{R}$.

Câu 41. Lời giải hệ phương trình	$\begin{cases} x(4-y^2) = 8y \\ y(4-z^2) = 8z \\ z(4-x^2) = 8x \end{cases}$
---	---

Lời giải

Nếu $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ thì $x; y; z \neq \pm 2$.

Ta có $z = \frac{8x}{4-x^2}; y = \frac{8z}{4-z^2}; x = \frac{8y}{4-y^2}$. Đặt $x = 2 \tan \alpha$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow z = 2 \tan 2\alpha; x = 2 \tan 8\alpha$.

Dẫn đến $\tan 8\alpha = \tan \alpha \Leftrightarrow \alpha = k \frac{\pi}{7}$. Vì $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ nên $k \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$.

Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Câu 42. Lời giải hệ phương trình	$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^{1996} \\ x_2 + x_3 = x_4^{1996} \\ \dots \\ x_{1995} + x_{1996} = x_1^{1996} \\ x_{1996} + x_1 = x_2^{1996} \end{cases}$
---	--

Lời giải

Gọi X là giá trị lớn nhất của các nghiệm $x_i (i = \overline{1, 1996})$ và Y là giá trị bé nhất của chúng. Thế thì từ phương trình đầu ta có $2X \geq x_1 + x_2 = x_3^{1996}$. Từ đó đối với các phương trình của hệ ta có

$$2X \geq x_k^{1996}, \forall k = \overline{1, 1996}$$

Hay là ta có $2X \geq X^{1996}$, suy ra $2 \geq X^{1995}$ (do $X > 0$) (1)

Lập luận một cách tương tự ta cũng đi đến $2 \leq Y^{1995}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $X^{1995} = Y^{1995} = 2$, nghĩa là ta có $x_1 = x_2 = \dots = x_{1996} = \sqrt[1995]{2}$.

Câu 43. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{b_n}, & b_1, b_2, \dots, b_n \neq 0, \sum_{i=1}^n b_i \neq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = c \end{cases}$$

Lời giải

Đặt $\frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{b_n} = t$.

Ta có $x_i = tb_i + a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a_i + t \sum_{i=1}^n b_i \Rightarrow c = \sum_{i=1}^n a_i + t \sum_{i=1}^n b_i \Rightarrow t = \frac{\left(c - \sum_{i=1}^n a_i\right)}{\sum_{i=1}^n b_i} \Rightarrow x_i = a_i + b_i \frac{\left(c - \sum_{i=1}^n a_i\right)}{\sum_{i=1}^n b_i}$.

Câu 44. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 12y^2 + 48y - 64 = 0 \\ y^3 - 12z^2 + 48z - 64 = 0 \\ z^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Cộng vế với vế của 3 phương trình trong hệ cho nhau ta được

$$(x-4)^3 + (y-4)^3 + (z-4)^3 = 0(*)$$

Từ đó suy ra trong 3 số hạng $(x-4), (y-4), (z-4)$ có ít nhất một số không âm.

Ta giả sử $(z-4)^3 \geq 0 \Leftrightarrow z \geq 4$.

Từ phương trình thứ 2 ta có $y^3 - 16 = 12(z-2)^2 \geq 12 \cdot 2^2 \Rightarrow y \geq 4$.

Từ phương trình thứ 1 ta có $x^3 - 16 = 12(y-2)^2 \geq 12 \cdot 2^2 \Rightarrow x \geq 4$

Vậy ta được $x, y, z \geq 4 \Rightarrow VT(*) \geq VP(*)$.

Từ đây ta thử lại và suy ra được nghiệm của hệ phương trình là $x = y = z = 4$.

Câu 45. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \cos 2x + \cos x = 2 \cos y \\ \cos 2y + \cos y = 2 \cos z \\ \cos 2z + \cos z = 2 \cos x \end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} (2 \cos x - 1)(\cos x + 2) = 2 \cos y - 1 \\ (2 \cos y - 1)(\cos y + 2) = 2 \cos z - 1 \\ (2 \cos z - 1)(\cos z + 2) = 2 \cos x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2 \cos x - 1|(\cos x + 2) = |2 \cos y - 1| \\ |2 \cos y - 1|(\cos y + 2) = |2 \cos z - 1| \\ |2 \cos z - 1|(\cos z + 2) = |2 \cos x - 1| \end{cases}$$

$$\Rightarrow |2 \cos x - 1| \geq |2 \cos y - 1| \geq |2 \cos z - 1| \geq |2 \cos x - 1| \text{ (do } \cos x + 2; \cos y + 2; \cos z + 2 \geq 1)$$

$$\Rightarrow |2 \cos x - 1| = |2 \cos y - 1| = |2 \cos z - 1|$$

Khi đó hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} |2 \cos x - 1|(\cos x + 2) = |2 \cos x - 1| \\ |2 \cos y - 1|(\cos y + 2) = |2 \cos y - 1| \\ |2 \cos z - 1|(\cos z + 2) = |2 \cos z - 1| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x - 1 = 2 \cos y - 1 = 2 \cos z - 1 = 0 \\ \cos x + 2 = \cos y + 2 = \cos z + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \in \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ x, y, z \in \left\{ \pi \pm 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \end{cases}$$

Câu 46. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\cos 2x + \frac{\tan^2 x + \tan^2 y}{1 + \tan^2 x} = 2 \\ 2\cos 2y + \frac{\tan^2 y + \tan^2 z}{1 + \tan^2 y} = 2 \\ 2\cos 2z + \frac{\tan^2 z + \tan^2 x}{1 + \tan^2 z} = 2. \end{cases}$$

Lời giải

Từ công thức $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ ta biến đổi hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} \frac{\tan^2 y - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 - \cos 2x \\ \frac{\tan^2 z - \tan^2 y}{1 + \tan^2 y} = 1 - \cos 2y \\ \frac{\tan^2 x - \tan^2 z}{1 + \tan^2 z} = 1 - \cos 2z \end{cases}$$

Vì $1 - \cos 2\alpha \geq 0$ nên ta suy ra

$$\begin{aligned} \tan^2 x \geq \tan^2 y \geq \tan^2 z \geq \tan^2 x &\Rightarrow \tan^2 x = \tan^2 y = \tan^2 z \\ \Rightarrow 1 - \cos 2x = 1 - \cos 2y = 1 - \cos 2z = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ y = l\pi \\ z = m\pi \end{cases} \quad (k, l, m \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y; z) = (k\pi; l\pi; m\pi) (k, l, m \in \mathbb{Z})$.

Câu 47. Lời giải hệ phương trình với x, y, z dương
$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3 & (1) \\ y + z^2 + x^3 = 3 & (2) \\ z + x^2 + y^3 = 3 & (3) \end{cases}$$

Lời giải

Lấy (1) - (2), (2) - (3) ta được
$$\begin{cases} x(1 - x^2) + y(y - 1) + z^2(z - 1) = 0 & (4) \\ y(1 - y^2) + z(z - 1) + x^2(x - 1) = 0 & (5) \end{cases}$$

Lấy (4) - z(5) ta được $x(1 - x^2) + y(y - 1) = zy(1 - y^2) + zx^2(x - 1)$

$$\Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x + xz) = y(1 - y)(1 + z + zy) \quad (6)$$

Thay (x, y, z) bởi (y, z, x) ta được

$$y(1 - y)(1 + y + yx) = z(1 - z)(1 + x + xz) \quad (7)$$

Xét trường hợp $(x, y, z) \neq (1; 1; 1)$.

- Nếu $x > 1$ thì do $y > 0, z > 0$ nên từ (6) ta suy ra $y > 1$, và từ (7) $\Rightarrow z > 1 \Rightarrow x + y^2 + z^3 > 3$.

Điều này vô lý!

- Nếu $x < 1$, chứng minh tương tự ta chỉ ra được $x + y^2 + z^3 < 3$, điều này vô lý!

Vậy $(x, y, z) = (1; 1; 1)$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Câu 48. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 4y - y^2 & (1) \\ y = 4z - z^2 & (2) \\ z = 4x - x^2 & (3) \end{cases}$$

Trại hè Hùng Vương 2010

Lời giải

Cách 1.

Đặt $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$, cộng 3 phương trình của hệ cho nhau ta được

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3(x + y + z) \Leftrightarrow p^2 - 2q = 3p \quad (4)$$

Ta thấy rằng $x = y = z = 3$ là một nghiệm của hệ phương trình nên ta biến đổi như sau

$$\begin{cases} x = 4y - y^2 \\ y = 4z - z^2 \\ z = 4x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)(y-3) = 3-x & (5) \\ (z-1)(z-3) = 3-y & (6) \\ (x-1)(x-3) = 3-z & (7) \end{cases}$$

Nhân các vế của (5),(6),(7) ta được $(x-3)(y-3)(z-3)[(x-1)(y-1)(z-1)+1] = 0 \quad (8)$

- **Trường hợp 1.** Nếu $x = 3$ thế vào hệ ta giải được $x = y = z = 3$
- **Trường hợp 2.** Nếu $y = 3$ thế vào hệ ta giải được $x = y = z = 3$
- **Trường hợp 3.** Nếu $z = 3$ thế vào hệ ta giải được $x = y = z = 3$
- **Trường hợp 4.** Nếu $x = 0$ thế vào (7) ta được $z = 0$, tiếp tục thế $y = 0$ vào (6) ta suy ra được $y = 0$. Vậy $(0;0;0)$ là một nghiệm của hệ phương trình, tương tự trường hợp $y = 0, z = 0$.
- **Trường hợp 5.** Xét $x, y, z \notin \{0;3\}$ thì từ (8) ta có

$$\begin{aligned} (x-1)(y-1)(z-1)+1 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(yz-y-z+1)+1=0 \\ &\Leftrightarrow xyz-xy-xz+x-yz+y+z=0 \Leftrightarrow r-q+p=0 \quad (9) \end{aligned}$$

Ta nhằm đc $x = y = z = 0$ nên hệ ban đầu sẽ viết lại thành $\begin{cases} x = y(4-y) \\ y = z(4-z) \\ z = x(4-x) \end{cases}$

Nhân 3 phương trình cho nhau ta được

$$\begin{aligned} xyz &= xyz(4-x)(4-y)(4-z) \Leftrightarrow (x-4)(y-4)(z-4) = -1 \\ &\Leftrightarrow (x-4)(yz-4y-4z+16) = -1 \\ &\Leftrightarrow xyz-4xy-4xz+16x-4yz+16y+16z-64 = -1 \\ &\Leftrightarrow r-4q+16p-64 = -1 \Leftrightarrow 16p-4q+r = 63 \quad (10) \end{aligned}$$

Từ (4),(9),(10) ta được $\begin{cases} p^2-2q=3p \\ 16p-4q+r=63 \\ r-q+p=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2-2q=3p \\ 15p-3q=63 \\ r=q-p \end{cases} \quad (11)$

Đến đây ta có $p^2 - \frac{2(15p-63)}{3} - 3p = 0 \Leftrightarrow 3p^2 - 30p + 126 - 9p = 0$

$$\Leftrightarrow 3p^2 - 39p + 126 = 0 \Leftrightarrow p^2 - 13p + 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p=7 \\ p=6 \end{cases}$$

- Nếu $(p;q;r) = (6;9;3)$ thì theo viet ta có x, y, z là nghiệm của phương trình

$$v^3 - 6v^2 + 9v - 3 = 0$$

Sử dụng cách giải phương trình bậc 3 ta giải được 3 nghiệm của phương trình là

$$v = 2 + 2\cos\frac{\pi}{9}, v = 2 + 2\cos\frac{5\pi}{9}, v = 2 + 2\cos\frac{7\pi}{9}$$

- Nếu $(p;q;r) = (7;14;7)$ thì x, y, z là nghiệm của phương trình

$$t^3 - 7t^2 + 14t - 7 = 0$$

Đến đây sử dụng cách giải phương trình bậc 3 ta giải được 3 nghiệm là

$$t = \frac{7}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos \frac{\alpha}{3}; t = \frac{7}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos \frac{\alpha+2\pi}{3}; t = \frac{7}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos \frac{\alpha-2\pi}{3}$$

$$\text{Trong đó } -\frac{\sqrt{7}}{14} = \cos \alpha \left(\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right) \right).$$

Cách 2.

Hệ phương trình đã cho xác định với mọi.

Nhận xét. Nếu $(x; y; z)$ là một nghiệm của hệ phương trình thì $x, y, z \in [0; 4]$

Thật vậy, cộng các vế tương ứng của các phương trình của hệ, ta được

$$3(x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$$

Do đó trong 3 số $x; y; z$ có ít nhất 1 số không âm, ta có thể coi rằng $x \geq 0$. Từ phương trình đầu ta có

$$y(4 - y) = x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq 4$$

Bằng cách hoán vị vòng quanh ta được $0 \leq x, y, z \leq 4$. Đặt $x = 4 \sin^2 t$, với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

- Từ phương trình thứ ba, suy ra $z = 4 \sin^2 t (4 - 4 \sin^2 t) = 4 \sin^2 2t$.
- Từ phương trình thứ hai, suy ra $y = 4 \sin^2 2t (4 - 4 \sin^2 2t) = 4 \sin^2 4t$.
- Từ phương trình thứ nhất, ta có $x = 4 \sin^2 4t (4 - 4 \sin^2 4t) = 4 \sin^2 8t$.

Do đó t là nghiệm của phương trình $\sin^2 8t = \sin^2 t \Leftrightarrow \cos 16t = \cos 2t \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{7}$ hoặc $t = \frac{k\pi}{9}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

- **Trường hợp 1.** $t = \frac{k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$. Do $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ nên k nhận các giá trị 0; 1; 2; 3.

Với $k = 0$, ta có $S = 4(\sin^2 t + \sin^2 2t + \sin^2 4t) = 0$.

Với $k = 1; k = 2; k = 3$, ta có $S = 4\left(\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{4\pi}{7}\right) = 7$.

- **Trường hợp 2.** $t = \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$. Do $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ nên k nhận các giá trị 0; 1; 2; 3; 4.

Với $k = 0$, ta có $S = 4(\sin^2 t + \sin^2 2t + \sin^2 4t) = 0$.

Với $k = 1; k = 2; k = 4$, ta có $S = 4\left[\sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin^2 \frac{4\pi}{9}\right] = 6$.

Với $k = 3$, ta có $S = 4\left(\sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{4\pi}{3}\right) = 9$.

Do đó $S \in \{0; 6; 7; 9\}$

Câu 49. Lời giải hệ phương trình	$\begin{cases} 2x^3 + 1 = 3zx & (1) \\ 2y^3 + 1 = 3xy & (2) \\ 2z^3 + 1 = 3yz & (3) \end{cases}$ Middle European Mathematical Olympiad 2012
--	---

Lời giải

- **Trường hợp 1.** 3 số x, y, z không âm. Theo AM – GM ta có

$$2x^3 + 1 = x^3 + x^3 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^6} = 3x^2$$

$$2y^3 + 1 = y^3 + y^3 + 1 \geq 3\sqrt[3]{y^6} = 3y^2$$

$$2z^3 + 1 = z^3 + z^3 + 1 \geq 3\sqrt[3]{z^6} = 3z^2$$

Từ đây suy ra $(2x^3 + 1)(2y^3 + 1)(2z^3 + 1) \geq 27x^2y^2z^2$. Mặt khác từ hệ ta có

$$(2x^3 + 1)(2y^3 + 1)(2z^3 + 1) = 27x^2y^2z^2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

- **Trường hợp 2.** Trong 3 số có 1 số âm, ta giả sử đó là x , khi đó ta có

$$x < 0, y \geq 0, z \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 3xy = 2y^3 + 1 > 0,$$

điều này vô lý

- **Trường hợp 3.** Trong 3 số có 2 số âm, ta giả sử đó là x, y , khi đó ta có

$$x < 0, y < 0, z \geq 0 \Rightarrow 2z^3 + 1 > 0 \geq 3yz,$$

điều này mâu thuẫn

- **Trường hợp 4.** Cả 3 số đều âm. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \max\{x, y, z\}$.

$$\text{Ta có } 1 + 2x^3 \geq 1 + 2z^3 \Rightarrow 3xz \geq 3yz \Leftrightarrow x \leq y \Rightarrow x = y.$$

$$\text{Từ } x = y \geq z \text{ ta lại có } 2y^3 + 1 \geq 2z^3 + 1 \Rightarrow 3xy \geq 3yz \Leftrightarrow x \leq z \Rightarrow x = z$$

$$\text{Thế vào hệ ta được } 2x^3 + 1 = 3x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(L) \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy nghiệm của hệ là } (x; y; z) = (1; 1; 1), (x; y; z) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Câu 50. Lời giải hệ phương trình	$\begin{cases} xy = z - x - y \\ xz = y - x - z \\ yz = x - y - z \end{cases}$
Canada National Olympiad 2004	

Lời giải

Cộng 2 vế của phương trình 1 với $(x + y + 1)$ ta được

$$xy + x + y + 1 = z + 1 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = z + 1$$

Tương tự với các phương trình còn lại trong hệ, khi đó hệ tương đương

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = z + 1 & (1) \\ (x+1)(z+1) = y + 1 & (2) \\ (y+1)(z+1) = x + 1 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Nhân cả 2 vế của (1), (2), (3) ta được } [(x+1)(y+1)(z+1)]^2 = (x+1)(y+1)(z+1) \quad (4)$$

- Nếu $x = -1$ thì từ (1), (2), (3) ta suy ra $y = z = -1$.
- Nếu $x, y, z \neq -1$ thì từ (4) ta có $(x+1)(y+1)(z+1) = 1$.

$$\text{Từ (5), (3) ta có } (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, -2\}.$$

- Với $x = 0$, thế vào hệ đầu ta được

$$\begin{cases} y = z \\ yz = -y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y; z) = (0; 0) \\ (y; z) = (-2; -2) \end{cases}$$

- Với $x = -2$, thế vào hệ đầu ta được

$$\begin{cases} -2y = z + 2 - y \\ -2z = y + 2 - z \\ yz = -2 - y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z + 2 = 0 \\ yz + y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y; z) = (0; -2) \\ (y; z) = (-2; 0) \end{cases}$$

Câu 51. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 1 \\ x + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y + z^2 = 1 \end{cases}$$

HSG lớp 12 năm học 1996 – 1997, TP. HCM

Lời giải

Biến đổi hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 1 \\ x + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - z^2 - x + z = 0 \\ x + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-z)(x+z-1) = 0 \\ x + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y + z^2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y + z^2 = 1 \end{cases}$$

Lời giải hệ
$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ x^2 + y^2 + x = 1 \\ 2x^2 + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ x^2 + (1 - 2x^2)^2 + x = 1 \\ y = 1 - 2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y; z) = (0; 1; 0) \\ (x; y; z) = (-1; -1; -1) \\ (x; y; z) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Lời giải hệ
$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ (2z - 2z^2)^2 + z^2 - z = 0 \\ y = 2z - 2z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ (z^2 - z)(2z - 1)^2 = 0 \\ y = 2z - 2z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y; z) = (1; 0; 0) \\ (x; y; z) = (0; 0; 1) \\ (x; y; z) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Câu 52. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y + 1 = 2z(x + 2) \\ 3y^2 + 2z + 1 = 2x(y + 2) \\ 3z^2 + 2x + 1 = 2y(z + 2) \end{cases}$$

Tuyển sinh vào 10 chuyên toán PTNK TP. Hồ Chí Minh 2013 – 2014

Lời giải

Đây là một bài toán đơn giản, ta cộng theo vế cả 3 phương trình trong hệ ta được

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Nhận xét. Bài toán trên chỉ là giải lao giữa chừng trước khi chúng ta đi vào các bài toán khó ở phía sau thôi, chứ không có điều gì cần chú ý lại cả ☺.

Câu 53. Chứng minh hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt
$$\begin{cases} x + y^2 + z^4 = 0 \\ y + z^2 + x^4 = 0 \\ z + x^2 + y^4 = 0 \end{cases}$$

Đề thi thử ĐH 2011 – THPT Chuyên Sư Phạm Hà Nội

Lời giải

Ta thấy rằng $(0; 0; 0)$ là một nghiệm của hệ phương trình và $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ thì ta có $x, y, z \leq 0$, và khi một trong 3 số bằng 0 thì các số còn lại cũng sẽ bằng 0.

Xét $xyz \neq 0$ thì $x, y, z < 0$, không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \max\{x; y; z\}$.

- **Trường hợp 1.** $z \leq y \leq x \Rightarrow z^2 \geq y^2 \geq x^2$. Do đó $0 = z + x^2 + y^4 \leq x + y^2 + z^4 = 0$.

Từ đây ta suy ra được $x = y = z$.

- **Trường hợp 2.** $y \leq z \leq x \Rightarrow y^2 \geq z^2 \geq x^2$. Do đó $0 = y + z^2 + x^4 \leq x + y^2 + z^4 = 0$.

Từ đây ta suy ra được $x = y = z$

Tóm lại ta được $x = y = z$. Khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} x = y = z < 0 \\ x^3 + x + 1 = 0 \end{cases}$. Đến đây sử dụng đạo hàm

ta dễ dàng chứng minh được $x^3 + x + 1 = 0$ có đúng 1 nghiệm. Vậy hệ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 54. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ ay^2 + by + c = z \\ az^2 + bz + c = x \end{cases}$, trong đó $a \neq 0$. Đặt $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$.

- Chứng minh rằng $\Delta < 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm
- Chứng minh rằng $\Delta = 0$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất

Đề thi đề nghị Olympic 30/4/2000

Lời giải

Hệ phương trình xác định với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ phương trình, cộng vế theo vế ta được

$$[ax_0^2 + (b-1)x_0 + c] + [ay_0^2 + (b-1)y_0 + c] + [az_0^2 + (b-1)z_0 + c] = 0(*)$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a > 0$

- Nếu $\Delta < 0$ thì $at^2 + (b-1)t + c > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } [ax_0^2 + (b-1)x_0 + c] + [ay_0^2 + (b-1)y_0 + c] + [az_0^2 + (b-1)z_0 + c] > 0$$

Điều này mâu thuẫn với (*).

Vậy hệ phương trình vô nghiệm

- Nếu $\Delta = 0$ thì $at^2 + (b-1)t + c \geq 0$, từ (*) suy ra $VT(*) \geq 0$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } x_0 = y_0 = z_0 = -\frac{b-1}{2a}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

Câu 55. Lời giải hệ phương trình $\begin{cases} x^{19} + y^5 = 1890z + z^{2001} \\ y^{19} + z^5 = 1890x + x^{2001} \\ z^{19} + x^5 = 1890y + y^{2001} \end{cases}$

Lời giải

Chúng ta sẽ chứng minh hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $x = y = z = 0$. Giả sử (x, y, z) là một nghiệm của hệ phương trình khi đó $(-x, -y, -z)$ cũng là một nghiệm của hệ phương trình, nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử có ít nhất hai trong ba số x, y, z không âm.

Giả sử rằng $x \geq 0, y \geq 0$. Từ phương trình thứ nhất ta suy ra $z \geq 0$.

Mặt khác nếu $0 < u \leq 1$ thì $1890 + u^{2000} > 2 \geq u^{18} + u^4$.

Nếu $u > 1$ thì $1890 + u^{2000} > 1 + u^{2000} > 2\sqrt{u^{2000}} = 2u^{1000} > u^{18} + u^4$.

Do đó $1890u + u^{2001} > u^{19} + u^5$ với mọi $u > 0$.

Bởi vậy nếu cộng từng vế của hệ phương trình ta suy ra $x = y = z = 0$.

Câu 56. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 9(y^2 - 3y + 3) = 0 \\ y^3 - 9(z^2 - 3z + 3) = 0 \\ z^3 - 9(x^2 - 3x + 3) = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Ta có $t^2 - 3t + 3 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, từ đây suy ra để hệ có nghiệm thì $x, y, z \geq \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

Cộng 3 vế của hệ phương trình cho nhau ta được $(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 0(*)$

Viết lại hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 27 = 9y(y-3) \\ y^3 - 27 = 9z(z-3) \\ z^3 - 27 = 9x(x-3) \end{cases}$$

- Nếu $0 < x < 3 \Rightarrow x^3 < 27 \Rightarrow 0 < y < 3; 0 < z < 3$, điều này mâu thuẫn với (*).
- Nếu $x > 3 \Rightarrow x^3 > 27 \Rightarrow y > 3; z > 3$, điều này mâu thuẫn với (*).

Tóm lại $x = y = z = 3$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = 3$.

Câu 57. Lời giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^5 - x^4 + 2x^2y = 2 \\ y^5 - y^4 + 2y^2z = 2 \\ z^5 - z^4 + 2z^2x = 2 \end{cases}$$

Lời giải

Ta dễ dàng nhận thấy $(1;1;1)$ là một nghiệm của hệ, bây giờ ta sẽ đi chứng minh nó là nghiệm duy nhất. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \min\{x; y; z\}$.

- Nếu $x > 1 \Rightarrow 2 = z^5 - z^4 + 2z^2x > z^5 - z^4 + 2z^2 \Rightarrow z^5 - z^4 + 2z^2 - 2 < 0$.
 $\Leftrightarrow (z-1)(z^4 + 2z + 2) < 0 \Leftrightarrow z < 1$ (do $z^4 + 2z + 2 = (z^2 - 1)^2 + 2(z^2 + z + 1) > 0$).

Từ phương trình thứ hai trong hệ, ta có $2 = y^5 - y^4 + 2y^2z < y^5 - y^4 + 2y^2$.

$$\Rightarrow y^5 - y^4 + 2y^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^4 + 2y + 2) > 0 \Leftrightarrow y > 1.$$

Từ phương trình thứ nhất trong hệ, ta có $2 = x^5 - x^4 + 2x^2y > x^5 - x^4 + 2x^2$.

$$\Rightarrow x^5 - x^4 + 2x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^4 + 2x + 2) < 0 \Leftrightarrow x < 1, \text{ điều này mâu thuẫn.}$$

- Nếu $x < 1$, lập luận tương tự ta thấy mâu thuẫn.

Vậy $(1;1;1)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình!

Nhận xét. Trong ví dụ này, chúng ta nhầm được nghiệm của hệ phương trình đã cho và sử dụng cách đánh giá để chỉ ra nghiệm đó là duy nhất. Đối với các hệ phương trình mà ta nhầm được hai nghiệm thì cách đánh giá này không có hiệu quả. Cách làm này chỉ áp dụng được cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất mà thôi.

Câu 58. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 = y(1+x^2) \\ 2y^2 = z(1+y^2) \\ 2z^2 = x(1+z^2) \end{cases}$$

Vô địch Bulgaria, 1977

Giải

Nếu $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ thì $x, y, z \geq 0$.

Để thấy $(0; 0; 0)$ là một nghiệm của hệ. Ta có $x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0, z \neq 0$ do đó ta xét trường hợp $x, y, z > 0$.

Nhân vế theo vế các phương trình trong hệ ta được

$$8x^2y^2z^2 = xyz(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \Leftrightarrow 8xyz = (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$1+x^2 \geq 2x; 1+y^2 \geq 2y; 1+z^2 \geq 2z \Rightarrow (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \geq 8xyz.$$

Vì thế $8xyz = (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x^2 = 2x \\ 1+y^2 = 2y \\ 1+z^2 = 2z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là $(0; 0; 0), (1; 1; 1)$.

Nhận xét. Ngoài cách này ra ta cũng có thể biến đổi hệ phương trình như sau

$$\begin{cases} \frac{2}{y} = \frac{1}{x^2} + 1 \\ \frac{2}{z} = \frac{1}{y^2} + 1 \\ \frac{2}{x} = \frac{1}{z^2} + 1 \end{cases}$$

Cộng vế với vế ta được $\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Câu 59. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x = y(1+x^2) \\ 2y = z(1+y^2) \\ 2z = x(1+z^2) \end{cases}$$

Giải

Để thấy $(0; 0; 0)$ là một nghiệm của hệ. Ta có $x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0, z \neq 0$ do đó ta xét trường hợp $x, y, z \neq 0$.

Hệ đã cho viết lại thành
$$\begin{cases} y = \frac{2x}{1+x^2} \\ z = \frac{2y}{1+y^2} \\ x = \frac{2z}{1+z^2} \end{cases}$$
. Từ phương trình ta dễ dàng suy ra x, y, z cùng dấu.

Với mọi số thực t thì ta luôn có $-1 \leq \frac{2t}{1+t^2} \leq 1$, từ đây suy ra $-1 \leq x, y, z \leq 1$.

Nhân vế theo vế các phương trình trong hệ ta được

$$xyz(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) = 8xyz \Leftrightarrow (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) = 8$$

Vì $-1 \leq x, y, z \leq 1$ nên $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \leq 8$.

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Do vậy $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)=8 \Leftrightarrow x^2=y^2=z^2=1$

Do x, y, z cùng dấu nên nghiệm của hệ là $(1;1;1), (-1;-1;-1)$.

Câu 60. Chứng minh rằng hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 = y^3 + y^2 + y + a \\ y^2 = z^3 + z^2 + z + a \\ z^2 = x^3 + x^2 + x + a \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất ?

Giải

Hệ phương trình xác định với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$

Xét hai hàm số $f(t)=t^2$ và $g(t)=t^3+t^2+t+a$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=2t$ và $g'(t)=3t^2+2t+1>0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ còn hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Hệ đã cho tương đương
$$\begin{cases} f(x)=g(y) \\ f(y)=g(z) \\ f(z)=g(x) \end{cases}$$

Giả sử $x = \min\{x; y; z\}$

• Trường hợp 1. $x \geq 0$

Do $x \geq 0$ nên $y \geq 0; z \geq 0$. Trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ hai hàm số $f(t), g(t)$ cùng đồng biến nên

lập luận tương tự như bài toán 1, ta có $x=y=z$. Khi đó hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} x=y=z \geq 0 \\ x^3+x+a=0 \end{cases}$$

- Nếu $a > 0$ thì phương trình $x^3+x+a=0$ không có nghiệm $x \geq 0$ nên hệ vô nghiệm.
- Nếu $a \leq 0$ thì hàm số $h(x)=x^3+x+a$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có $h(0)=a \leq 0$ nên $h(0) < h(x)$ với mọi $x < 0$. Hơn nữa $h(x)=0$ là phương trình bậc ba nên phương trình $h(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x \geq 0$. Vậy trong trường hợp này hệ có nghiệm duy nhất $x=y=z=t_0$ trong đó t_0 là nghiệm của phương trình $t^3+t+a=0$

• Trường hợp 2. $x < 0$

Ta có $x < 0 \Rightarrow g(x) < g(0)=a \Rightarrow f(z) < a \Leftrightarrow z^2 < a$

- Nếu $a \leq 0$ thì điều kiện $z^2 < a$ là vô lý nên trong trường hợp này hệ vô nghiệm.
- Nếu $a > 0$ thì từ điều kiện $z^2 < a \Rightarrow -\sqrt{a} < z < \sqrt{a}$.

Giả sử $0 \leq z < \sqrt{a}$ khi đó $y^2 = g(z) \geq g(0)=a \Rightarrow y < -\sqrt{a}, y > \sqrt{a}$

- Nếu $y > \sqrt{a}$ thì $x^2 = g(y) > g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}(\sqrt{a}+1)^2 \Rightarrow x < -(\sqrt{a}+1)\sqrt{a} < -\sqrt{a}$
 $\Rightarrow z^2 = g(x) < g(-\sqrt{a}) = -\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)^2 < 0$ (vô lý).

Vậy $y < -\sqrt{a}$.

- Nếu $y < -\sqrt{a}$ thì $x^2 = g(y) < g(-\sqrt{a}) = -\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)^2 < 0$ (vô lý).

Vậy không thể xảy ra trường hợp $0 \leq z < \sqrt{a}$. Do đó chỉ xảy ra trường hợp $0 \leq z < \sqrt{a}$

Với $z < 0$ thì $y^2 = g(z) < g(0)=a \Rightarrow -\sqrt{a} < y < \sqrt{a}$.

Nếu $0 \leq y < \sqrt{a}$ thì

$x^2 = g(y) > g(0)=a \Rightarrow x < -\sqrt{a} \Rightarrow z^2 < g(-\sqrt{a}) = -\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)^2 < 0$, vô lý.

Vậy $y < 0$. Do đó trong trường hợp này ta có $x < 0; y < 0; z < 0$.

Xét trên khoảng $(-\infty; 0)$ thì hàm số $f(t)$ nghịch biến còn hàm số $g(t)$ đồng biến nên lập luận tương tự như bài toán 2, ta có $x = y = z$.

Do đó hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} x = y = z < 0 \\ x^3 + x + a = 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + x + a$ trên $(-\infty; 0)$. Ta có $h'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ với mọi x nên hàm số $h(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. Vì vậy phương trình $h(x) = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm. Lại do $h(0) = a > 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ nên phương trình $h(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; 0)$ hay trong trường hợp này hệ có nghiệm duy nhất. Vậy với mọi giá trị của tham số a thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 61. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (b+c+d)^{2010} = 3a \\ (a+c+d)^{2010} = 3b \\ (a+b+d)^{2010} = 3c \\ (a+b+c)^{2010} = 3d \end{cases}$$

Baltic Way 2010

Giải

Nếu $(a; b; c; d)$ là nghiệm của hệ phương trình thì không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $a \leq b \leq c \leq d$.

Khi đó ta có $b + c + d \geq a + c + d \geq a + b + d \geq a + b + c$.

Ta thấy rằng x^{2010} tăng khi $x > 0$. Do đó ta có

$$3a = (b+c+d)^{2010} \geq (a+c+d)^{2010} \geq (a+b+d)^{2010} \geq (a+b+c)^{2010} = 3d$$

Vậy ta được $a = b = d = c$, khi đó thế vào hệ ta được $(3a)^{2010} = 3a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Vậy hệ có nghiệm $a = b = c = d = 0, a = b = c = d = \frac{1}{3}$.

Câu 62. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc = 1 \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc = 1 \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc = 1 \end{cases}$$

Baltic Way 2002

Giải

Đặt vế trái của 3 phương trình trong hệ lần lượt là A, B, C .

Ta có nhận xét sau
$$\begin{cases} -A + B + C = (-a+b+c)^3 \\ A - B + C = (a-b+c)^3 \\ A + B - C = (a+b-c)^3 \end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} (-a+b+c)^3 = 1 \\ (a-b+c)^3 = 1 \\ (a+b-c)^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Vậy $(1; 1; 1)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Câu 63. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_2^2 + x_1x_2 + x_1^4 = 1 \\ x_3^2 + x_2x_3 + x_2^4 = 1 \\ x_4^2 + x_3x_4 + x_3^4 = 1 \\ \dots \\ x_{1999}^2 + x_{1998}x_{1999} + x_{1998}^4 = 1 \\ x_1^2 + x_{1999}x_1 + x_1^4 = 1 \end{cases}$$

Giải

Đặt $k = \sqrt{\sqrt{2}-1}$, từ đây suy ra k thỏa mãn $k^4 + 2k^2 = 1$, vậy $x_i = k$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho. Ta sẽ đi chứng minh đây là nghiệm duy nhất.

Giả sử $x_1 < k$ thì từ phương trình đầu ta suy ra $x_2 > k$, cứ như vậy đến phương trình cuối ta thu được $x_1 < k$, điều này trái với mâu thuẫn. Tương tự với $x_1 < k$ ta cũng chứng minh được điều tương tự.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x_1 = x_2 = \dots = x_{1999} = k$.

Câu 64. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = \frac{4z^2}{1+4z^2} \\ y = \frac{4x^2}{1+4x^2} \\ z = \frac{4y^2}{1+4y^2} \end{cases}$$

Giải

Phân tích. Một câu hệ phương trình ý tưởng khá là đơn giản.

Từ hệ ta suy ra được $0 \leq x, y, z < 1$. Viết lại hệ phương trình

$$\begin{cases} 4z^2 = \frac{x}{1-x} \\ 4x^2 = \frac{y}{1-y} \\ 4y^2 = \frac{z}{1-z} \end{cases}.$$

Nhân cả 2 vế của cả 3 phương trình cho nhau ta được $64(xyz)^2 = \frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)}$

Nếu một trong 3 số bằng 0 thì từ hệ ta suy ra được 2 số còn lại cũng bằng 0, vậy hệ có một nghiệm là $(0;0;0)$. Xét $xyz \neq 0$ thì ta có $xyz(1-x)(1-y)(1-z) = \frac{1}{64}$. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}, y(1-y) \leq \frac{1}{4}, z(1-z) \leq \frac{1}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$. Vậy hệ có 2 nghiệm là $(0;0;0), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Câu 65. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{xy} = \frac{x}{z} + 1 \\ \frac{1}{yz} = \frac{y}{x} + 1 \\ \frac{1}{zx} = \frac{z}{y} + 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $xyz \neq 0$.

Nhận thấy nếu một trong ba số x, y, z có một số âm, chẳng hạn $x < 0$ thì phương trình thứ ba vô nghiệm. Nếu hai trong ba số x, y, z là số âm, chẳng hạn $x, y < 0$ thì phương trình thứ hai vô nghiệm. Vậy ba số x, y, z cùng dấu.

- Xét trường hợp $x, y, z > 0$. Hệ đã cho tương đương
$$\begin{cases} z = x^2y + xyz \\ x = y^2z + yzx \\ y = z^2x + zxy \end{cases}$$

$$\text{Cộng vế theo vế ta được } x + y + z = x^2y + y^2z + z^2x + 3xyz \geq 6xyz \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác viết lại hệ đã cho dưới dạng } \begin{cases} \frac{z}{xy} = x + z \\ \frac{x}{yz} = y + x \Rightarrow \frac{z}{xy} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} = 2(x + y + z) \\ \frac{y}{zx} = y + z \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$2(x + y + z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \geq \frac{(x + y + z)^2}{3xyz} \Rightarrow 6xyz \geq x + y + z \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta suy ra } x = y = z = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Xét trường hợp $x, y, z < 0$ thì ta đặt $a = -x; b = -y; c = -z$ rồi chuyển như trường hợp đầu tiên.

$$\text{Vậy hệ của nghiệm là } (x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Câu 66. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 4x + 2 = \frac{3}{y-4} + 4\sqrt{6-2y} \\ y^3 + 4y + 2 = \frac{3}{z-4} + 4\sqrt{6-2z} \\ z^3 + 4z + 2 = \frac{3}{x-4} + 4\sqrt{6-2x} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y, z \leq 3$.

Xét các hàm số $f(t) = t^3 + 4t + 2, g(t) = \frac{3}{t-4} + 4\sqrt{6-2t}$ trên $(-\infty; 3]$.

Khi đó ta có $f'(t) = 3t^2 + 4 > 0, g'(t) = -\frac{3}{(t-4)^2} - \frac{4}{\sqrt{6-2t}} < 0, \forall t < 3$.

Mà $f(t), g(t)$ là các hàm số liên tục trên $(-\infty; 3]$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(-\infty; 3]$ và $g(t)$ nghịch biến trên $(-\infty; 3]$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \min\{x, y, z\}$. Khi đó ta có.

$$\text{Nếu } x < y \Rightarrow g(x) > g(y) \Rightarrow f(z) > f(x) \Rightarrow z > x \Rightarrow g(z) < g(x) \Rightarrow f(y) < f(z).$$

Suy ra $y < z \Rightarrow g(y) > g(z) \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow x > y$, vô lí vì $x < y$.

Do vậy $x = y$, tương tự lí luận như trên ta được $x = z$ suy ra $x = y = z$.

$$\text{Thay trở lại hệ ta được } x^3 + 4x + 2 = \frac{3}{x-4} + 4\sqrt{6-2x} \quad (1).$$

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Theo trên, bên trái là hàm đồng biến, bên phải là hàm nghịch biến, nên phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm. Mà $x=1$ là nghiệm nên nó là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $x=y=z=1$.

Câu 67. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 \\ y - \sqrt{z} = 1 \\ z - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện. $x, y, z \geq 0$. Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{y} \\ y = 1 + \sqrt{z} \\ z = 1 + \sqrt{x} \end{cases}$$

Nếu $x < y$ thì $1 + \sqrt{y} < 1 + \sqrt{z}$ hay $y < z$, do đó $1 + \sqrt{z} < 1 + \sqrt{x}$ hay $z < x$.

Vậy ta có $x < y < x$, vô lý. Tương tự, ta cũng không thể có $x > y$.

Do đó $x = y$, suy ra $1 + \sqrt{y} = 1 + \sqrt{z}$ hay $x = y = z$. Thay vào hệ ta có

$$x - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{5})^2.$$

Vậy hệ có nghiệm $x = y = z = \frac{1}{4} (1 + \sqrt{5})^2$.

Câu 68. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 - 2y = -\frac{1}{2} \\ y^4 - 2z = -\frac{1}{2} \\ z^4 - 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} x^4 = 2y - \frac{1}{2} \\ y^4 = 2z - \frac{1}{2} \\ z^4 = 2x - \frac{1}{2} \end{cases}$$
. Từ đó ta nhận thấy $x, y, z \geq 0$.

Nếu $0 < x < y$ thì $z^4 < x^4$ nên $z < x$ (do cả hai số đều dương). Ngoài ra $x^4 < y^4 \Leftrightarrow y < z$.

Do đó $x < y < z < x$, vô lý. Chứng minh tương tự ta cũng có x không thể lớn hơn y .

Vậy $x = y = z$. Thay vào phương trình đầu ta có.

$$x^4 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ x^2 + \sqrt{2}x + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x = y = z = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2} \dots$

Câu 69. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^2 - y = \frac{1}{3} \\ y^3 - z^2 - z = \frac{1}{3} \\ z^3 - x^2 - x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Giải

Ta có. $x^3 = y^2 + y + \frac{1}{3} = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} > 0$, nên $x, y, z > 0$.

Nếu $x > y$ thì $x^3 > y^3 \Rightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} > \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \Rightarrow y > z$.

Từ đó cũng làm tương tự trên ta có $z > x$, do đó $x > y > z > x$, vô lý.

Chứng minh một cách tương tự, ta không thể có $x < y$. Vì vậy $x = y = z$, thay vào phương trình ta có.

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 3x = 1 \Leftrightarrow 4x^3 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^3 - (x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{4x} = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}. \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$.

Nhìn chung phương pháp giải của loại hệ phương trình này không khó.

Câu 70. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - \frac{1}{y} = 1 \\ y - \frac{1}{z} = 1 \\ z - \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

Giải

Cũng với phương pháp trên, giả sử $x > y$. Ta viết lại hệ như sau
$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{y} \\ y = 1 + \frac{1}{z} \\ z = 1 + \frac{1}{x} \end{cases}$$

- Vì $x > y$ nên $\frac{1}{y} > \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{y} > 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x > z$.
- Vì $x > y$ nên $1 + \frac{1}{y} > 1 + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{z} \Leftrightarrow y < z$.
- Vì $y < z$ nên $1 + \frac{1}{z} < 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{z} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow z > x$.

Từ đó ta thấy mâu thuẫn. Tiếp tục chứng minh tương tự, ta suy ra được $x = y = z$.

Câu 71. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)^2 = 2z - z^2 & (1) \\ (y-z)^2 = 2x - x^2 & (2) \\ (z-x)^2 = 2y - y^2 & (3) \end{cases}$$

Giải

Lấy (1) trừ (2) ta có

$$(x-2y+z)(x-z) = x^2 - z^2 - 2(x-z) = (x-z)(x+z-2) \Leftrightarrow 2(x-z)(y-1) = 0 \Leftrightarrow x = z$$

- Với $y = 1$ ta có (3) $\Leftrightarrow (x-z)^2 = 1 \Leftrightarrow z = x+1, z = x-1$
- Với $z = x+1$, giải được $x = 0, z = 1$ và $x = 1, z = 2$. Khi đó ta có nghiệm $(0, 1, 1), (1, 1, 2)$.
- Với $x = z$, từ (3) ta có $y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0, y = 2$. Khi đó $\begin{cases} x^2 = 2z - z^2 \\ z^2 = 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z^2 = 2z \\ x - z \end{cases}$

Giải được nghiệm $(0, 0, 0)$ và $(1, 0, 1)$.

- Với $y = 2$, Giải ra được nghiệm $(1, 2, 1)$ và $(2, 2, 2)$.

Vậy hệ phương trình có 8 nghiệm.

Câu 72. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 1 - x_1 x_2 = 0 \\ 1 - x_1 x_3 = 0 \\ \dots \\ 1 - x_{n-1} x_n = 0 \\ 1 - x_n x_1 = 0 \end{cases}; x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Giải

Dễ thấy các ẩn $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 0$.

Từ phương trình thứ nhất và thứ hai ta được $x_1 = x_3$.

Từ phương trình thứ ba và thứ tư được $x_3 = x_5 \dots$

Bây giờ nếu n lẻ thì theo cách suy luận này ta được $x_1 = x_3 = x_5 = \dots = x_{n-2} = x_n$.

Tương tự ta cũng có $x_1 = x_4 = \dots = x_{n-1}$.

Từ phương trình cuối cùng ta được $x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$.

Thay giá trị này vào phương trình thứ nhất ta được $x_2 = \pm 1$.

Đối với n lẻ ta có $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \pm 1$. Thử lại thấy đúng.

Đối với n chẵn, tương tự như trên ta được $x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1}; x_2 = x_4 = \dots = x_n$.

Từ phương trình đầu tiên ta có $x_2 = \frac{1}{x_1}$.

Giả sử $x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1} = a \Rightarrow x_2 = x_4 = \dots = x_n = \frac{1}{a} (a \neq 0)$.

Câu 73. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_2 x_4 + x_3 = 2 \\ x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_3 x_4 + x_2 = 2 \\ x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 + x_1 = 2 \end{cases}, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Giải

Trừ theo từng về từng đôi một các phương trình của hệ đã cho, ta được

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)(x_3 + x_4 - 1) = 0 \\ (x_1 - x_3)(x_2 + x_4 - 1) = 0 \\ (x_1 - x_4)(x_2 + x_3 - 1) = 0 \\ (x_2 - x_3)(x_1 + x_4 - 1) = 0 \\ (x_2 - x_4)(x_1 + x_3 - 1) = 0 \\ (x_3 - x_4)(x_1 + x_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta xét 4 trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$
- **Trường hợp 2.** $x_1 = x_2 = x_3 \neq x_4$
- **Trường hợp 3.** $x_1 = x_2 \neq x_3$ và $x_1 \neq x_4$
- **Trường hợp 4.** $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$)

Câu 74. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \dots \\ x_{98} + x_{99} + x_{100} = 0 \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \\ x_{100} + x_2 + x_1 = 0 \end{cases}, x_1, x_2, \dots, x_{100} \in \mathbb{R}$$

Giải

Cộng theo vế của phương trình ta thu được $x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = 0$

Ta viết lại phương trình ở dạng sau

$$(x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6) + \dots + (x_{97} + x_{98} + x_{99}) + x_{100} = 0$$

Theo đề mỗi tổng trong ngoặc đơn bằng 0 nên $x_{100} = 0$

Làm tương tự như trên, cuối cùng ta thu được $x_1 = x_2 = \dots = x_{100} = 0$.

Câu 75. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x(y^2 + 1) = y(y^2 + 9) \\ 2y(z^2 + 1) = z(z^2 + 9) \\ 2z(x^2 + 1) = x(x^2 + 9) \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x = \frac{y(y^2 + 9)}{2(y^2 + 1)} \\ y = \frac{z(z^2 + 9)}{2(z^2 + 1)} \\ z = \frac{x(x^2 + 9)}{2(x^2 + 1)} \end{cases}.$$

Đặt $f(t) = \frac{t(t^2 + 9)}{2(t^2 + 1)}$; $t \in \mathbb{R}$. Giả sử $x = \max\{x, y, z\}$ tức là $x \geq y; x \geq z$.

Ta có $x \geq y \Leftrightarrow f(y) \geq f(z) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (y - z)[(yz - 3)^2 + (y - z)^2] \geq 0 \Leftrightarrow y \geq z \Leftrightarrow f(z) \geq f(x)$

Lập luận tương tự ta được $z \geq x$.

Vậy $x = y = z$. Đến đây thế vào một phương trình trong hệ ta dễ dàng giải được hệ.

Câu 76. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + (3-z)^2} + \sqrt{y^2 + z^2 + (3-x)^2} = 2\sqrt{6} \\ \sqrt{y^2 + z^2 + (3-x)^2} + \sqrt{z^2 + x^2 + (3-y)^2} = 2\sqrt{6} \\ \sqrt{z^2 + x^2 + (3-y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (3-z)^2} = 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Giải

Cộng theo vế ba phương trình của hệ ta được

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (3-z)^2} + \sqrt{y^2 + z^2 + (3-x)^2} + \sqrt{z^2 + x^2 + (3-y)^2} = 3\sqrt{6}$$

Xét 3 véc tơ $\vec{u} = (x; y; 3-z)$, $\vec{v} = (y; z; 3-x)$; $\vec{w} = (z; x; 3-y)$

Ta có $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$, áp dụng ta được

$$\begin{aligned} |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + (3-z)^2} + \sqrt{y^2 + z^2 + (3-x)^2} + \sqrt{z^2 + x^2 + (3-y)^2} \\ &\geq \sqrt{(x+y+z)^2 + (x+y+z)^2 + (9-x-y-z)^2} = \sqrt{3(x+y+z-3)^2 + 54} \geq 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x:y:z=y:z:x=(3-z):(3-x):(3-y) \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (1; 1; 1)$

Câu 77. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1^2 = x_2 + 1 \\ x_2^2 = x_3 + 1 \\ \dots \\ x_{n-1}^2 = x_n + 1 \\ x_n^2 = x_1 + 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (*)

Thế thì $x_n^2 = x_1 + 1 = \max\{x_1 + 1, x_2 + 1, \dots, x_n + 1\} = \max\{x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2\}$

$$\Rightarrow |x_n| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \quad (**)$$

Từ (*), (**) suy ra $x_n \leq 0$

- Nếu $x_1 > 0$ thì $x_n^2 = x_1 + 1 > 1$. Vì $x_n < 0 \Rightarrow x_n < -1$, vô lý vì $x_{n-1}^2 = x_n + 1 < 0$

Vậy $x_1 \leq 0 \Rightarrow x_i \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$.

Từ (**) suy ra $x_n = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Vì $x_i \leq x_1 \leq 0, \forall i$ nên $|x_1| = \min\{|x_i|\}$ hay $x_1^2 = \min\{x_i^2\}$.

Vậy $x_2 = x_1^2 - 1 = \min\{x_i^2 - 1\} = \min\{x_i\} = x_n$. Từ $x_2^2 = x_3 + 1$ và $x_n^2 = x_1 + 1$ suy ra $x_1 = x_3$.

Cứ tiếp tục như vậy ta có
$$\begin{cases} x_1 = x_3 = \dots = \max\{x_i\} \\ x_2 = x_4 = \dots = \min\{x_i\} = x_n \end{cases}$$

- Với n lẻ ta có $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Từ hệ ta có $x_1^2 - x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Do đó hệ phương trình có nghiệm là $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

- Với n chẵn. Từ $x_2^2 = x_3 + 1, x_1^2 = x_2 + 1$ và $x_1 = x_3$ ta có $(x_1^2 - 1)^2 = x_1 + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = -1 \\ x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \dots; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right), (-1; 0; -1; 0; \dots; -1; 0), (0; -1; 0; -1; \dots; 0; -1).$$

Câu 78. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x(y^2 + a^2) = y(y^2 + 9a^2) \\ 2y(z^2 + a^2) = z(z^2 + 9a^2) \\ 2z(x^2 + a^2) = x(x^2 + 9a^2) \end{cases} \quad (1)$$
 theo tham số a .

Giải

Khi $a = 0$, hệ (1) trở thành
$$\begin{cases} 2xy^2 = y^3 \\ 2yz^2 = z^3 \\ 2zx^2 = x^3 \end{cases} \Rightarrow 8x^3y^3z^3 = x^3y^3z^3.$$

Suy ra $xyz = 0$. Vậy (1) $\Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Từ đây về sau ta xét $a \neq 0$. Xét hàm số $f(x) = \frac{x(x^2 + 9a^2)}{2(x^2 + a^2)}, \forall x \in \mathbb{R}$

Khi đó $f(x) - x = \frac{x(x^2 + 9a^2)}{2(x^2 + a^2)} - x = \frac{-x^3 + 7a^2x}{2(x^2 + a^2)}; f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm a\sqrt{7} \end{cases}.$

Ta có $f'(x) = \frac{(x^2 - 3a^2)^2}{2(x^2 + a^2)^2} \geq 0; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}a \\ x = -\sqrt{3}a \end{cases}.$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lập luận hoàn toàn tương tự như cách 2 ở mục phương pháp giải, ta được

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x = \pm a\sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x = y = z = a\sqrt{7} \\ x = y = z = -a\sqrt{7} \end{cases}$$

Kết luận.

- Khi $a = 0$ hệ (1) có nghiệm duy nhất là $(0; 0; 0)$.
- Khi $a \neq 0$, hệ (1) có ba nghiệm là $(0; 0; 0), (a\sqrt{7}; a\sqrt{7}; a\sqrt{7}), (-a\sqrt{7}; -a\sqrt{7}; -a\sqrt{7})$.

Câu 79. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(3y^2 + 1) = 2(y - y^3) \\ y(3z^2 + 1) = 2(z - z^3) \\ z(3x^2 + 1) = 2(x - x^3) \end{cases}$$

Giải

Hướng dẫn. Hệ viết lại
$$\begin{cases} x = f(y) - y \\ y = f(z) - z \\ z = f(x) - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = f(y) \\ y + z = f(z) \\ z + x = f(x) \end{cases}$$

Với $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$ là hàm đồng biến. Giả sử $x = \max\{x, y, z\}$, thế thì $x \geq y \geq z$ hoặc $x \geq z \geq y$.

Xét trường hợp $x \geq y \geq z$ (trường hợp $x \geq z \geq y$ tương tự và các nghiệm trùng với các trường hợp đã xét). Khi đó $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow x + z \geq x + y \Rightarrow z \geq y$. Vậy $y = z$, suy ra $f(y) = f(z)$ hay $x = z$.

Thay $x = y = z$ vào hệ phương trình ta có

$$x(3x^2 + 1) = 2(x - x^3) \Leftrightarrow 5x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \pm \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm là $(0; 0; 0), \left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

Câu 80. Giải hệ phương trình	$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5 \end{cases}$ trong đó $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ và y là tham số.
IMO Problem 1963	

Giải

Cộng cả 5 phương trình của hệ đã cho ta được

$$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = y(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \quad (1)$$

Đẳng thức này chỉ đúng trong hai trường hợp

- **Trường hợp 1.** Nếu $y = 2$ khi đó hệ đã cho có thể viết dưới dạng

$$\begin{cases} x_5 - x_1 = x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 = x_2 - x_3 \\ x_2 - x_3 = x_3 - x_4 \\ x_3 - x_4 = x_4 - x_5 \\ x_4 - x_5 = x_5 - x_1 \end{cases}$$

Đặt $x_5 - x_1 = t$. Thế thì

$$\begin{cases} x_5 = x_1 + t \\ x_4 = (x_4 - x_5) + x_5 = x_1 + 2t \\ x_3 = (x_3 - x_4) + x_4 = x_1 + 3t \\ x_2 = (x_2 - x_3) + x_3 = x_1 + 4t \\ x_1 = (x_1 - x_2) + x_2 = x_1 + 5t \end{cases}$$

Từ đây suy ra $t = 0$ và $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = k$

Nếu $y \neq 2$, thì theo (1) ta phải có $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ (2)

Từ đẳng thức này và từ các phương trình của hệ đã cho, ta suy ra

$$\begin{aligned} y^2 x_1 &= y \cdot yx_1 = y(x_2 + x_5) = yx_2 + yx_5 = (x_1 + x_3) + (x_4 + x_1) \\ &= x_1 + (x_1 + x_3 + x_4) = x_1 - (x_2 + x_5) = x_1 - yx_1 \end{aligned}$$

Hay $(y^2 + y - 1)x_1 = 0$. Tương tự, ta cũng có $(y^2 + y - 1)x_i = 0$ ($1 \leq i \leq 5$)

Thành thử đến đây ta lại xét 2 trường hợp

+ Nếu $y^2 + y - 1 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$

+ Nếu $y^2 + y - 1 = 0 \left(y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$, thì từ phương trình thứ 2 của hệ suy ra

$$x_3 = -x_1 + yx_2 \quad (3)$$

Cộng 2 phương trình đầu của hệ ta được

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = y(x_1 + x_2), \text{ hay, do (2): } x_4 = -y(x_1 + x_2) \quad (4)$$

Hơn nữa ta có thể viết phương trình đầu của hệ dưới dạng $x_5 = yx_1 - x_2 \quad (5)$

Ta hãy chứng tỏ rằng trong trường hợp này, nghiệm của hệ phương trình là. x_1, x_2 tùy ý, còn x_3, x_4, x_5 được xác định lần lượt bởi các công thức (3), (4), (5) nghiệm ấy thoả mãn điều kiện (2). Quả vậy.

1. Phương trình đầu được nghiệm đúng do (5).
2. Phương trình thứ hai cũng được nghiệm đúng do có (3).
3. Do (3), (4), cùng với giả thiết $y^2 + y - 1 = 0$, ta có

$$x_2 + x_4 = x_2 - y(x_1 + x_2) = -yx_1 - (y-1)x_2 = -yx_1 + y^2x_2 = y(-x_1 + yx_2) = yx_3$$

4. Vậy phương trình thứ ba được nghiệm đúng.

Do (3), (4), (5) cùng với giả thiết $y^2 + y - 1 = 0$, ta có

$$x_3 + x_5 = (-x_1 + yx_2) + (yx_1 - x_2) = (y-1)(x_1 + x_2) = y^2(x_1 + x_2) = yx_4$$

Vậy phương trình thứ tư được nghiệm đúng.

5. Do (4), (5), cùng với giả thiết $y^2 + y - 1 = 0$, ta có

$$x_4 + x_1 = -y(x_1 + x_2) + x_1 = (1-y)x_1 - yx_2 = y^2x_1 - yx_2 = y(yx_1 - x_2) = yx_5$$

Vậy phương trình thứ năm được nghiệm đúng.

Cuối cùng, từ (3), (4), (5) ta thấy rằng

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 + x_2 + (-x_1 + yx_2) - y(x_1 + x_2) + (yx_1 - x_2) = 0$$

Tóm lại, các kết quả tìm được như sau

- Nếu $y \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ và $y \neq 2$ thì hệ phương trình có nghiệm
- Nếu $y = 2$ thì hệ phương trình có nghiệm $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ (số tùy ý)
- Nếu $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm x_1 tùy ý, x_2 tùy ý

$$x_3 = -x_1 + yx_2, x_4 = -y(x_1 + x_2), x_5 = yx_1 - x_2$$

Cần để ý rằng các trường hợp này vì các điều kiện của đầu bài sẽ không đổi nếu ta hoán vị vòng quanh các chỉ số của các ẩn, nên cũng có thể thực hiện phép hoán vị ấy đối với biểu thức của nghiệm. Chẳng hạn x_4 tùy ý, x_5 tùy ý

$$x_1 = -x_4 + yx_5, x_2 = -y(x_4 + x_5), x_3 = yx_4 - x_5$$

Câu 81. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

Với các hệ số thoả mãn các điều kiện sau đây

1. a_{11}, a_{22}, a_{33} dương
2. Tất cả các hệ số còn lại đều âm
3. Trong mỗi phương trình, tổng các hệ số đều là dương

Giải

Giả sử (x_1, x_2, x_3) là một nghiệm của hệ phương trình đã cho

Từ điều kiện của bài toán, ta thấy nếu cần thì phải thay đổi cách đánh số các x_1, x_2, x_3 , nên có thể giả thiết rằng $|x_1| \geq |x_2|$ và $|x_1| \geq |x_3|$

Phương trình thứ nhất của hệ có thể viết dưới dạng $a_{11}x_1 = -a_{12}x_2 - a_{13}x_3$

Do đó $|a_{11}x_1| = |a_{12}x_2 + a_{13}x_3| \leq |a_{12}x_2| + |a_{13}x_3|$

Vì $a_{11} > 0, a_{12} < 0, a_{13} < 0$, nên ta có $a_{11}|x_1| \leq -a_{12}|x_2| - a_{13}|x_3| \leq -a_{12}|x_1| - a_{13}|x_1|$

Hay $(a_{11} + a_{12} + a_{13})|x_1| \leq 0$

Nhưng $a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$, vậy $|x_1| = 0$, và do đó $|x_2| = 0, |x_3| = 0$

Tức là $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Câu 82. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_3x_4 = 2 \\ x_2 + x_1x_3x_4 = 2 \\ x_3 + x_1x_2x_4 = 2 \\ x_4 + x_1x_2x_3 = 2 \end{cases} \quad (1)$$

IMO Problem 1965

Giải

Để ý rằng nếu $x_1 = 0$ thì ta sẽ có $x_2x_3x_4 = 2, x_2 = x_3 = x_4 = 2$. Điều này vô lý.

Vì vậy $x_1 \neq 0$, và vì vai trò của x_1, x_2, x_3, x_4 là như nhau, nên ta cũng có $x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, x_4 \neq 0$. Thành thử nhân phương trình thứ i ($i = 1, 2, 3, 4$) của hệ (1) với x_i , thì ta được hệ tương đương

$$x_i^2 + x_1x_2x_3x_4 = 2x_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Đặt $p = x_1x_2x_3x_4$, thì rõ ràng mỗi x_i là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 2x + p = 0$.

Như vậy mỗi x_i chỉ có thể lấy một trong hai giá trị $1 \pm \sqrt{1-p}$.

Do đó, chỉ có thể xảy ra một trong 3 trường hợp sau đây

- **Trường hợp 1.** Cả 4 số x_i đều bằng nhau, tức là $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = t$.

Khi đó hệ phương trình (1) thu về một phương trình

$$t^3 + t - 2 = 0 \text{ hay } (t-1)(t^2 + t + 2) = 0$$

Vì $t^2 + t + 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$, nên ta phải có $t = 1$, tức là $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

- **Trường hợp 2.** Trong 4 số x_i , chỉ có 3 số bằng nhau.

Khi đó, có thể giả thiết $x_1 = x_2 = x_3 = t \neq x_4$. Hệ phương trình (1) trở thành

$$\begin{cases} t + t^2x_4 = 2 \\ t^3 + x_4 = 2 \end{cases} \quad (2)$$

Lấy $PT(1) - PT(2)$ ta được $(t - t^3) + (t^2 - 1)x_4 = 0$ hay $(t^2 - 1)(x_4 - t) = 0$.

Vì $x_4 \neq t$ nên ta phải có $t^2 = 1$. Do đó

- Hoặc $t = 1$ từ phương trình 2 của hệ (2) ta suy ra $x_4 = 1$.

Nhưng điều này mâu thuẫn với giả thiết $t \neq x_4$

- Hoặc $t = -1$ từ phương trình 2 của hệ (2) ta suy ra $x_4 = 3$.

Vai trò của 4 số x_i là như nhau, nên trường hợp này ra đi đến kết luận trong 4 số x_i ($i = 1, 2, 3, 4$), 3 số bằng -1 số còn lại bằng 3

Bốn số x_i lập thành hai cặp số bằng nhau tức là chẳng hạn $x_1 = x_2 = t \neq x_3 = x_4 = u$.

Khi đó (1) trở thành
$$\begin{cases} t + tu^2 = 2 \\ u + ut^2 = 2 \end{cases} \quad (3)$$

Lấy phương trình thứ nhất trừ cho phương trình thứ hai, ta đi đến $(t - u)(1 - tu) = 0$.

Vì $t \neq u$, nên $tu = 1$. Đồng thời trong hệ (3) ta cũng có $(t + u)(1 + tu) = 4$. Và vì $tu = 1$, nên $t + u = 2$.

Như vậy t và u là các nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 - 2z + 1 = 0$, phương trình này chỉ có nghiệm $z = 1$, tức là $t = u = 1$. Nhưng điều này mâu thuẫn với giả thiết $t \neq u$. Tổng kết lại các trường hợp đã xét, ta đi đến kết luận hệ (1) có các nghiệm sau đây

1. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$
2. 3 số x_i bằng -1 , số còn lại bằng 3.

Câu 83. Cho a_1, a_2, a_3, a_4 là bốn số thực khác nhau cho trước. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1 \end{cases}$$

IMO Problem 1966

Giải

Để ý rằng nếu thay đổi vai trò của hai chỉ số thì hệ phương trình không thay đổi.

Vì vậy có thể giả thiết $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.

Khi đó hệ phương trình trở thành
$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x_2 + (a_1 - a_3)x_3 + (a_1 - a_4)x_4 = 1 \\ (a_1 - a_2)x_1 + (a_2 - a_3)x_3 + (a_2 - a_4)x_4 = 1 \\ (a_1 - a_3)x_1 + (a_2 - a_3)x_2 + (a_3 - a_4)x_4 = 1 \\ (a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1 \end{cases}$$

Biến đổi bằng cách trừ các phương trình cho nhau ta được

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2)(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4) &= 0 \\ (a_2 - a_3)(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) &= 0 \\ (a_3 - a_4)(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) &= 0 \end{aligned}$$

Thành thử hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (1) \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (3) \\ (a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1 & (4) \end{cases}$$

Cộng (1) với (3) ta được $x_1 = x_4$.

Cộng (1) với (2) ta được $x_1 = x_3 + x_4$ vậy $x_3 = 0$.

Cộng (3) với (2) ta được $x_1 + x_2 = x_4$ vậy $x_2 = 0$.

Mang các giá trị này vào (4), thì được $x_1 = x_4 = \frac{1}{a_1 - a_4}$.

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = z_1 \text{ hoặc } x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1-b}{2a}.$$

Như vậy trong trường hợp này, hệ đã cho ít nhất là hai nghiệm đã nêu.

Trường hợp $a < 0$ cũng được xét tương tự.

Câu 85. Tìm tất cả các nghiệm dương của hệ

$$\begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0 \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0 \end{cases}$$

IMO Problem 1972

Giải

Trước hết, ta có nhận xét rằng hệ đã cho không thay đổi nếu ta thực hiện một phép hoán vị vòng quanh của các số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Như vậy, nếu (a, b, c, d, e) là một nghiệm, thì chẳng hạn (b, c, d, e, a) cũng là một nghiệm. Để tìm tất cả các nghiệm của hệ, ta hãy phân loại các nghiệm theo hai loại

1. Trong nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ có ít nhất một số bằng 0.
2. Trong nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ không có số nào bằng 0.

Ta hãy xét từng trường hợp.

1. Do nhận xét đã nêu, ta hãy tìm nghiệm trong đó $x_1 = 0$.

Từ bất phương trình thứ hai và thứ tư, suy ra $x_2x_3 = x_4x_5 = 0$.

Khi đó các bất phương trình thứ nhất, thứ ba, thứ năm trở thành

$$\begin{aligned} 0 &\geq -x_3x_5(x_2^2 - x_3x_5) = -x_2^2x_3x_5 + x_3^2x_5^2 = x_3^2x_5^2 \\ 0 &\geq x_3^2x_4^2 - x_2x_3^2x_5 - x_2x_4^2x_5 + x_2^2x_5^2 = x_3^2x_4^2 + x_2^2x_5^2 \\ 0 &\geq -x_2x_4(x_5^2 - x_2x_4) = -x_2x_4x_5^2 + x_2^2x_4^2 = x_2^2x_4^2 \end{aligned}$$

Như vậy $x_2x_4 = x_2x_5 = x_3x_4 = x_3x_5 = 0$. Thành thử $x_ix_j = 0$ với $i \neq j (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi trong năm số x_i , có bốn số bằng 0, còn số kia tùy ý.

2. Trong trường hợp này, ta hãy nhận xét thêm rằng nếu $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ là một nghiệm, thì $(x_1, tx_2, tx_3, tx_4, tx_5)$ cũng là một nghiệm, với t tùy ý. Bây giờ ta hãy để ý rằng theo bất phương trình thứ nhất, tích x_3x_5 phải nằm giữa hai số dương x_1^2, x_2^2 vậy $x_3x_5 > 0$, tức là x_3, x_5 có cùng dấu. Tương tự, theo bất phương trình thứ ba, suy ra rằng x_5, x_2 có cùng dấu. Lại theo bất phương trình thứ năm, suy ra rằng x_2, x_4 có cùng dấu. Cuối cùng, theo bất phương trình thứ hai, suy ra rằng x_1, x_4 có cùng dấu. Thành thử cả 5 số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 có cùng dấu, và do nhận xét vừa nêu do trên, ta có thể giả thiết rằng $x_i > 0 (i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Để tiếp tục tìm nghiệm, ta có thể giả thiết (do nhận xét đầu tiên đã nêu) rằng x_1 là số nhỏ nhất trong các số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Từ các phương trình thứ nhất và thứ 5 suy ra

$$x_3x_5 \leq x_2^2, x_2x_4 \leq x_5^2, \text{ hay } \frac{x_3}{x_2} \leq \frac{x_2}{x_5} \leq \frac{x_5}{x_4} \quad (1)$$

Ta hãy so sánh x_2, x_5 . Hai khả năng xảy ra.

| Hệ phương trình nhiều ẩn

- Nếu $x_2 \leq x_5$. Từ (1) ta có $x_1 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_5$ (2). Từ bất phương trình thứ 2 suy ra $x_3^2 \leq x_4 x_1 \leq x_2^2$, như vậy phải có $x_1 \leq x_3 \leq x_4$. Thành thử x_1, x_3 đều nhỏ hay bằng và, do đó theo bất phương trình thứ tư, suy ra $x_1 x_3 = x_4^2$ hoặc $x_1 x_3 = x_5^2$. Do đó

- Nếu $x_1 x_3 = x_4^2$ thì $x_1 = x_3 = x_4$.

Từ phương trình thứ 3, suy ra $x_2 x_5 = x_3^2$, vậy $x_2 = x_5 = x_3$. Suy ra cả 5 số đều bằng nhau

- Nếu $x_1 x_3 = x_5^2$ thì theo (2) ta có $x_1 = x_3 = x_5 = x_2$. Từ bất phương trình thứ 5 suy ra do đó cả 5 số đều bằng nhau

- Nếu $x_5 \leq x_2$. Từ (1) suy ra $x_1 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_2$ (3).

Theo bất phương trình thứ 4, ta có $x_4^2 \leq x_1 x_3 \leq x_5^2$, như vậy ta cũng có $x_1 \leq x_4 \leq x_3$. Thành thử x_1, x_4 đều nhỏ hơn hay bằng x_2, x_3 do đó từ bất phương trình thứ 2 ta có $x_1 x_4 = x_2^2$, hoặc $x_1 x_4 = x_3^2$. Vì vậy

- Nếu $x_1 x_4 = x_2^2$, thì theo (3), ta có $x_1 = x_4 = x_5 = x_2$. Từ bất phương trình thứ tư, suy ra $x_3 = x_1$. Vậy cả 5 số x_i đều bằng nhau.

- Nếu $x_1 x_4 = x_3^2$, thì $x_1 = x_4 = x_3$. Từ bất phương trình thứ ba, suy ra $x_2 x_5 = x_4^2$.

Do đó $x_2 = x_5 = x_4$. Vậy cả 5 số x_i đều bằng nhau.

Tóm lại hệ bất phương trình đã cho có hai họ nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ như sau

- Một họ trong đó bốn số x_i bằng 0, số thứ năm là tùy ý.
- Một họ trong đó cả năm số x_i bằng nhau (bằng một số tùy ý).

Câu 86. Cho số nguyên dương n và $m = 2n$, với mọi giá trị i, j thỏa mãn điều kiện

$$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Gọi a_{ij} là các số nhận giá trị $0, 1, -1$. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

Chứng minh hệ này có 1 nghiệm $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ sao cho các thành phần $x_i, i = \overline{1, m}$ là các số nguyên không đồng thời bằng 0 và $|x_i| \leq m, i = \overline{1, m}$

IMO Problem 1976

Giải

Ta có nhận xét sau. Nếu $|x_i| \leq n, x_i$ nguyên, thì mỗi một tổ hợp tuyến tính của các x_i sẽ nhận giá trị nằm giữa $-2n^2$ và $2n^2$, nghĩa là với mọi $k = 1, 2, \dots, n$ ta có $-2n^2 \leq a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{km}x_m \leq 2n^2$, điều này có được do $m = 2n$ và $|a_{ij}| \leq 1$. Từ đó, suy ra có nhiều nhất là $(4n^2 + 1)$ các giá trị nguyên mà mỗi tổ hợp tuyến tính nói trên có thể nhận được, và nhiều nhất $(2n^2 + 1)^n$ tất cả các giá trị có thể nhận được của n tổ hợp tuyến tính đó. Mặt khác, mỗi x_i có thể có $(2n + 1)$ giá trị có thể, với $|x_i| \leq n$, do vậy có tất cả $(2n^2 + 1)^{2n} = (4n^2 + 4n + 1)^n$ các giá trị có thể có của $(x_1, x_2, \dots, x_m), (m = 2n)$.

Từ đó, suy ra rằng chắc chắn phải có hai bộ phân biệt của các $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ mà có cùng một tổ hợp tuyến tính, ta kí hiệu là $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ và $(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ khi đó

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m = a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + \dots + a_{im}x'_m$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Điều này có nghĩa rằng các số $x_i - x'_i, i = 1, 2, \dots, n$ là nghiệm nguyên của hệ, và ta có $|x_i - x'_i| \leq 2n$, ngoài ra chúng không thể đồng thời bằng không vì $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ và $(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ là hai bộ phân biệt. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 87. Với a là số thực và $|a| > 1$, giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1^2 = ax_2 + 1 \\ x_2^2 = ax_3 + 1 \\ \dots \\ x_{999}^2 = ax_{1000} + 1 \\ x_{1000}^2 = ax_1 + 1 \end{cases}.$$

Vietnam TST 1993

Giải

Ta chỉ cần xét trường hợp khi $a > 1$ (còn $a < -1$ thì đặt $a' = -a$; $x'_i = -x_i$).

Vì các vế trái của hệ không âm nên $ax_i + 1 \geq 0$. Suy ra $x_i \geq -\frac{1}{a} > -1, i = 1, 2, \dots, 1000$. Do có thể hoán vị vòng quanh cho các phương trình của hệ nên ta có thể giả sử $x_i = \max x_i$ (1)

Nếu $x_1 \geq 0$ thì $x_{1000}^2 \geq 1$ suy ra. $|x_{1000}| \geq 1$, từ đó $x_{1000} \geq 1$.

Từ đây, tiếp tục lý luận ta có $x_{999} \geq 1, \dots$ nên các nghiệm x_i hoặc cùng âm hoặc cùng lớn hơn 1.

- **Trường hợp 1.** $x_i > 1, \forall i$. Điều kiện (1) cho ta.

$$x_1 \geq x_2 \Rightarrow x_1^2 \geq x_2^2 \Rightarrow ax_2 + 1 \geq ax_3 + 1 \Rightarrow x_2 \geq x_3 \Rightarrow x_3 \geq x_4 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_{1000} \geq x_1.$$

Vậy $x_1 = x_2 = \dots = x_{1000} = t_1$ với t_1 là nghiệm > 1 của $t^2 - at - 1 = 0$ (2)

hay $t_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$

- **Trường hợp 2.** $x_i < 0, \forall i$. Ta có

$$x_1 \geq x_3 \Rightarrow x_1^2 \leq x_3^2 \Rightarrow ax_2 + 1 \leq ax_4 + 1 \Rightarrow x_2 \leq x_4 \Rightarrow x_2^2 \geq x_4^2 \Rightarrow x_3 \geq x_5 \Rightarrow x_4 \leq x_6 \Rightarrow \dots$$

Do đó

a) $x_1 \geq x_3 \geq x_5 \geq \dots \geq x_{999} \geq x_1$ nên $x_1 = x_3 = \dots = x_{999}$.

b) $x_2 \leq x_4 \leq x_6 \leq \dots \leq x_{1000} \leq x_2$ nên $x_2 = x_4 = \dots = x_{1000}$.

Hệ đã cho được rút gọn thành $\begin{cases} x_1^2 = ax_2 + 1 \\ x_2^2 = ax_1 + 1 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = -a(x_1 - x_2).$

Nếu $x_1 = x_2$ thì $x_1 = x_2 = \dots = x_{1000} = t_2$ với t_2 là nghiệm của (2), tức là $t_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$

Nếu $x_1 + x_2 = -a$ thì $x_1^2 + ax_1 + (a^2 - 1) = 0$. Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta = 4 - 3a^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Kết hợp với $a > 1$ ta được $1 < a \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lúc đó nghiệm của hệ trên là $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{4 - 3a^2}) \\ x_2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{4 - 3a^2}) \end{cases}; \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{4 - 3a^2}) \\ x_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{4 - 3a^2}) \end{cases}.$

Tóm lại

- Khi $|a| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, hệ luôn có hai nghiệm là $x_1 = x_2 = \dots = x_{1000} = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{4 - 3a^2})$.
- Khi $1 < |a| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, hệ có các nghiệm là
$$\begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_{999} = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{4 - 3a^2}) \\ x_2 = x_4 = \dots = x_{1000} = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{4 - 3a^2}) \end{cases};$$
$$\begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_{999} = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{4 - 3a^2}) \\ x_2 = x_4 = \dots = x_{1000} = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{4 - 3a^2}) \end{cases}.$$

Và hai nghiệm này trùng nhau khi $|a| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 88. Tìm nghiệm thực của hệ phương trình Ở đây $b \geq a > 0$ là các số thực.	$\begin{cases} x_1^2 + 2ax_1 + b^2 = x_2 \\ x_2^2 + 2ax_2 + b^2 = x_3 \\ \dots \\ x_{n-1}^2 + 2ax_{n-1} + b^2 = x_n \\ x_n^2 + 2ax_n + b^2 = x_1 \end{cases}$
Turkey 1995	

Giải

Đặt $y_i = x_i - a + \frac{1}{2}$, thế thì $y_i^2 + y_i - a^2 + a + b^2 - \frac{1}{4} = y_{i+1}$. Đặt $d = b^2 - a^2 + a - \frac{1}{4}$. Trước tiên, giả sử $d > 0$. Thế thì $y_{i+1} - y_i = y_i^2 + d > 0$ và vì vậy $y_1 < y_2 < \dots < y_n < y_1$, điều này mâu thuẫn. Vì vậy không có nghiệm trong trường hợp này. Bây giờ, giả sử $d \leq 0$.

Lưu ý. Trong mọi trường hợp phải có $d \geq -\frac{1}{4}$ từ $a > 0$ và $b^2 > a^2$.

Ta có hai nghiệm là $y_1 = y_2 = \dots = y_n = \pm\sqrt{-d}$; ta sẽ chứng minh rằng không có nghiệm nào khác. Như trước, ta không có nghiệm với $y_1 > \sqrt{-d}$.

Nếu $-\sqrt{-d} < y_i < \sqrt{-d}$, ta có $-\sqrt{-d} < y_{i+1} < y_i$. Bởi vì $f(x) = x^2 + x + c$ là hàm tăng với $x > -\sqrt{-d} \geq -\frac{1}{2}$.

Do đó, trong trường hợp này $y_1 > y_2 > \dots > y_n$ và ta không có nghiệm. Hơn nữa, bắt đầu với $y_1 < -\sqrt{-d}$ đây có thể tăng hoặc cuối cùng vượt quá $-\sqrt{-d}$, ở trường hợp này sẽ không giảm xuống dưới $-\sqrt{-d}$. Do đó, trường hợp này vô nghiệm. Tóm lại, ta chỉ có nghiệm khi $d \leq 0$ và trường hợp $d = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \pm\sqrt{d} + a - \frac{1}{2}$.

Câu 89. Cho $a \neq 0$. Giải hệ phương trình.	$\begin{cases} x^{2005} + y^{2005} + z^{2005} = a^{2005} \\ x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = a^{2006} \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = a^{2007} \end{cases}.$
Olympic trại hè Hùng Vương, lần thứ 3	

Giải

Trước hết ta giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^{2005} + y^{2005} + z^{2005} = 1 \\ x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = 1 \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = 1 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ dễ dàng suy ra. $x, y, z \in [-1; 1]$.

Lấy phương trình thứ hai trừ phương trình thứ ba ta thu được

$$x^{2006}(1-x) + y^{2006}(1-y) + z^{2006}(1-z) = 0$$

Dễ dàng suy ra $x, y, z \in \{0; 1\}$.

Thử lại ta được ba nghiệm của hệ ta được $(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)$.

Quay trở lại bài toán, ta đặt $x' = \frac{x}{a}; y' = \frac{y}{a}; z' = \frac{z}{a}$.

Khi đó $(x'; y'; z')$ là nghiệm của hệ phương trình trên.

Vậy nghiệm của bài toán là. $(a; 0; 0), (0; a; 0), (0; 0; a)$.

Câu 90. Cho a, b, c là các số thực dương.

Tìm tất cả các nghiệm thực $(x; y; z)$ của hệ phương trình
$$\begin{cases} ax + by = (x - y)^2 \\ by + cz = (y - z)^2 \\ cz + ax = (z - x)^2 \end{cases}$$

Balkan MO 1984

Giải

Cộng vế theo vế ba phương trình trong hệ lại với nhau ta được

$$ax + by + cz = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2].$$

Dùng đẳng thức này và các phương trình trong hệ ta được.

$$\begin{cases} ax = (x - y)(x - z) \\ by = (y - z)(y - x) \\ cz = (z - x)(z - y) \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $z \geq y \geq x$.

Vì a, b, c nên từ quan hệ thứ tự trên ta suy ra $x, z \geq 0$ và $y \leq 0$.

Ngoài ra $0 \leq x \leq y \leq 0$ thì $x = y = 0$. Thay vào phương trình cuối trong hệ ta được $z = 0$ hoặc $z = c$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(0; 0; 0)$ hoặc $(0; 0; c)$ cùng các hoán vị.

Câu 91. Tìm tất cả các bộ ba (x, y, z) nguyên thỏa hệ phương trình.
$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 16x + 60 = y \\ y^3 - 4y^2 - 16y + 60 = z \\ z^3 - 4z^2 - 16z + 60 = x \end{cases}$$

Germany Bundeswettbewerb Mathematik 2003

Giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} (x - 4)^2(x + 4) = y + 4 \\ (y - 4)^2(y + 4) = z + 4 \\ (z - 4)^2(z + 4) = x + 4 \end{cases}$$

Rõ ràng $x = y = z = -4$ là một nghiệm của hệ phương trình.

$$\text{Với } x, y, z \neq -4 \text{ ta có. } \begin{cases} (x-4)^2 = \frac{y+4}{x+4} \\ (y-4)^2 = \frac{z+4}{y+4} \\ (z-4)^2 = \frac{x+4}{z+4} \end{cases} \quad (I)$$

Nhân vế theo vế các phương trình trong hệ (I) ta được $(x-4)^2(y-4)^2(z-4)^2 = 1$.

Suy ra $(x-4)^2 = (y-4)^2 = (z-4)^2 \Rightarrow x, y, z \in \{3; 5\}$.

Vậy hệ có 3 nghiệm. $(3; 3; 3), (5; 5; 5), (-4; -4; -4)$.

Câu 92. Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2 \\ x_2^2 + x_3^2 + 50 = 16x_2 + 12x_3 \\ x_3^2 + x_4^2 + 50 = 16x_3 + 12x_4 \\ \dots \\ x_{n-1}^2 + x_n^2 + 50 = 16x_{n-1} + 12x_n \\ x_n^2 + x_1^2 + 50 = 16x_n + 12x_1 \end{cases}$$

Polish MO 1999

Giải

Đề ý rằng chúng ta có thể viết mỗi phương trình lại dưới dạng

$$(x_i - 8)^2 + (x_{i+1} - 6)^2 = 50, \text{ với } i = \overline{1, n} \text{ và } x_{n+1} = x_1.$$

Vì $50 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$ là cách duy nhất để viết 50 dưới dạng tổng của hai số chính phương nên với mọi i ta có $x_i - 8 = \pm 7, x_{i+1} - 6 = \pm 1$; $x_i - 8 = \pm 1, x_{i+1} - 6 = \pm 7$; $x_i - 8 = \pm 5, x_{i+1} - 6 = \pm 5$.

Như vậy các cặp (x_i, x_{i+1}) là

$$(15; 7), (1; 5), (15; 5), (1; 7), (9; 13), (7; -1), (9; -1), (7; 13), (13; 11), (3; 1), (13; 1), (3; 11).$$

Ta thấy (x_{i+1}, x_{i+2}) phải là một trong những cặp tốt, vì vậy $x_{i+1} = 1, 7$ với mọi i .

Mỗi x_i là 1 hoặc 7 và mỗi cặp liên tiếp phải khác biệt.

Như vậy $x_1, x_2, \dots, x_n, x_1$ phải có $1, 7, 1, 7, \dots, 7, 1$ hoặc $7, 1, 7, 1, \dots, 1, 7$.

$$\text{Câu 93. Giải hệ phương trình } \begin{cases} 36x^2y - 60x^2 + 25y = 0 \\ 36y^2z - 60y^2 + 25z = 0 \\ 36z^2x - 60z^2 + 25x = 0 \end{cases} ; x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Giải

Cách 1.

$$\text{Hệ phương trình đã cho tương đương với } \begin{cases} y(36x^2 + 25) = 60x^2 \\ z(36y^2 + 25) = 60y^2 \\ x(36z^2 + 25) = 60z^2 \end{cases}.$$

Nếu một trong các ẩn x, y, z bằng 0 thì hệ dễ suy ra các ẩn còn lại cũng bằng 0 và $(0; 0; 0)$ là một nghiệm tầm thường của hệ. Chỉ còn xét trường hợp $x, y, z \neq 0$. Nhân vế theo vế các phương trình trong hệ ta được.

$$\begin{aligned}xyz(36x^2 + 25)(36y^2 + 25)(36z^2 + 25) &= 60^3 x^2 y^2 z^2 \\ \Leftrightarrow (36x^2 + 25)(36y^2 + 25)(36z^2 + 25) &= 60^3 xyz\end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$36x^2 + 25 \geq 2\sqrt{36x^2 \cdot 25} = 60|x|;$$

$$36y^2 + 25 \geq 2\sqrt{36y^2 \cdot 25} = 60|y|;$$

$$36z^2 + 25 \geq 2\sqrt{36z^2 \cdot 25} = 60|z|;$$

Do đó $(36x^2 + 25)(36y^2 + 25)(36z^2 + 25) \geq 60^3 |xyz| \geq 60^3 xyz$.

Thành thử, với $x, y, z \neq 0$ hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} 36x^2 + 25 = 60x \\ 36y^2 + 25 = 60y \\ 36z^2 + 25 = 60z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{5}{6}.$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm là $(0; 0; 0), \left(\frac{5}{6}; \frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

Cách 2.

Đưa hệ đã cho về dạng
$$\begin{cases} y = \frac{60x^2}{36x^2 + 25} \\ z = \frac{60y^2}{36y^2 + 25} \\ x = \frac{60z^2}{36z^2 + 25} \end{cases}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{60t^2}{36t^2 + 25}, t \in [0; +\infty)$. Dễ dàng thấy được f đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Từ tính đồng biến ta suy ra được $x = y = z$.

Thay vào một trong ba phương trình của hệ ta tìm được 2 nghiệm $(0; 0; 0), \left(\frac{5}{6}; \frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

Câu 94. Giải hệ phương trình sau	$\begin{cases} 2009x + 2010y = (x - y)^2 \\ 2010y + 2011z = (y - z)^2 \\ 2011z + 2009x = (z - x)^2 \end{cases}; x, y, z \in \mathbb{R}$
THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước 2010 – 2011	

Giải

Đặt $2009 = a$, ta xét một hệ tổng quát hơn như sau

$$\begin{cases} ax + (a+1)y = (x - y)^2 \\ (a+1)y + (a+2)z = (y - z)^2 \\ (a+2)z + ax = (z - x)^2 \end{cases}$$

Ta tính được $ax = \frac{(x - y)^2 + (z - x)^2 + (y - z)^2}{2} = (x - y)(x - z)$.

Tương tự $(a+1)y = (y - z)(y - x); (a+2)z = (z - x)(z - y)$.

Suy ra $ax \cdot (a+1)y \cdot (a+2)z = -[(x - y)(y - z)(z - x)]^2 \leq 0$.

Sau khi khai triển hai vế ta sẽ được đẳng thức mà hệ số của các x_k^2 ở hai vế đều bằng nhau, trong khi đó với mọi tích $x_i x_j$ ($i \neq j$) thì các hệ số của nó ở vế phải đều lớn hơn hệ số của nó ở vế trái. Điều đó chứng tỏ rằng mọi tích $x_i x_j$ ($i \neq j$) đều bằng 0, tức là trong 5 số x_k thì chỉ có nhiều nhất một số dương.

- Nếu mọi $k, x_k = 0$ thì $a = 0$.
- Nếu $x_1 > 0$ thì hệ thức thứ nhất ở đề bài cho ta $x_1 = a$, hệ thức thứ hai cho $x_1 = a^2$. Vậy $a = 1$, các giá trị này của x_1 và a cũng thỏa mãn hệ thức thứ ba.
- Nếu $x_2 > 0$ thì hệ thức thứ nhất cho $2x_2 = a \Leftrightarrow x_2 = \frac{a}{2}$, thay vào hệ thức thứ hai ta tính được $a = 4$. Các giá trị $a = 4; x_2 = 2$ cũng thỏa mãn hệ thức thứ ba.
- Nếu $x_3 > 0$ thì hệ thức thứ nhất cho ta $3x_3 = a \Leftrightarrow x_3 = \frac{a}{3}$. Thay vào hệ thức thứ hai ta tìm được $a = 9$. Hệ thức thứ ba cũng được thỏa mãn. Tương tự nếu $x_4 > 0$ thì ta tìm được $a = 16$.
- Nếu $x_5 > 0$ thì ta tìm được $a = 25$.

Câu 97. Cho 2013 số dương $x_1, x_2, \dots, x_{2013} > 0$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq x_2 - x_1 \\ x_2^2 + x_3^2 \leq x_3 - x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_{2011}^2 + x_{2012}^2 \leq x_{2012} - x_{2011} \\ x_{2012}^2 + x_{2013}^2 \leq x_{2013} - x_{2012} \end{cases}$$

Chứng minh rằng trong 2013 số đó có hai số a, b sao cho $|a - b| \leq \frac{1}{2012}$.

Giải

Từ $x_1^2 + x_2^2 \leq x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow 0 < x_1 < x_2$. Chứng minh tương tự được $x_2 < x_3 < \dots < x_{2013}$.

Mặt khác $x_{2012}^2 + x_{2013}^2 \leq x_{2013} - x_{2012} \Rightarrow x_{2013} - x_{2012} \geq x_{2012}^2 + x_{2012} > 0 \Rightarrow 0 < x_{2013} < 1$.

Khi đó $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2013}$. Chia đoạn $[0; 1]$ thành 2012 đoạn con bằng nhau, độ dài của mỗi đoạn con là $\frac{1}{2012}$. Theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại 2 số a, b trong 2013 số đã cho thuộc về cùng một

đoạn con. Như vậy $|a - b| \leq \frac{1}{2012}$.

Câu 98. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 = \frac{8}{y} - \sqrt{5y - 1} \\ y^2 + 3y + 2 = \frac{8}{z} - \sqrt{5z - 1} \\ z^2 + 3z + 2 = \frac{8}{x} - \sqrt{5x - 1} \end{cases} ; x, y, z \in \mathbb{R}$$

Đề thi học sinh giỏi Vĩnh Phúc 2012 – 2013

Giải

Cách 1.

Điều kiện $x, y, z \geq \frac{1}{5}$.

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Xét các hàm số $f(t) = t^2 + 3t + 2$; $g(t) = \frac{8}{t} - \sqrt{5t-1}$ với $t \in \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$. Ta thấy $f(t)$ là hàm đồng biến,

$g(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$. Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z$.

Suy ra $f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow g(y) \geq g(z)$. Mà $g(y) \leq g(z)$ nên $g(y) = g(z)$. Do đó $y = z$.

Ta chứng minh tương tự được $x = y$. Như vậy $x = y = z$.

Dễ dàng tìm được nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho là $(1; 1; 1)$.

Cách 2.

Điều kiện $x, y, z \geq \frac{1}{5}$.

Xét các hàm số $f(t) = t^2 + 3t + 2$; $g(t) = \frac{8}{t} - \sqrt{5t-1}$ với $t \in \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

Ta thấy $f(t)$ là hàm đồng biến, $g(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

Như vậy, ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} f(x) = g(y) & (1) \\ f(y) = g(z) & (2) \\ f(z) = g(x) & (3) \\ f(x) + f(y) + f(z) = g(x) + g(y) + g(z) & (4) \end{cases}$$

- **Trường hợp 1.** $x = y = z = 1$ là nghiệm của hệ
- **Trường hợp 2.** $x, y, z > 1$. Từ (4) suy ra $VT(4) > 6 > VP(4)$.
Hệ phương trình vô nghiệm.
- **Trường hợp 3.** Có một biến nhỏ hơn 1, hai biến còn lại không nhỏ hơn 1.
Giả sử $x < 1, y, z \geq 1$.
Từ (2) suy ra $VT(2) > 6 > VP(2)$. Hệ phương trình vô nghiệm.
- **Trường hợp 4.** Có hai biến nhỏ hơn 1, biến còn lại không nhỏ hơn 1.
Giả sử $x, y < 1, z \geq 1$.
Từ (1) suy ra $VT(1) < 6 < VP(1)$. Hệ phương trình vô nghiệm.
- **Trường hợp 5.** $x, y, z < 1$. Từ (4) suy ra $VT(4) < 6 < VP(4)$
Hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 99. Tìm tất cả các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ $x + \frac{y}{z} = y + \frac{z}{x} = z + \frac{x}{y} = 2$.

Centro American 2011

Giải

Cách 1.

Rõ ràng $0 < x, y, z < 2$.

Bằng cách thay thế $x = \frac{z}{2-y}$; $z = \frac{2y(y-2)}{y^2-2y-1}$ ta được $(y-1)(y^3-7y^2+7y+7) = 0$.

Dựa vào điều kiện $0 < y < 2$ ta tìm được nghiệm $y = 1$.

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(1; 1; 1)$.

Cách 2.

Điều kiện $0 < x, y, z < 2$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} zx + y = 2z \\ xy + z = 2x \\ yz + x = 2y \end{cases}$$

Cộng vế theo vế từng phương trình trong hệ ta được. $xy + yz + zx = x + y + z$

Giả sử $x \geq y \geq z$. Do đó $xy \geq zx \geq yz$. Nếu $xy < z$ thì $xy + yz + zx < 3z \leq x + y + z$, do đó $xy \geq z \Rightarrow x \geq \frac{z}{y}$.

Ta có $2 = x + \frac{y}{z} \geq \frac{z}{y} + \frac{y}{z} \geq 2$.

Dấu “=” xảy ra khi $y = z$. Dễ dàng tìm được nghiệm $(1; 1; 1)$.

Cách 3.

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* và *AM-GM* ta có

$$2.2y = 2(x + yz) = \left(x + \frac{y}{z}\right)(x + yz) \geq (x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow x \leq 1.$$

Tương tự như vậy, ta chứng minh được $y, z \leq 1$. Để ý rằng $1 + \frac{y}{z} \geq x + \frac{y}{z} = 2 \Rightarrow \frac{y}{z} \geq 1 \Rightarrow y \geq z$.

Tương tự ta chứng minh được $y \geq z, z \geq x$ và $x \geq y$. Do đó $x = y = z = 1$.

Câu 100. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^5 = y + y^5 \\ y^5 = z + z^5 \\ z^5 = t + t^5 \\ t^5 = x + x^5 \end{cases}$	Baltic Way 1993
---	-------------------------------

Giải

Cộng vế theo vế của các phương trình trong hệ ta được $x + y + z + t = 0$. Giả sử rằng không phải tất cả các số đều bằng 0. Thế thì sẽ có một số khác 0, giả sử $x > 0$. Điều này sẽ kéo theo $y, z, t > 0$. Suy ra $x + y + z + t > 0$, vô lý.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(0; 0; 0; 0)$.

Câu 101. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5^x = 2y + 1 + 2\log_5(4y + 1) \\ 5^y = 2z + 1 + 2\log_5(4z + 1) \\ 5^z = 2x + 1 + 2\log_5(4x + 1) \end{cases}$	HSG lớp 12, tỉnh Hải Dương năm học 2008 – 2009
---	--

Giải

Đặt $f(t) = 2t + 1 + 2\log_5(4t + 1)$, $\left(t > -\frac{1}{4}\right)$. Từ đó suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} 5^x = f(y) & (1) \\ 5^y = f(z) & (2) \\ 5^z = f(x) & (3) \end{cases}$$

Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm, ta sẽ chứng minh $x = y = z$.

Thật vậy nếu $x > y$ thì từ (1), (2) ta suy ra $f(y) > f(z) \Rightarrow y > z$.

Mặt khác (2), (3) $\Rightarrow f(z) > f(x) \Rightarrow z > x$. Tức là $x > y > z > x$, điều này vô lý.

Các trường hợp khác chứng minh tương tự. Vậy $x = y = z$.

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Khi đó hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x = y = z \\ 5^x = 2x + 1 + 2\log_5(4x + 1) \end{cases}$$

Giải phương trình $5^x = 2x + 1 + 2\log_5(4x + 1) \Leftrightarrow 5^x + 2x = 4x + 1 + 2\log_5(4x + 1) \quad (*)$

Đặt $\log_5(4x + 1) = t \Rightarrow 5^t = 4x + 1 \quad (**)$

Phương trình $(*)$ có dạng $5^x + 2x = 5^t + 2t \Leftrightarrow 5^x - 5^t = 2(t - x)$.

- Nếu $x = t$ thoả mãn.
- Nếu $x > t \Rightarrow 5^x - 5^t > 0 > t - x$.
- Nếu $x < t \Rightarrow 5^x - 5^t < 0 < t - x$.

Vậy $x = t$.

Khi đó phương trình $(**)$ tương đương $5^x = 4x + 1 \Leftrightarrow 5^x - 4x - 1 = 0$.

Xét hàm số $g(x) = 5^x - 4x - 1 \left(x > -\frac{1}{4} \right)$. Ta có $g'(x) = 5^x \ln 5 - 4; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{\ln 5}$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x) = 5^x - 4x - 1 \left(x > -\frac{1}{4} \right)$ suy ra phương trình $g(x) = 0$ có nhiều nhất

hai nghiệm trên $\left(-\frac{1}{4}; +\infty \right)$. Mặt khác $g(1) = g(0) = 0$.

Vậy phương trình $5^x = 4x + 1$ có đúng hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 0$

Hệ đã cho có hai nghiệm $(1; 1; 1)$ và $(0; 0; 0)$

Câu 102. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4^x + 2^x = 4y + 2 \\ 4^y + 2^y = 4z + 2 \\ 4^z + 2^z = 4x + 2 \end{cases}$$

Olympic Duyên hải Bắc Bộ năm 2008

Giải

Đặt $f(t) = 4^t + 2^t \Rightarrow f'(t) = 4^t \ln 4 + 2^t \ln 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} f(x) = 4y + 2 & (1) \\ f(y) = 4z + 2 & (2) \\ f(z) = 4x + 2 & (3) \end{cases}$$

Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm, ta sẽ chứng minh $x = y = z$.

Thật vậy nếu $x > y$ thì từ $(1), (2) \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow 4y + 2 > 4z + 2 \Rightarrow y > z$

Lại từ $(2), (3) \Rightarrow f(y) > f(z) \Rightarrow 4z + 2 > 4x + 2 \Rightarrow z > x$. Tức là $x > y > z > x$, vô lý.

Các trường hợp khác chứng minh tương tự. Vậy $x = y = z$

Khi đó hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x = y = z \\ 4^x + 2^x = 4x + 2 \end{cases} \quad (4)$$

Ta có $4^x + 2^x = 4x + 2 \Leftrightarrow 4^x + 2^x - 4x - 2 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 4^x + 2^x - 4x - 2 \Rightarrow f'(x) = 4^x \ln 4 + 2^x \ln 2 - 4 \Rightarrow f''(x) = 4^x \ln^2 4 + 2^x \ln^2 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Nên $f'(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà $f'(0).f'(1) < 0$ nên $f'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $x = a$. Lập bảng biến thiên ta có thể chỉ ra rằng phương trình (4) có nhiều nhất hai nghiệm.

Từ đó chỉ ra (4) có đúng hai nghiệm $x = 0, x = 1$. Hệ đã cho có hai nghiệm $(1; 1; 1), (0; 0; 0)$

Câu 103. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 = 1 + 3\log_2 y \\ y^2 = 1 + 3\log_2 z \\ z^2 = 1 + 3\log_2 x \end{cases}$$

Giải

Điều kiện x, y, z dương.

Đặt $f(t) = 1 + 3\log_2 t \Rightarrow f'(t) = \frac{3}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$. Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x^2 = f(y) & (1) \\ y^2 = f(z) & (2) \\ z^2 = f(x) & (3) \end{cases}$$

Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm, ta sẽ chứng minh $x = y = z$.

Thật vậy nếu $x > y$ thì suy ra $x^2 > y^2$ từ (1), (2) $\Rightarrow f(y) > f(z) \Rightarrow y > z \Rightarrow y^2 > z^2$.

Lại từ (2), (3) $\Rightarrow f(z) > f(x) \Rightarrow z > x$. Tức là $x > y > z > x$, vô lý.

Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Vậy $x = y = z$. Khi đó hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x = y = z \\ x^2 = 1 + 3\log_2 x \end{cases} \quad (4)$$

Ta có $x^2 = 1 + 3\log_2 x \Leftrightarrow x^2 - 1 - 3\log_2 x = 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 1 - 3\log_2 x \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{3}{x \ln 2}$, có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2 \ln 2}}$.

Lập bảng biến thiên ta có thể chỉ ra rằng phương trình (4) có nhiều nhất hai nghiệm. Từ đó chỉ ra (4) có đúng hai nghiệm $x = 2, x = 1$. Hệ đã cho có hai nghiệm $(1; 1; 1), (2; 2; 2)$

Câu 104. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^5 + y^3 = 2z \\ y^5 + z^3 = 2x \\ z^5 + x^3 = 2y \end{cases}$$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max\{x, y, z\} \Rightarrow x \geq y, x \geq z$.

Do $x \geq y \Leftrightarrow y^5 + z^3 \geq z^5 + x^3 \geq z^5 + z^3 \Rightarrow y^5 \geq z^5 \Leftrightarrow y \geq z$. Suy ra $x \geq y \geq z$

Do $x \geq z \Leftrightarrow y^5 + z^3 \geq x^5 + y^3 \geq y^5 + y^3 \Rightarrow z^3 \geq y^3 \Leftrightarrow z \geq y$. Suy ra $x \geq z \geq y$

Từ đó suy ra $y = z$. Thay vào hệ phương trình, ta có

$$\begin{cases} y^5 + y^3 = 2x \\ y^5 + x^3 = 2y \end{cases} \Rightarrow (y - x)(y^2 + xy + x^2 + 2) = 0 \Rightarrow y = x = z.$$

Thay vào hệ phương trình ta được $x = y = z = 1$.

Câu 105. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^5 - y^2 = 28 \\ y^5 - z^2 = 28 \\ z^5 - x^2 = 28 \end{cases}$$

Giải

Biến đổi hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} x^5 - y^2 = 28 \\ y^5 - z^2 = 28 \\ z^5 - x^2 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 = y^2 + 28 \\ y^5 = z^2 + 28 \\ z^5 = x^2 + 28 \end{cases}$$

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Suy ra $x^5, y^5, z^5 \geq 0 \Rightarrow x, y, z \geq 0$. Giả sử $x \geq y \Leftrightarrow x^5 \geq y^5 \Leftrightarrow y^2 + 28 \geq z^2 + 28 \Leftrightarrow y \geq z$ (do $x, y, z \geq 0$).

Do $y \geq z \Leftrightarrow y^5 \geq z^5 \Leftrightarrow z^2 \geq x^2 \Leftrightarrow z \geq x$. Từ đó suy ra $x \geq y \geq z \geq x \Rightarrow x = y = z$.

Thay vào hệ phương trình ta được $x = y = z = 2$.

Câu 106. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y = 6 \\ y^3 - z = 6 \\ z^3 - x = 6 \end{cases}$$

Giải

Biến đổi hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} x^3 - y = 6 \\ y^3 - z = 6 \\ z^3 - x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y + 6 \\ y^3 = z + 6 \\ z^3 = x + 6 \end{cases}$$

Giả sử $y \geq z \Leftrightarrow y^3 \geq z^3 \Leftrightarrow z + 6 \geq x + 6 \Leftrightarrow z \geq x$.

Do $z \geq x \Leftrightarrow z^3 \geq x^3 \Leftrightarrow x + 6 \geq y + 6 \Leftrightarrow x \geq y$. Từ đó suy ra $y \geq z \geq x \geq y \Rightarrow x = y = z$.

Thay vào hệ phương trình ta được $x = y = z = 2$.

Câu 107. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 + z^2 - x^2 = \frac{4yz}{x} \\ z^2 + x^2 - y^2 = \frac{4zx}{y} \\ x^2 + y^2 - z^2 = \frac{4xy}{z} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện xác định $x, y, z \neq 0$. Nhân hai vế của các phương trình lần lượt với x^2, y^2, z^2 ta có

$$\begin{cases} x^2 y^2 + x^2 z^2 - x^4 = 4xyz \\ y^2 z^2 + x^2 y^2 - y^4 = 6xyz \\ x^2 z^2 + y^2 z^2 - z^4 = 8xyz \end{cases}$$

Lại có $(1) - 2 \cdot (2) + (3) \Leftrightarrow 2y^4 - y^2 z^2 - x^2 y^2 - x^4 + 2x^2 z^2 - z^4 = 0$

$$\Leftrightarrow y^2 (2y^2 - x^2 - z^2) - (x^2 - z^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 \left(2y^2 - \left(y^2 + \frac{6xz}{y} \right) \right) - (x^2 - z^2)^2 = 0 \Leftrightarrow y^4 - 6xyz - (x^2 - z^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4yz}{x} \cdot \frac{8xy}{z} - 6xyz = 0 \Leftrightarrow 32y^2 - 6xyz = 0 \Leftrightarrow 16y - 3xz = 0$$

Thay $xz = \frac{16y}{3}$ vào (2) và $y = \frac{3xz}{16}$ vào (1) và (3) ta có
$$\begin{cases} -x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 0 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 32 \\ \frac{-1}{2}x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính theo $(x^2; y^2; z^2)$, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là

$$(x^2, y^2, z^2) = \left(64, \frac{288}{5}, \frac{128}{5} \right).$$

Từ hệ ban đầu ta thấy với những giá trị $(x^2; y^2; z^2)$ trên, trên các hạng tử $\frac{yz}{x}, \frac{zx}{y}, \frac{xy}{z}$ đều dương.

Giả sử $x < 0$, từ (1) ta có $yz < 0$ tương tự với $y < 0$ và $z < 0$. Vậy nghiệm của hệ là

$$(x, y, z) = \left(8, 12\sqrt{\frac{2}{5}}, 8\sqrt{\frac{2}{5}}\right), \left(8, -12\sqrt{\frac{2}{5}}, -8\sqrt{\frac{2}{5}}\right), \left(-8, 12\sqrt{\frac{2}{5}}, -8\sqrt{\frac{2}{5}}\right), \left(-8, -12\sqrt{\frac{2}{5}}, 8\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$$

và các hoán vị.

Câu 108. Giải hệ phương trình	$\begin{cases} (x+y)(z+1) = 2a(a+1) \\ (x+z)(y+1) = 2a(a+1) \\ (y+z)(x+1) = 2a(a+1) \end{cases}$
Philippine Math Olympiad National Finals Oral Round	
Giải	

Đặt $\begin{cases} x + yz = u \\ y + zx = v \\ z + xy = w \end{cases}$ ta có hệ phương trình $u + v = v + w = w + u = 2a(a+1)$

Hệ này có nghiệm $u = v = w = a(a+1)$ do hệ đó (*) tương đương

$$x + yz = y + zx = z + xy = a(a+1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y) = z(x-y) \\ (y-z) = x(y-z) \\ (x+zx) = a(a+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \vee z = 1 \\ y = z \vee x = 1 \\ x + yz = a(a+1) \end{cases}$$

Tóm lại ta có sơ đồ sau

$$\begin{cases} x=y \begin{cases} \nearrow y=z \Rightarrow x=y=z \in \{a-(a+1)\} \\ \searrow x=1 \Rightarrow x=y=1; z=a^2+a-1 \end{cases} \\ z=1 \begin{cases} \nearrow y=z \Rightarrow y=z=1; x=a^2+a-1 \\ \searrow x=1 \Rightarrow x=z=1; y=a^2+a-1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y; z) = (a; a; a), (-a-1; -a-1; -a-1), (1; 1; a^2+a-1)$ và các hoán vị.

Câu 109. Cho ba góc α, β, γ thỏa mãn điều kiện	$\begin{cases} \cos \alpha = \tan \beta \\ \cos \beta = \tan \gamma \\ \cos \gamma = \tan \alpha \\ 0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2} \end{cases}$
Chứng minh rằng $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = 2 \sin \frac{\pi}{10}$.	

Giải

Biến đổi giả thiết ta có $\begin{cases} \cos \alpha = \tan \beta \\ \cos \beta = \tan \gamma \\ \cos \gamma = \tan \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = \tan^2 \beta \\ \cos^2 \beta = \tan^2 \gamma \\ \cos^2 \gamma = \tan^2 \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 \\ \cos^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \gamma} - 1 \\ \cos^2 \gamma = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \end{cases}$

Đặt $\cos^2 \alpha = x, \cos^2 \beta = y, \cos^2 \gamma = z$ hệ trở thành $\begin{cases} x = \frac{1}{y} - 1 \\ y = \frac{1}{z} - 1 \\ z = \frac{1}{x} - 1 \end{cases}$

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Xét hàm $f(t) = \frac{1}{t} - 1 \Rightarrow f'(t) = -\frac{1}{t^2} < 0 \forall t \in \mathbb{R}$ do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Giả sử $x = \max\{x, y, z\}$ ta có $\frac{1}{x} - 1 \leq \frac{1}{y} - 1 \leq \frac{1}{z} - 1 \Rightarrow z \leq x \leq y \Rightarrow x = y = z$.

Đến đây xin nhường lại cho bạn đọc giải quyết phần còn lại của bài toán!

Câu 110. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)(y+z) = 4xy^2z(1) \\ (y+z)(z+x) = 4yz^2x(2) \\ (z+x)(x+y) = 4zx^2y(3) \end{cases}$$

Giải

Với $x=0; y=0 \rightarrow z=0$. Do đó $(0;0;0)$ là 1 nghiệm của hệ.

Với $x, y, z \neq 0$, nhân 2 vế của 3 phương trình với nhau, ta có

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 = 64x^4y^4z^4$$

Lúc này xảy ra 2 trường hợp

- **Trường hợp 1.** $(x+y)(y+z)(z+x) = 8x^2y^2z^2(4)$

Khi đó, từ (1), (2), (3), (4) ta có
$$\begin{cases} x+y = 2xy \\ y+z = 2yz \\ z+x = 2zx \end{cases}$$
 . Biến đổi tương đương, ta có

$$\begin{cases} x(1-y) = -y(1-x) \\ y(1-z) = -z(1-y) \\ z(1-x) = -x(1-z) \end{cases}$$

Lúc này, nhân 2 vế của 3 phương trình với nhau, ta có.

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z) = -xyz(1-x)(1-y)(1-z)$$

Mặt khác, vì $xyz \neq 0$ nên ta có $(1-x)(1-y)(1-z) = 0$. Suy ra $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

- **Trường hợp 2.** Tương tự. $(x+y)(y+z)(z+x) = -8x^2y^2z^2$.

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm $(x; y; z)$ lần lượt là $(0; 0; 0); (1; 1; 1); (-1; -1; -1)$.

Câu 111. Giải phương trình
$$\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}x}}} = x$$

Giải

Đổi biến x thành $-x$ rồi giải hệ
$$\begin{cases} y = \sqrt{1 + \frac{x}{2}} \\ z = \sqrt{1 + \frac{y}{2}} \\ -x = \sqrt{1 + \frac{z}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 = x + 2 & (1) \\ 2z^2 = y + 2 & (2) \\ 2x^2 = z + 2 & (3) \end{cases} \quad (x < 0 < y, z)$$

Ta có x, y, z là 3 nghiệm thực của phương trình $(t-x)(t-y)(t-z) = 0$

$$\text{Hay } t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz = 0, \quad (*)$$

Nên ta cần tính $x+y+z$; $xy+yz+zx$; xyz

$$\text{Lập các hiệu } \begin{cases} 2(x^2 - y^2) = z - x \\ 2(y^2 - z^2) = x - y \Rightarrow 8(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2) = (x - y)(y - z)(z - x). \\ 2(z^2 - x^2) = y - z \end{cases}$$

Nếu $(x - y)(y - z)(z - x) = 0 \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.

$$\text{Nếu } (x + y)(y + z)(z + x) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz = \frac{1}{8} \quad (4)$$

Lấy (1) + (2) + (3) ta được

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = x + y + z + 6 \Leftrightarrow 2(x + y + z)^2 - (x + y + z) - 6 = 4(xy + yz + zx) \quad (5)$$

$$\text{Từ (5) đặt } x + y + z = a \Rightarrow xy + yz + zx = \frac{2a^2 - a - 6}{4}, \quad (6)$$

$$\text{Từ (4)} \Rightarrow xyz = \frac{4a^3 - 2a^2 - 12a - 1}{8}, \quad (7)$$

$$\text{Ta có hằng đẳng thức } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + yz + zx) \quad (8)$$

$$\text{Thay (5), (6), (7) vào (8) ta được phương trình } 8a^3 - 2a^2 - 7a + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{3}{4} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

- Nếu $a = -1 \Rightarrow xyz = \frac{5}{8} > 0$ (do $x < 0 < y, z$).
- Nếu $a = \frac{3}{4}$, thế vào (*) chỉ có 1 nghiệm thực nên loại.
- Nếu $a = \frac{1}{2}$, phương trình (*) có 2 nghiệm dương và 1 nghiệm âm là $x = -1,253509322$

Tóm lại, phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất là $x = -1,253509322$.

Câu 112. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2} = x - yz \\ y\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-x^2} = y - zx \\ z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = z - xy \end{cases}$$

Giải

Ta có $x = \frac{yz}{1 - \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}}$ và phương trình có nghiệm khi $1 - \frac{xz}{y} > 0$; $1 - \frac{xy}{z} > 0$.

Do đó $\frac{z^2}{1 - \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}} < 1$; $\frac{y^2}{1 - \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}} < 1$, hay $\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2} < 1 - z^2$; $\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2} < 1 - y^2$.

Suy ra $\sqrt{1-y^2} < \sqrt{1-z^2}$; $\sqrt{1-z^2} < \sqrt{1-y^2}$.

- Nếu $x = 0$ thì $yz = 0$, ta có $(0; 0; a), (0; a; 0)$ là họ nghiệm với $|a| \leq 1$.
Xét tương tự ta có nghiệm $(a; 0; 0)$.
- Nếu $x = 1$ thì $y = z$ ta có $(1; a; a)$ với $|a| \leq 1$ là nghiệm.
Xét tương tự ta có $(a; 1; a), (a; a; 1)$ là họ nghiệm.
- Nếu $x = -1$ thì $y = -z$, ta có $(-1; a; a), (a; -1; -a), (a; -a; -1)$ với $|a| \leq 1$ là họ nghiệm.

Câu 113. Cho $n > 1$ là một số nguyên dương lẻ. Giả sử rằng các số nguyên dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa

mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(x_2 - x_1\right)^2 + 2\left(x_2 + x_1\right) + 1 = n^2 \\ \left(x_3 - x_2\right)^2 + 2\left(x_3 + x_2\right) + 1 = n^2 \\ \\ \left(x_1 - x_n\right)^2 + 2\left(x_1 + x_n\right) + 1 = n^2 \end{cases}$$

với $1 \leq j \leq n-1$ sao cho $x_j = x_{j+1}$.

Crux – Canada 1999

Giải

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo m rằng nếu các số nguyên không âm $x_1, x_2, \dots, x_m$ với $m > 1$ thì có một số nguyên lẻ thỏa mãn

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + 2(x_2 + x_1) + 1 = n^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + 2(x_3 + x_1) + 1 = n^2 \\ \dots\dots\dots \\ (x_1 - x_m)^2 + 2(x_1 + x_m) + 1 = n^2 \end{cases}$$

Thế thì hoặc $x_1 = x_m$ hoặc tồn tại j với $1 \leq j \leq m-1$ sao cho $x_j = x_{j+1}$. Ta quy ước rằng $x_{m+1} = x_1$.

Bây giờ để ý rằng, với mỗi j , x_{j-1} và x_{j+1} có các nghiệm (có thể bằng nhau) để phương trình bậc hai

$$X^2 + (2 - 2x_j)X + (x_j + 1) - n^2 = 0 \quad (E_j)$$

phân biệt $\Delta_j = 4(n^2 - 4x_j) \geq 0$ có một nghiệm thực. Hơn nữa n là lẻ, $\Delta_j \geq 1$.

Cũng bởi vì (E_j) có hệ số nguyên và một nghiệm nguyên nhỏ nhất, cả hai nghiệm là nguyên và chúng phân biệt với $\Delta_j \geq 1$. Ký hiệu các nghiệm là α_j và β_j với $\alpha_j < \beta_j$.

Ta cũng có $\alpha_j + \beta_j = 2x_j - 2$ và $\{x_{j-1}, x_{j+1}\} \subset \{\alpha_j, \beta_j\}$. Ta cho rằng một trong hai $\alpha_j = x_j - 2$ và $\beta_j = x_j$ hoặc $\alpha_j < x_j < \beta_j$, thực sự nếu $\alpha_i, \beta_j \geq x_j$ thì $\alpha_j + \beta_j > 2x_j - 2$ và nếu $\alpha_j, \beta_j < x_j$ thì $\alpha_j + \beta_j \geq 2x_j - 3$.

Bây giờ với j sao cho $x_j = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Bây giờ x_{j-1} và x_{j+1} là các nghiệm của E_j . Trừ khi $x_{j-1} = x_j$ hoặc $x_j = x_{j+1}$ ta phải có $x_{j-1} = x_{j+1}$ hoặc $x_{j-1} < x_j < x_{j+1}$ hoặc $x_{j+1} < x_j < x_{j-1}$. Hai trường hợp cuối với cách chọn j , vì vậy $x_{j-1} = x_{j+1}$. Nếu $m = 3$ ta ký hiệu x_{j-1} và x_{j+1} là chu kỳ liên tiếp. Nếu không $m > 1$ và bằng cách loại bỏ x_{j-1}, x_j ta được một nghiệm với $m - 2$ giá trị, mà giả thiết quy nạp được áp dụng.

Câu 114. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sin x + 2\sin(x + y + z) = 0 \\ \sin y + 2\sin(x + y + z) = 0 \\ \sin z + 4\sin(x + y + z) = 0 \end{cases}$$

Russia MO

Giải

Cách 1.

Hệ phương trình đã cho được viết lại như sau

$$\frac{\sin x}{2} = \frac{\sin y}{3} = \frac{\sin z}{4} = \sin x \sin y \sin z - \sin x \cos y \cos z - \cos x \sin y \cos z - \cos x \cos y \sin z .$$

Thay $\sin x = \frac{2}{3} \sin y$; $\sin z = \frac{2}{3} \sin y$ ta có phương trình

$$\frac{\sin y}{3} = \frac{8}{9} \sin^3 y - \frac{2}{3} \sin y \cos y \cos z - \sin y \cos z \cos x - \frac{4}{3} \sin y \cos x \cos y .$$

Nếu $\sin y = 0$ thì $\sin x = \sin z = 0$ và mỗi x, y, z là bội của π .

Giả sử $\sin y \neq 0$ thì phương trình có dạng $6 \cos y \cos z + 12 \cos x \cos y = 5 - 9 \cos z \cos x - 8 \cos^2 y$.

Bình phương hai vế và rút gọn, thay $4 \cos^2 y = 9 \cos^2 x - 5$ và $16 \cos^2 y = 9 \cos^2 z + 7$ ta được

$8 \cos^2 y + 1 = -9 \cos x \cos z$. Bình phương tiếp và rút gọn ta sẽ được $\cos^2 y = 1 \Rightarrow \sin y = 0$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(m\pi; n\pi; p\pi)$ ($m, n, p \in \mathbb{Z}$).

Cách 2. Cộng hai phương trình đầu và trừ đi phương trình thứ ba ta được

$$\sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x+z}{2} \cdot \cos \frac{y+z}{2} = 0 .$$

Đến đây mọi chuyện trở nên vô cùng đơn giản!

Một số bài toán khác.

Trong phần cuối này chúng ta sẽ tìm hiểu một số bài toán hệ nhiều ẩn với những cách giải hay và độc đáo dựa trên những phương pháp có sẵn như đánh giá, hình học... Các bài toán trên được tổng hợp từ rất nhiều đề thi vô địch các nước, các bài toán được đề xuất trên các tạp chí toán học nổi tiếng trong và ngoài nước như Toán học tuổi trẻ, Crux – Canada, Mathematical Reflection Olympiad, Kvant, Mathematics and Youth Magazine, American Mathematical Monthly,...

Câu 1. Cho các số thực $x; y; z$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + xz + x^2 = 16 \end{cases}.$$

Tính giá trị của biểu thức $P = xy + 2yz + 3xz$.

Mathematical and Youth 8/2010

Giải

Phân tích. Một bài toán rất lạ và hay, nếu chúng ta tiếp cận theo phương pháp sử dụng đại số thì có lẽ sẽ rất là phức tạp, tuy nhiên hãy để ý tới các biểu thức trong hệ có dạng biểu thức của định lý cosine trong tam giác, do đó ta sẽ sử dụng phương pháp hình học như sau.

Trong mặt phẳng lấy các điểm O, A, B, C sao cho $\angle AOB = 150^\circ; \angle AOC = 120^\circ; \angle BOC = 90^\circ$.

Đặt $OA = x; OB = \frac{y}{\sqrt{3}}; OC = z$. Áp dụng định lý cosine vào các tam giác OAB, BOC, AOC ta có

$$AB^2 = x^2 + xy + \frac{y^2}{3}; BC^2 = \frac{y^2}{3} + z^2; AC^2 = x^2 + xz + z^2.$$

Từ hệ thức đã cho suy ra $AB = 5; BC = 3; AC = 4$. Vậy $\triangle ABC$ vuông tại C và $S_{\triangle ABC} = 6$.

Mặt khác $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COA} = \frac{1}{4\sqrt{3}}xy + \frac{1}{2\sqrt{3}}yz + \frac{3}{4\sqrt{3}}xz$.

Từ đó $P = xy + 2yz + 3xz = 24\sqrt{3}$.

Câu 2. Cho các số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + z^2 = 16 \\ y^2 = xz \end{cases}.$$

Tính giá trị của biểu thức $G = xy + yz$.

Mathematical and Youth 10/2010

Giải

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $BC = 4; AB = 3$ và đường cao BD .

Đặt $BD = y; AD = x$ và $CD = z$. Ta thấy $x; y; z$ thỏa hệ phương trình trên.

Từ đó $G = xy + yz = (x + z)y = 2S_{\triangle ABC} = 3 \cdot 4 = 12$.

Câu 3. Cho các số thực $x; y; z$ với $y > 0$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y^2 = \frac{29}{4} \\ y^2 - z = 2 \\ y^2 = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2-z} \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $H = y(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z})$.

Mathematical and Youth 10/2010

Giải

Điều kiện $x > 1; z < 2$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (\sqrt{x-1})^2 + y^2 = \frac{25}{4} \\ y^2 + (\sqrt{2-z})^2 = 4 \\ y^2 = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2-z} \end{cases}.$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B , đường cao BD với $AB = \frac{5}{2}, BC = 2$.

Đặt $BD = y; AD = \sqrt{x-1}; CD = \sqrt{2-z}$. Rõ ràng $x; y; z$ thỏa mãn hệ trên.

Từ đó $H = y(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z}) = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$.

Vậy $H = y(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z}) = 5$.

Câu 4. Cho các số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 50 \\ x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169 \\ x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144 \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $K = xy + yz + zx$.

Mathematical and Youth 10/2010

Giải

Một bài toán tương tự như bài toán 1.

Hệ phương trình đã cho được viết lại như sau

$$\begin{cases} \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 5^2 \\ x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 13^2 \\ x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 12^2 \end{cases}.$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại C với $AB = 13; AC = 5; BC = 12$.

Gọi O là điểm nằm trong $\triangle ABC$ thỏa $\angle AOC = 90^\circ; \angle BOC = 135^\circ$.

Đặt $OB = x; OA = \frac{y}{\sqrt{2}}; OC = \frac{z}{\sqrt{2}}$. Ta kiểm tra được $x; y; z$ thỏa mãn hệ điều kiện trên.

Ta có $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{4}xy; S_{\triangle AOC} = \frac{1}{4}yz; S_{\triangle BOC} = \frac{1}{4}zx$.

Từ đó suy ra $K = xy + yz + zx = 4(S_{\Delta AOB} + S_{\Delta AOC} + S_{\Delta BOC}) = 4.S_{\Delta ABC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 120$.

Câu 5. Giải phương trình $x + y + z + \sqrt{xyz} = 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} - 2)$.

Mathematical and Youth 3/2011

Giải

Cách 1.

Điều kiện $xyz \geq 0; xy \geq 0; yz \geq 0; zx \geq 0 \Leftrightarrow x; y; z \geq 0$.

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất hai trong ba số $\sqrt{x}; \sqrt{y}; \sqrt{z}$ cùng hơn hoặc bằng 2 hoặc cùng nhỏ hơn hoặc bằng 2. Giả sử hai số đó là $\sqrt{x}; \sqrt{y}$. Khi đó $(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{y} - 2) \geq 0$.

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{z} - 2)^2 + \sqrt{z}(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{y} - 2) = 0 \quad (1)$$

Vì mỗi số hạng ở vế trái của (1) đều không âm nên để có (1) thì phải có.

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ \sqrt{z}(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{y} - 2) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} = \sqrt{z} = 2 \Leftrightarrow x = y = z = 4. \\ \sqrt{z} - 2 = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là. $(4; 4; 4)$.

Cách 2.

Điều kiện $x; y; z \geq 0$. Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$(\sqrt{x} - 2)^2 + (\sqrt{y} - 2)^2 + (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{y} - 2)(\sqrt{z} - 2) = 0.$$

Đặt $a = \sqrt{x} - 2; b = \sqrt{y} - 2; c = \sqrt{z} - 2$.

Điều kiện. $a; b; c \geq -2$. Khi đó phương trình trên thành $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 0$.

Xét các trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** $abc > 0$. Khi đó. $a^2 + b^2 + c^2 + abc > 0$, mâu thuẫn.
Phương trình đã cho vô nghiệm.
- **Trường hợp 2.** $abc < 0$. Khi đó tồn tại một thừa số không âm, ta giả sử $a < 0, bc > 0$.
Do $a \geq -2$ nên $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq a^2 + b^2 - 2bc + c^2 = a^2 + (b - c)^2 > 0$, mâu thuẫn.
Phương trình vô nghiệm.
- **Trường hợp 3.** $abc = 0$. Khi đó $a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (4; 4; 4)$.

Câu 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{8}{3} \\ x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{118}{9} \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{y\sqrt{y}} + \frac{1}{z\sqrt{z}} = \frac{728}{27} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x; y; z > 0$.

$$\text{Đặt } \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = a; \sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} = b; \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} = c.$$

$$\text{Suy ra } x + \frac{1}{x} = a^2 + 2; x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = a^3 + 3a; y + \frac{1}{y} = b^2 + 2;$$

$$y\sqrt{y} - \frac{1}{y\sqrt{y}} = b^3 + 3b; z + \frac{1}{z} = c^2 + 2; z\sqrt{z} - \frac{1}{z\sqrt{z}} = c^3 + 3c$$

$$\text{Hệ phương trình đã cho thành } \begin{cases} a+b+c = \frac{8}{3} \\ a^2+b^2+c^2 = \frac{64}{9} \\ a^3+b^3+c^3 = \frac{512}{27} \end{cases}.$$

$$\text{Ta được } 3(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - \frac{512}{27} = 0.$$

Nếu $a+b=0$ thì suy ra $c = \frac{8}{3}$. Thay vào phương trình thứ hai ta được $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$.

$$\text{Do đó } x - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0; y - \frac{1}{\sqrt{y}} = 0; z - \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{8}{3}. \text{ Suy ra } (x; y; z) = (1; 1; 9).$$

Tương tự như thế ta cũng tìm được các nghiệm $(9; 1; 1), (1; 9; 1)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm là $(9; 1; 1), (1; 9; 1), (1; 1; 9)$.

$$\text{Câu 7. Tìm tất cả các số thực } a, b, c \text{ thỏa } \begin{cases} a+b+c+d=20 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=150 \end{cases}$$

Junior Balkan MO 2008

Giải

$$\text{Ta có } a^2+b^2+c^2+d^2 = (a+b+c+d)^2 - 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = 20^2 - 2.150 = 100$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có

$$20^2 = (1.a+1.b+1.c+1.d)^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2) \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 100$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=5$.

$$\text{Câu 8. Tìm tất cả các bộ ba số thực } (x; y; z) \text{ thỏa hệ phương trình } \begin{cases} x+y-z=-1 \\ x^2-y^2+z^2=1 \\ -x^3+y^3+z^3=-1 \end{cases}$$

Ibero American 1989

Giải

$$\text{Từ phương trình thứ nhất của hệ ta suy ra } x+y=z-1 \quad (1)$$

$$\text{Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra } (x-y)(x+y) = (z-1)(z+1) \quad (2)$$

$$\text{Thay (1), (2) ta được } (x-y)(z+1) = (z-1)(z+1) \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$$

Đến đây ta dễ dàng tìm được các nghiệm của hệ là $(1; 1; 1), (1; -1; 1)$.

$$\text{Câu 9. Tìm tất cả các số thực } a, b, c, d \text{ thỏa hệ phương trình } \begin{cases} abc+ab+bc+ca+a+b+c=1 \\ bcd+bc+cd+db+b+c+d=9 \\ cda+cd+da+ac+c+d+a=9 \\ dab+da+ab+bd+d+a+b=9 \end{cases}$$

Baltic Way 1999

Giải

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Đặt $x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1, t = d + 1$.

Thế thì $xyz = 2, yzt = ztx = txy = 10$.

Như vậy $x = y = z$ và $a = b = c = \sqrt[3]{2} - 1, d = \sqrt[3]{250} - 1$.

Câu 10. Tìm tất cả các nghiệm thực của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ xy + yz + zt + tx = 4 \\ xyz + yzt + ztx + txy = 3 \\ xyzt = -1 \end{cases}$$

Baltic Way 2000

Giải

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $(x + z)(y + t) = 4$.

Kết hợp với phương trình thứ nhất của hệ suy ra $x + z, y + t$ là nghiệm của phương trình

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = 4 \end{cases}.$$

Suy ra $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + t = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + z = 4 \\ y + t = 1 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + t = 4 \end{cases}$ thay vào phương trình thứ ba của hệ ta được

$$xz + 4yt = 3 \Leftrightarrow xz = 3 - 4yt.$$

Thay vào phương trình thứ tư của hệ ta được

$$yt(3 - 4yt) = -1 \Leftrightarrow 4y^2t^2 - 3yt - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} yt = 1 \\ yt = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Đến đây dễ dàng suy ra được nghiệm (x, y, z, t) của hệ.

- Tương tự cho trường hợp $\begin{cases} x + z = 4 \\ y + t = 1 \end{cases}$.

Câu 11. Xác định tất cả các số thực dương x, y thỏa phương trình.

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}).$$

Baltic Way 2000

Giải

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{(x - \sqrt{2x+1})^2}{x} + \frac{(y - \sqrt{2y+1})^2}{y} = 0$.

Vì $x, y > 0$ nên $\begin{cases} x - \sqrt{2x+1} = 0 \\ y - \sqrt{2y+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases}$.

Đến đây dễ dàng tìm được nghiệm.

Câu 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc = 1 \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc = 1 \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc = 1 \end{cases}$; $a, b, c \in \mathbb{R}$

Baltic Way 2002

Giải

Lấy phương trình thứ nhất trừ phương trình thứ hai của hệ ta được

$$(a-b)\left((a-b)^2 + 3c^2\right) = 0.$$

Dễ thấy $a = b$. Tương tự, ta chứng minh được $a = b = c$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta suy ra $a^3 = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(1; 1; 1)$.

Câu 13. Cho các số thực a, b, c, d . Tìm nghiệm (x, y, z, u) của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - yz - zu - yu = a \\ y^2 - zu - ux - xz = b \\ z^2 - ux - xy - yu = c \\ u^2 - xy - yz - zx = d \end{cases}$$

Mediterranean MO 2010

Giải

Đặt $P = x + y + z + u$; $Q = xy + xz + xu + yz + yu + zu$.

Thế thì $x^2 - (Q - xy - xz - xu) = a \Leftrightarrow x^2 - Q + x(P - x) = a \Leftrightarrow Px - Q = a$.

Tương tự $Py - Q = b$; $Pz - Q = c$; $Pu - Q = d$.

Bây giờ $x = \frac{a+Q}{P}$; $y = \frac{b+Q}{P}$; $z = \frac{c+Q}{P}$; $u = \frac{d+Q}{P}$,

Do đó $P = \frac{a+b+c+d+4Q}{P}$ hay $P^2 = a+b+c+d+4Q$ (1)

$Q = \frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd+3Q(a+b+c+d)+6Q^2}{P^2}$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được $2Q^2 + 2(a+b+c+d)Q + ab+ac+ad+bc+bd+cd = 0$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{-(a+b+c+d) \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}{2}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x; y; z; u)$ là

$$\left(\frac{a+Q}{\sqrt{4Q+a+b+c+d}}; \frac{b+Q}{\sqrt{4Q+a+b+c+d}}; \frac{c+Q}{\sqrt{4Q+a+b+c+d}}; \frac{d+Q}{\sqrt{4Q+a+b+c+d}} \right),$$

$$\left(-\frac{a+Q}{\sqrt{4Q+a+b+c+d}}; -\frac{b+Q}{\sqrt{4Q+a+b+c+d}}; -\frac{c+Q}{\sqrt{4Q+a+b+c+d}}; -\frac{d+Q}{\sqrt{4Q+a+b+c+d}} \right).$$

Câu 14. Tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ xyz = 2 + x + y + z \end{cases}$; $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

United Kingdom 1998

Giải

Đặt $a = \sqrt[3]{xyz} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$12 = xy + yz + zx \geq 3a^2; a^3 = 2 + x + y + z \geq 2 + 3a.$$

Do đó $a^2 \leq 4$ và $a^3 - 3a - 2 = (a-2)(a-1)^2 \leq 0$.

Điều này cho ta $a = 2$. Suy ra $x = y = z = 2$.

Vậy $(2; 2; 2)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Câu 15. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2 - 4y + 7 = 0 \\ y^2 - 6z + 14 = 0 \\ z^2 - 2x - 7 = 0 \end{cases}$$

BMO 2013, Round 1

Giải

Bài toán này khá đơn giản!

Cộng vế theo vế của ba phương trình trong hệ ta được

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1; y=2; z=3.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là. $(1; 2; 3)$.

Câu 16. Tìm tất cả các nghiệm thực dương $(a; b; c; d)$ của hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b+c+d=12 \\ abcd=27+ab+ac+ad+bc+bd+cd \end{cases}$$

British MO 1996

Giải

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$abcd \geq 27 + 6\sqrt{abcd} \Rightarrow (\sqrt{abcd} + 3)(\sqrt{abcd} - 9) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{abcd} \geq 9 \Rightarrow \sqrt[4]{abcd} \geq 3 = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Lại theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có $\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$.

$$\text{Do đó } \sqrt[4]{abcd} = \frac{a+b+c+d}{4} \Leftrightarrow a=b=c=d.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(3; 3; 3; 3)$.

Câu 17. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+3)^2 = -(y+3)(x+z-2) \\ x^2 + 5x + 9z - 7y - 15 = -3yz \\ 8x^2 + 18y^2 + 18xy + 18yz = -84x - 72y - 24z - 176 \end{cases}$$

Giải

Đặt $a = x+2; b = y+3$.

Thay vào từng phương trình của hệ ta được

- $(x+2)^2 + (y+3)^2 = -(y+3)(x+z-2)$, ta được $a^2 + b^2 = -b(a+z-4) \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 + bz - 4b = 0$
- $x^2 + 5x + 9z - 7y - 15 = -3yz$, ta được $a^2 + a - 7b + 3bz = 0$.
- $8x^2 + 18y^2 + 18xy + 18yz = -84x - 72y - 24z - 176$, ta được $8a^2 - 2a + 18b^2 - 72b + 18ab + 18bz - 30z + 94 = 0$

Hệ phương trình đã cho thành
$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 + bz - 4b = 0 \\ a^2 + a - 7b + 3bz = 0 \\ 8a^2 - 2a + 18b^2 - 72b + 18ab + 18bz - 30z + 94 = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất và thứ ba của hệ ta có

$$8a^2 - 2a - 18a^2 - 30z + 94 = 0 \Leftrightarrow 10a^2 + 2a + 30z - 94 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{5a^2 + a - 47}{15}.$$

Thay vào phương trình thứ hai, ta có

$$a^2 + a - 7b - b \left(\frac{5a^2 + a - 47}{5} \right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5a^2 + a - 12}{5} \right) b = a^2 + a \Leftrightarrow b = \frac{5(a^2 + a)}{5a^2 + a - 12}.$$

Trong hệ phương trình trên. nhân phương trình thứ nhất với 3 rồi trừ cho phương trình thứ hai ta được

$$2a^2 - a + 3ab + 3b^2 - 5b = 0 \quad (*)$$

Thay $z = -\frac{5a^2 + a - 47}{15}$ và $b = \frac{5(a^2 + a)}{5a^2 + a - 12}$ vào phương trình này, ta có

$$\begin{aligned} 2a^2 - a + \frac{15a(a^2 + a)}{5a^2 + a - 12} + 3 \left(\frac{5(a^2 + a)}{5a^2 + a - 12} \right)^2 - \frac{25(a^2 + a)}{5a^2 + a - 12} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a^2 - a)(5a^2 + a - 12)^2 + [15a(a^2 + a) - 25(a^2 + a)](5a^2 + a - 12) + 65(a^2 + a) &= 0 \\ \Leftrightarrow 50a^6 + 70a^5 - 208a^4 - 94a^3 + 482a^2 + 156a &= 0 \\ \Leftrightarrow a(a + 2)(5a^2 - 14a + 13)(5a^2 + 11a + 3) &= 0 \Leftrightarrow a = 0; a = -2; a = \frac{-11 \pm \sqrt{61}}{10}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là $\left(-2; -3; \frac{47}{15}\right), \left(-4; -\frac{4}{3}; \frac{29}{15}\right),$

$$\left(-\frac{31 + \sqrt{61}}{10}; \frac{2\sqrt{61} - 28}{15}; \frac{13 - \sqrt{61}}{15}\right), \left(\frac{\sqrt{61} - 31}{10}; -\frac{2\sqrt{61} + 28}{15}; \frac{39 + \sqrt{61}}{15}\right)$$

Câu 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2z(x+y)+1=x^2-y^2 \\ y^2+z^2=1+2xy+2zx-2yz \\ y(3x^2-1)=-2x(x^2+1) \end{cases}$	Đề thi chọn đội tuyển trường ĐH KHTN Hà Nội, vòng 3 Giải
---	--

Từ phương trình thứ ba của hệ ta có $y = \frac{-2x(x^2 + 1)}{3x^2 - 1} \Rightarrow x + y = \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1}.$

Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos t \neq 0.$

Ta có $\tan t + y = \frac{\tan^3 t - 3 \tan t}{3 \tan^2 t - 1} \Rightarrow y = \tan 3t - \tan t.$ Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$\begin{aligned} z &= \frac{x^2 - y^2 - 1}{2(x + y)} = \frac{(2 \tan t - \tan 3t) \tan 3t - 1}{2 \tan 3t} = \frac{2 \tan t \tan 3t - \tan^2 3t - 1}{2 \tan 3t} \\ &= \tan t - \frac{\tan 3t + \cos 3t}{2} = \tan t - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 3t}{\cos 3t} + \frac{\cos 3t}{\sin 3t} \right) = \tan t - \frac{1}{\sin 6t}. \end{aligned}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2zx + 2yz &= 1 + x^2 \Leftrightarrow (y + z - x)^2 = 1 + x^2 \\ \Leftrightarrow \left(\tan 3t - \tan t + \tan t - \frac{1}{\sin 6t} - \tan t \right)^2 &= 1 + \tan^2 t \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\sin 3t}{\cos 3t} - \frac{1}{2 \sin 3t \cos 3t} - \tan t \right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 t} \Leftrightarrow \left(\frac{2 \sin^2 3t - 1}{2 \sin 3t \cos 3t} - \tan t \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 t} \end{aligned}$$

| Hệ phương trình nhiều ẩn

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(\frac{\cos 6t}{\sin 6t} + \tan t \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 t} \Leftrightarrow \left(\frac{\cos 6t \cos t + \sin 6t \sin t}{\sin 6t \cos t} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 t} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\cos 5t}{\sin 6t \cos t} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 t} \Leftrightarrow \cos 5t \cos t = \pm \sin 6t \cos t \Leftrightarrow \cos 5t = \pm \cos \left(\frac{\pi}{2} - 6t \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 6t \right) \\ \cos 5t = \cos \left(\frac{\pi}{2} + 6t \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{22} + k \frac{2\pi}{11} \\ t = \frac{\pi}{2} - k2\pi \\ t = -\frac{\pi}{22} + k \frac{2\pi}{11} \\ t = -\frac{\pi}{2} - k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Do $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ nên hai họ nghiệm $t = \pm \frac{\pi}{2} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ không thỏa mãn.

Với hai họ nghiệm $t = \pm \frac{\pi}{22} + k \frac{2\pi}{11}$ ta tìm được 10 giá trị t thỏa mãn.

$$t \in \left\{ \pm \frac{\pi}{22}; \pm \frac{3\pi}{22}; \pm \frac{5\pi}{22}; \pm \frac{7\pi}{22}; \pm \frac{9\pi}{22} \right\}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y; z) = \left(\tan t; \tan 3t - \tan t; \tan t - \frac{1}{\sin 6t} \right)$

Với $t \in \left\{ \pm \frac{\pi}{22}; \pm \frac{3\pi}{22}; \pm \frac{5\pi}{22}; \pm \frac{7\pi}{22}; \pm \frac{9\pi}{22} \right\}$.

Câu 18. Tìm tất cả các nghiệm thực của hệ phương trình sau.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{1997} = 1997 \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{1997}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{1997}^3 \end{cases}$$

Ukraine MO 1997

Giải

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n + \dots + x_{1997}^n$. Theo bất đẳng thức lũy thừa trung bình ta có

$$\left(\frac{S_4}{1997} \right)^{\frac{1}{4}} \geq \frac{S_1}{1997} = 1 \quad \text{và} \quad \left(\frac{S_4}{1997} \right)^{\frac{1}{4}} \geq \left(\frac{S_3}{1997} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{S_4}{1997} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Do đó $\frac{S_4}{1997} \leq 1$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_{1997} = 1$.

Câu 19. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3 \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9 \\ x_6 + x_7 + x_8 = -6 \\ x_7 + x_8 + x_1 = -2 \\ x_8 + x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Moscow MO

Giải

Cộng về theo về các phương trình trong hệ ta được

$$3(x_1 + x_2 + \dots + x_8) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 0.$$

Lại cộng ba phương trình. thứ nhất, thứ tư và thứ bảy trong hệ ta tìm được $x_1 = 1$.

Tương tự như vậy ta sẽ tìm được các ẩn còn lại.

Vậy $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4; x_5 = -4; x_6 = -3; x_7 = -2; x_8 = 1$.

Câu 20. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 11x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 0 \\ 15x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 12x_4 - 3x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + 17x_5 + x_6 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 16x_6 + 2x_7 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 19x_7 = 0 \end{cases}$$

Moscow MO

Giải

Nhận xét rằng hệ đã cho có tính chất là hệ số a_k của x_k trong phương trình thứ k có môđun lớn hơn tổng các môđun của tất cả các hệ số còn lại. Vận dụng điều này ta giả sử x_m là số lớn nhất theo môđun của các số $x_1; x_2; \dots; x_7$. Thế thì trong phương trình thứ m số hạng $a_m x_m$ lớn hơn theo môđun tổng của tất cả các số hạng còn lại. Do nó là lớn nhất theo module nên hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = x_2 = \dots = x_7 = 0.$$

Câu 21. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{2z}{z+1} = 1 \\ 8^9 \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot z^2 = 1 \end{cases}; x, y, z > 0.$$

Giải

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{2z}{z+1} \\ \frac{1}{y+1} = \frac{3x}{x+1} + \frac{3y}{y+1} + \frac{2z}{z+1} \\ \frac{1}{z+1} = \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho 8 số ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} &= \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} + \frac{z}{z+1} \\ &\geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^3 y^4 z^2}{(x+1)^2 (y+1)^4 (z+1)^2}} \end{aligned} \quad (1)$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\frac{1}{y+1} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^3 y^3 z^2}{(x+1)^2 (y+1)^3 (z+1)^2}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{z+1} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^3 y^4 z}{(x+1)^3 (y+1)^4 (z+1)^2}} \quad (3)$$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)^3} \cdot \frac{1}{(y+1)^4} \cdot \frac{1}{(z+1)^3} &\geq 8^9 \cdot \sqrt[8]{\frac{x^{24} \cdot y^{32} \cdot z^{16}}{(x+1)^{24} \cdot (y+1)^{32} \cdot (z+1)^{16}}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^3} \cdot \frac{1}{(y+1)^4} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} &\geq 8^9 \cdot \frac{x^3 y^4 z^2}{(x+1)^3 (y+1)^4 (z+1)^2} \\ \Leftrightarrow 8^9 \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot z^2 &\leq 1. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1} = \frac{z}{z+1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{8}$.

Câu 22. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} = \sqrt{x^2 + xz + z^2} \\ x + y + z \leq 11 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{\left(\frac{1}{2}x - y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2} + \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}z\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(x - z)^2 + \frac{3}{4}(x + z)^2} \\ x + y + z \leq 11 \end{cases}$$

Trong mặt phẳng tọa độ, xét các vector sau $\vec{a} = \left(\frac{1}{2}x - y; \frac{\sqrt{3}}{2}x\right); \vec{b} = \left(y - \frac{1}{2}z; \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$.

Thế thì $\vec{a} + \vec{b} = \left(\frac{1}{2}(x - z); \frac{\sqrt{3}}{2}(x + z)\right)$. Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$ ta được.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}x - y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2} + \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}z\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2} \geq \sqrt{\frac{1}{4}(x - z)^2 + \frac{3}{4}(x + z)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a} = k\vec{b}, k > 0$ hoặc một trong hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ là $\vec{0}$.

Nhưng do $x, y, z > 0$ nên $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Khi đó $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = k\left(y - \frac{1}{2}z\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x = k\frac{\sqrt{3}}{2}z \end{cases}, k > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - y = k\frac{\sqrt{3}}{2}z \\ x = kz \end{cases}, k > 0$.

Bây giờ, hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} y = \frac{k}{k+1}z \\ x = kz \\ z + kz + \frac{k}{k+1}z \leq 11 \end{cases}, k > 0; x, y, z \in \mathbb{Z}^+.$

Lần lượt thay k bởi các giá trị thích hợp ứng với z ta được các nghiệm nguyên dương của hệ.

Câu 23. Tìm tất cả các số thực $x, y, z \neq 0$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) = xyz \\ (x^4 + x^2y^2 + y^4)(y^4 + y^2z^2 + z^4)(z^4 + z^2x^2 + x^4) = x^3y^3z^3 \end{cases}$$

Indian MO 2011

Giải

Nhận xét $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

Với $xyz \neq 0$ ta chia vế theo vế của phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai trong hệ ta được

$$(x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)(z^2 - zx + x^2) = x^2 y^2 z^2.$$

Hơn nữa, với mỗi số thực a, b ta có $a^2 - ab + b^2 \geq |ab|$

Từ $x^2 y^2 z^2 = |xy||yz||zx|$ ta nhận được

$$|xy||yz||zx| = (x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)(z^2 - zx + x^2) \geq |xy||yz||zx|$$

Điều này xảy ra nếu $x^2 - xy + y^2 = |xy|$; $y^2 - yz + z^2 = |yz|$; $z^2 - zx + x^2 = |zx|$ đồng thời xảy ra.

Xét phương trình $a^2 - ab + b^2 = |ab|$ với $a, b \neq 0$.

- Nếu $ab < 0$ thì $a^2 - ab + b^2 = -ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$ (vô lý)
- Nếu $ab > 0$ thì $a^2 - ab + b^2 = ab \Leftrightarrow (a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Bây giờ, đối với bài toán này ta thu được $x = y = z$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ phương trình đã cho ta được

$$27x^6 = x^3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm thực duy nhất là $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 24. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \\ \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 \end{cases}.$$

Giải

Vì $a + b + c = 1$ nên $VT(2) = abc + \frac{1}{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1$.

Ta sẽ đi chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$abc + \frac{1}{abc} = \left(abc + \frac{1}{27^2 abc}\right) + \frac{27^2 - 1}{27^2 abc} \geq 2\sqrt{abc \cdot \frac{1}{27^2 abc}} + \frac{27^2 - 1}{27^2} = \frac{730}{27} \Rightarrow VT(2) \geq \left(\frac{10}{3}\right)^3$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Vậy hệ có nghiệm là $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Câu 25. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^{2012} + y^{2012} + z^{2012} = 3 \end{cases}; x, y, z \in \mathbb{R}$$

Giải

Xét các vector $\vec{u} = (x; y; z), \vec{v} = (1; 1; 1)$. Dễ thấy $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{3}$.

Suy ra $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} > 0 \Leftrightarrow x = y = z$.

Kết hợp với phương trình còn lại ta được $x = y = z = 1$.

Câu 26. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2t_1 - t_2 = a_1 \\ -t_1 + 2t_2 - t_3 = a_2 \\ -t_2 + 2t_3 - t_4 = a_3 \\ \dots \\ -t_{n-2} + 2t_{n-1} - t_n = a_{n-1} \\ -t_{n-1} + 2t_n = a_n \end{cases}$$

Kỳ thi đặc biệt tại Huế, 1981

Giải

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $t_1 - t_2 = a_1 - t_1$;

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có $t_2 - t_3 = a_1 + a_2 - t_1$;

Thay vào phương trình thứ ba của hệ ta có $t_3 - t_4 = a_1 + a_2 + a_3 - t_1$;

Thay vào phương trình thứ $n-1$ của hệ ta có $t_{n-1} - t_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - t_1$.

Cuối cùng ta có $t_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n - t_1$. Từ đó ta có

$$t_n = a_1 + \dots + a_n - t_1 ;$$

$$t_{n-1} = 2a_1 + \dots + 2a_{n-1} + a_n - 2t_1 ;$$

$$t_{n-2} = 3a_1 + \dots + 3a_{n-2} + 2a_{n-1} + a_n - 3t_1 ;$$

....

$$t_2 = (n-1)a_1 + (n-1)a_2 + (n-2)a_3 + \dots + a_n(n-1)t_1$$

$$t_1 = na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n - nt_1 .$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$t_1 = \frac{n}{n+1}a_1 + \frac{n-1}{n+1}a_2 + \dots + \frac{2}{n+1}a_{n-1} + \frac{1}{n+1}a_n ;$$

$$t_2 = \frac{n-1}{n+1}a_1 + \frac{2(n-1)}{n+1}a_2 + \dots + \frac{4}{n+1}a_{n-1} + \frac{2}{n+1}a_n ;$$

....

$$t_{n-1} = \frac{2}{n+1}a_1 + \frac{4}{n+1}a_2 + \dots + \frac{2(n-1)}{n+1}a_{n-1} + \frac{n-1}{n+1}a_n ;$$

$$t_n = \frac{1}{n+1}a_1 + \frac{2}{n+1}a_2 + \dots + \frac{n-1}{n+1}a_{n-1} + \frac{n}{n+1}a_n .$$

Câu 27. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + x(x-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16 \end{cases}$$

VMO 2004 bảng A

Giải

$$\text{Hệ đã cho tương đương với } \begin{cases} x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 2 \\ y(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 30 \\ z(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 2 \\ (y-z)(x^2 + y^2 + z^2) = 14 \\ (z-x)(x^2 + y^2 + z^2) = 14 \end{cases} \quad (I)$$

Dễ thấy. $(0;0;0)$ không phải là nghiệm của hệ (I) .

$$\text{Khi đó (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 2 \\ (y - z)(x^2 + y^2 + z^2) = 14 \\ y = 2z - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2x^2z + xz^2 = 2 \\ 5z^3 - 16xz^2 + 20x^2z - 16x^3 = 0 \\ y = 2z - x \end{cases} \quad (II)$$

Vì $x, z \neq 0$ nên đặt $t = \frac{z}{x}$. Từ phương trình thứ hai của hệ (II) ta có

$$5t^3 - 16t^2 + 20t - 16 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(5t^2 - 6t + 8) = 0 \Leftrightarrow t = 2. \text{ Suy ra } z = 2x.$$

$$\text{Ta có (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2x^2z + xz^2 = 2 \\ z = 2x \\ y = 2z - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(1; 3; 2)$.

Câu 28. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 252 \\ x^2t^2 + y^2z^2 = 2xyzt \end{cases}.$$

Giải

Hệ phương trình đã cho được viết lại dưới dạng.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ (x + t)^2 + (y + z)^2 - 2xt - 2yz = 50 \\ (x + t)[(x + t)^2 - 3xt] + (y + z)[(y + z)^2 - 3yz] = 252 \\ (xt - yz)^2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Phương trình thứ tư trong hệ (I) cho ta $xt = yz$. Đặt $x + t = a, y + z = b, xt = yz = c$ khi đó hệ thành

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ a^2 + b^2 - 4c = 50 \\ a(a^2 - 3c) + b(b^2 - 3c) = 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 12 \\ (a + b)^2 - 2ab - 4c = 50 \\ a^3 + b^3 - 3c(a + b) = 252 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 12 \\ ab + 2c = 47 \\ (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] - 36c = 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 12 \\ ab + 2c = 47 \\ ab + c = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \\ c = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 7 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x + t = 5 \\ y + z = 7 \\ xt = yz = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x + t = 5 \\ y + z = 7 \\ xt = yz = 6 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là

$$(2; 1; 6; 3), (2; 6; 1; 3), (3; 1; 6; 2), (3; 6; 1; 2), (1; 2; 3; 6), (1; 3; 2; 6), (6; 2; 3; 1), (6; 3; 2; 1).$$

Câu 29. Tìm tất cả các bộ $(x; y; z)$ với x, y, z là những số nguyên thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}.$$

Giải

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Ta có $(x+y)(y+z)(z+x) = \frac{(x+y+z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)}{3} = 8$.

Đặt $u = x+y; v = y+z; w = z+x$. Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên $uvw \in \mathbb{Z}$ mà $uvw = 8$ nên $u, v, w \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$.

Các ẩn x, y, z có vai trò bình đẳng trong hệ nên không mất tính tổng quát, giả sử $x \leq y \leq z \Rightarrow u \geq v \geq w$.

Khi đó $u+v+w = 2(x+y+z) = 6 \Rightarrow u \geq 2$.

- Xét $u = 2$ ta có $\begin{cases} v+w=4 \\ vw=4 \end{cases} \Leftrightarrow v=w=2$. Suy ra $x=y=z=1$.
- Xét $u = 4$ ta có $\begin{cases} v+w=2 \\ vw=1 \end{cases}$, không có nghiệm nguyên.
- Xét $u = 8$ ta có $\begin{cases} v+w=-2 \\ vw=1 \end{cases} \Leftrightarrow v=w=-1$.

Suy ra $x = -5; y = 4; z = 4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là $(1; 1; 1), (4; 4; -5), (4; -5; 4), (-5; 4; 4)$.

Câu 30. Tìm bộ ba số thực $(x; y; z)$ phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} \\ 4x + y + 3z = 1 \\ xyz < 0 \end{cases}; x, y, z \in \mathbb{R}.$

Giải

Điều kiện $x, y, z \neq 0$

Đặt $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = k$. Ta có $yz + 1 = kz; zx + 1 = kx$.

Từ đó suy ra $k^2x = k(zx + 1) = kzx + k = (yz + 1)x + k = xyz + x + k \Rightarrow (k^2 - 1)x = xyz + k$.

Tương tự $(k^2 - 1)y = xyz + k$. Suy ra $(k^2 - 1)(x - y) = 0$. Do $x \neq y$ nên $k = \pm 1$

Mặt khác $xyz = -k < 0$ nên $k = 1$. Khi đó

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x \neq 1; y = \frac{1}{1-x}, z = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow x \neq 1; y = \frac{1}{1-x}, z = 1 - \frac{1}{x}$$

Câu 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = -5 \\ (y-z)(y^2+z^2) = 13; x, y, z \in \mathbb{R} \\ (x-z)(x^2+z^2) = 40 \end{cases}$

Giải

Ta thấy $x = y$ hoặc $y = -z$ hoặc $x = -z$ không là nghiệm của hệ đã cho

Nhân phương trình thứ nhất, thứ hai, thứ ba của hệ phương trình đã cho lần lượt với $x - y; y + z; x + z$

thu được $\begin{cases} x^4 - y^4 = 5(y - x) \\ y^4 - z^4 = 13(y + z) \\ z^4 - x^4 = -40(x + z) \end{cases}$. Cộng vế theo vế của từng phương trình ta được

$$18y - 45x - 27z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2y - 5x}{3}$$

Ta có $\frac{(x+y)(x^2+y^2)}{(x-z)(x^2+z^2)} = \frac{-5}{40} = -\frac{1}{8}.$

Thay $z = \frac{2y-5x}{3}$ vào phương trình này và biến đổi ta thu được $y = -2x; z = -3x$

Câu 32. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x^2+y^2+z^2) = xyz+8 \\ y(x^2+y^2+z^2) = 2xyz-2 \\ z(x^2+y^2+z^2) = 3xyz+18 \end{cases} ; x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Giải

Đặt $a = x^2 + y^2 + z^2; b = xyz.$

Hệ phương trình thành
$$\begin{cases} xa = b+8 \\ ya = 2b-2 \\ za = 3b+18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2a^2 = b^2+2b+8 \\ y^2a^2 = 4b^2-8b+4 \\ z^2a^2 = 9b^2+108b+324 \end{cases}.$$

Cộng vế theo vế của 3 phương trình trong hệ ta được $a^3 = 14b^2 + 116b + 392.$

Nhân vế theo vế của ba phương trình trong hệ ta được $a^3b = (b+8)(2b-2)(3b+18).$

Suy ra $b(14b^2 + 116b + 392) = (b+8)(2b-2)(3b+18) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow b = -2 \Rightarrow a = 6.$

Câu 33. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-x^2} + \sqrt{y-y^2} + \sqrt{z-z^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}} \\ (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{cases} ; x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Giải

Điều kiện $0 \leq x, y, z \leq 1$

Giả sử $x = \max\{x, y, z\} \Rightarrow \begin{cases} x \geq y \\ x \geq z \end{cases}$, có 2 trường hợp.

- Nếu $x \geq y \geq z$ thì $(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \leq 0$. Hệ phương trình vô nghiệm
- Nếu $x \geq z \geq y$ thì $P = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}.$

Thật vậy!

$$\begin{aligned} 4P &= 4(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \leq 4(z-y)(x-z)(x+y+z) \\ &= 2(z-y) \left[(\sqrt{3}+1)(x-z) \right] \left[(\sqrt{3}-1)(x+y+z) \right] \\ &\leq \frac{1}{27} \left[2(z-y) + (\sqrt{3}+1)(x-z) + (\sqrt{3}-1)(x+y+z) \right]^3 \\ &= \frac{1}{27} \left[2\sqrt{3}x - (3-\sqrt{3})y \right]^3 \leq \frac{1}{27} (2\sqrt{3}x)^3 \leq \frac{8\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow P \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 1; y = 0; z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Tương tự cho các trường hợp $y = \max\{x, y, z\}; z = \max\{x, y, z\}.$

Câu 34. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z^2 + 2z(x + y) = 8; x, y, z \in \mathbb{R} . \\ z(y - x) = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

Giải

Cộng vế theo vế của phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai ta được

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2zx + 2xy = 12 \Leftrightarrow \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 = 6 .$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\begin{aligned} (zy - zx)^2 &= \left[(2y) \left(x + \frac{z}{2}\right) + (-2x) \left(y + \frac{z}{2}\right) \right]^2 \leq (4x^2 + 4y^2) \left[\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 \right] \\ &\Rightarrow (zy - zx)^2 \leq 8 \cdot 6 \Rightarrow z(y - x) \leq 4\sqrt{3} . \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} z(y - x) \geq 0 \\ x + \frac{z}{2} = y + \frac{z}{2} \\ \frac{x + \frac{z}{2}}{2y} = \frac{y + \frac{z}{2}}{-2x} \end{cases}$

Câu 35. Cho $a > 1$, giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+a} + \sqrt{y+a} + \sqrt{z+a} = 3\sqrt{a+\frac{1}{a}} \\ \sqrt{a-x} + \sqrt{a-y} + \sqrt{a-z} = 3\sqrt{a-\frac{1}{a}}; x, y \in \mathbb{R} . \end{cases}$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có được

$$A^2 \leq 3(3a + x + y + z); B^2 \leq 3(3a - x - y - z) .$$

Suy ra $A^2 + B^2 \leq 18a$. Lại có $A^2 + B^2 = 9\left(a + \frac{1}{a} + a - \frac{1}{a}\right) = 18a$.

Do đó
$$\begin{cases} \sqrt{x+a} = \sqrt{y+a} = \sqrt{z+a} = \sqrt{a+\frac{1}{a}} \\ \sqrt{a-x} = \sqrt{a-y} = \sqrt{a-z} = \sqrt{a-\frac{1}{a}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{a} .$$

Câu 36. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2-x)(3x-2z) = 3-z \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2 \\ y^2 = -z^2 + 6z \\ z \leq 3 \end{cases} .$$

Giải

Phương trình thức nhất có nghiệm $x \Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z \leq 0 \\ z \geq 3 \end{cases} . \quad (1)$

Phương trình thứ ba có nghiệm $y \Leftrightarrow -z^2 + 6z \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq z \leq 6 . \quad (2)$

Từ (1), (2) và kết hợp với $z \leq 3$ ta suy ra $z = 0$ hoặc $z = 3$.

Vậy hệ có 2 nghiệm $(1; 0; 0); (2; -3; 3)$.

Câu 37. Tìm tất cả các số thực a sao cho hệ phương trình sau có nghiệm thực x, y, z

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} = a-1 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} = a+1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$

Hệ phương trình tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}) + (\sqrt{y-1} + \sqrt{y+1}) + (\sqrt{z-1} + \sqrt{z+1}) = 2a \\ (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) + (\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1}) + (\sqrt{z+1} - \sqrt{z-1}) = 2 \end{cases}$$

Đặt $u = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}; v = \sqrt{y-1} + \sqrt{y+1}; s = \sqrt{z-1} + \sqrt{z+1}$

Do $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ nên $u \geq \sqrt{2}, v \geq \sqrt{2}, s \geq \sqrt{2}$. Ngược lại nếu $u \geq \sqrt{2}, v \geq \sqrt{2}, s \geq \sqrt{2}$, ta có

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{u} \Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \left(u + \frac{2}{u} \right) \Rightarrow x = \frac{1}{4} \left(u^2 + \frac{4}{u^2} \right) \geq 1$$

Tương tự đối với y, z . Do đó bài toán của ta đưa về bài toán tương đương

Tìm tất cả các số thực a sao cho hệ phương trình sau có nghiệm $u \geq \sqrt{2}, v \geq \sqrt{2}, s \geq \sqrt{2}$.

$$\begin{cases} u + v + s = 2a \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{s} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

- **Điều kiện cần.** Giả sử hệ phương trình (1) có nghiệm.

Theo bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* ta có $2a = (u + v + s) \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{s} \right) \geq 9 \Rightarrow a \geq \frac{9}{2}$

- **Điều kiện đủ.** Giả sử $a \geq \frac{9}{2}$. Chúng ta sẽ chứng minh hệ phương trình (1) có nghiệm

Lấy $s = 3$ (thỏa mãn $s \geq \sqrt{2}$). Khi đó (1) tương đương với $\begin{cases} u + v = 2a - 3 \\ u \cdot v = \frac{3(2a - 3)}{2} \end{cases}$

Tương đương u, v là hai nghiệm của tam thức bậc hai $t^2 - 2(2a - 3)t + \frac{3(2a - 3)}{2}$

$$\Rightarrow u, v = \frac{2a - 3 \pm \sqrt{(2a - 3)(2a - 9)}}{2}$$

Chú ý. Đặt $h = 2a - 9 \geq 0 \Rightarrow (h + 6 - 2\sqrt{2})^2 > (h + 3)^2 > h(h + 6)$. Tức là

$$(2a - 3) - 2\sqrt{2} > \sqrt{(2a - 3)(2a - 9)} \Rightarrow u > \sqrt{2}, v > \sqrt{2}.$$

Như vậy hệ phương trình (1) có nghiệm $u \geq \sqrt{2}, v \geq \sqrt{2}, s \geq \sqrt{2}$.

Tóm lại các số thực a cần tìm là tất cả các số thực $a \geq \frac{9}{2}$.

Câu 38. Tìm $p \in \mathbb{N}^*$ sao cho hệ $\begin{cases} \sum_{i=1}^p x_i = 4 \\ \sum_{i=1}^p x_i^{-1} = 4 \\ x_i > 0, \forall i \in \overline{1, p} \end{cases}$ có nghiệm. Với p tìm được hãy xác định tập hợp tất

cả các giá trị của tổng $\sum_{i=1}^p \frac{a_i}{1-a_i^2}$ với $a_i > 0$ và $\sum_{i=1}^p a_i^2 = 1$.

Đề chọn đội tuyển dự thi VMO – Thừa Thiên Huế

Giải

Do $16 = \left(\sum_{i=1}^p x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{x_i} \right) \geq p^2 \Rightarrow p \leq 4$.

- **Trường hợp 1.** $p = 4$. Khi đó $x_i = 1, i \in \overline{1, 4}$.

Vậy hệ có nghiệm.

- **Trường hợp 2.** $p = 3$. Chọn $x_1 = 1$ và $\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 \cdot x_3 = 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Nên (x_1, x_2, x_3) là nghiệm của hệ.

- **Trường hợp 3.** $p = 2$. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Nên (x_1, x_2) là nghiệm của hệ.

- **Trường hợp 4.** $p = 1$. Vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm khi $p = 2; p = 3; p = 4$.

1. Ta xét tập giá trị của $\sum_{i=1}^p \frac{a_i}{1-a_i^2}$.

Ta có $f(a_1, a_2, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^p \frac{a_i^2}{a_i(1-a_i^2)}$.

Xét hàm số $g(x) = x(1-x^2), 0 < x < 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta dễ dàng chỉ ra $\max_{(0;1)} g(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Do đó $f(a_1, a_2, \dots, a_p) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \sum_{i=1}^p a_i^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{p}{3} = 1$ hay $p = 3$.

2. Ta xét tập giá trị của $\sum_{i=1}^p a_i^2 = 1$

- Với $p = 2$ thì $f(a_1, a_2) = \frac{a_1}{a_2^2} + \frac{a_2}{a_1^2} \geq 2 \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \geq 2\sqrt{2}$ vì $a_1^2 + a_2^2 = 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, f(a_1, a_2) = \frac{a_1}{1-a_1^2} + \frac{\sqrt{1-a_1^2}}{a_1^2}$ liên tục trên $(0;1)$.

Khi $a_1 \rightarrow 0$ thì $f(a_1, a_2) \rightarrow +\infty$. Vậy $p = 2$, tập giá trị là $[2\sqrt{2}; +\infty)$.

- Với $p = 3$. Chọn $a_1 = \sqrt{1-2x}; a_2 = \sqrt{x}; a_3 = \sqrt{x}, 0 < x < \frac{1}{2}$ thỏa mãn giả thiết

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 - 2x + x + x = 1$$

Ta có $f(a_1, a_2, a_3) = \frac{\sqrt{1-2x}}{2x} + \frac{\sqrt{x}}{1-x} + \frac{\sqrt{x}}{1-x} = g(x)$ liên tục trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Có $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}; \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$. Vậy tập giá trị là $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

- Với $p = 4$. Khi đó ta có $f(a_1, a_2, \dots, a_p) > \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn $a_1 = \sqrt{1-2x}; a_2 = \sqrt{x}; a_3 = \sqrt{x}; a_4 = \sqrt{x}$ thỏa giả thiết

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1 - 3x + x + x + x = 1 \text{ với } 0 < x < \frac{1}{3}$$

Ta có $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{\sqrt{1-2x}}{2x} + \frac{\sqrt{x}}{1-x} + \frac{\sqrt{x}}{1-x} + \frac{\sqrt{x}}{1-x} = g(x)$ liên tục trên $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} g(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}; \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

Vậy tập giá trị là $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

Câu 39. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = m \\ y^2 + yz + z^2 = m^2 \\ xy + yz + zx = m^3 \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Đặt } X = x + \frac{y}{2}; Y = \frac{\sqrt{3}}{2}y; Z = \frac{\sqrt{3}}{2}(y + z); T = \frac{1}{2}(z - y).$$

$$\text{Ta được } x^2 + xy + y^2 = X^2 + Y^2; y^2 + yz + z^2 = Z^2 + T^2; \frac{\sqrt{3}}{2}(xy + yz + zx) = XZ + YT.$$

$$\text{Do đó ta có hệ } \begin{cases} X^2 + Y^2 = m \\ Z^2 + T^2 = m^2 \\ XZ + YT = \frac{\sqrt{3}}{2}m^3 \end{cases}. \text{ Chú ý } (X^2 + Y^2)(Z^2 + T^2) = (XZ + YT)^2 + (XT - YZ)^2.$$

$$\text{Do đó hệ đã cho có nghiệm thì } m \cdot m^2 \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}m^3\right)^2 \leq m^3 \left(m^3 - \frac{4}{3}\right) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq m^3 \leq \frac{4}{3} \Rightarrow 0 \leq m \leq \sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

$$\text{Xét } m = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}. \text{ Ta có hệ } \begin{cases} XT = YZ & (1) \\ XZ + YT = \frac{\sqrt{3}}{2}m^3 & (2) \\ Z^2 + T^2 = m^2 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) có thể đặt } X = uZ, Y = uT, \text{ thay vào (2), (3) ta có } u = \frac{\sqrt{3}}{2}m.$$

$$\text{Do đó ta có hệ } \begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{2}mZ \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2}mT \\ Z^2 + T^2 = m^2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \frac{2m+3}{2m}y \\ z = \frac{m+2}{m}y \\ y^2 = \frac{m^2}{3m^2 + 4m + 4} \end{cases} \text{ với } m = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

Vậy với $m = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 40. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} z^2 + 2xyz = 1 \\ 3x^2y^2 + 3xy^2 = 1 + x^3y^4 \\ z + zy^4 + 4y^3 = 4y + 6y^2z \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Giải

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} z^2 + 2xyz = 1 & (1) \\ 3x^2y^2 + 3xy^2 = 1 + x^3y^4 & (2) \\ z + zy^4 + 4y^3 = 4y + 6y^2z & (3) \end{cases}$$

Vì $z = 0$ không thỏa hệ pt nên $(1) \Leftrightarrow xy = \frac{1-z^2}{2z}$. Đặt $z = \tan u \left(u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \setminus \{0\} \right)$ thì $xy = \cot 2u$.

Từ (2) ta có $y = \frac{3\cot^2 2u - 1}{\cot^3 2u - 3\cot 2u} = \tan 6u$.

Vậy $x = \cot 2u \cdot \cot 6u$. Thay vào (3) ta được $z = \frac{4\tan 6u - 4\tan^3 6u}{1 + \tan^4 6u - 6\tan^2 6u} = \tan 24u$.

Vậy $\tan u = \tan 24u \Rightarrow u = \frac{k\pi}{23} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Vì $u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \setminus \{0\}$ nên $u \in \left\{ \pm \frac{\pi}{23}, \dots, \pm \frac{11\pi}{23} \right\}$.

Vậy $\tan u = \tan 24u \Rightarrow u = \frac{k\pi}{23} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Vì $u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \setminus \{0\}$ nên $u \in \left\{ \pm \frac{\pi}{23}, \dots, \pm \frac{11\pi}{23} \right\}$.

Vậy hệ có nghiệm $(x, y, z) = (\cot 2t \cdot \cot 6t; \tan 6t; \tan t)$ trong đó $t \in \left\{ \pm \frac{\pi}{23}, \dots, \pm \frac{11\pi}{23} \right\}$.

Câu 41. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3y = x^3 - 12 \\ -y + 4z = y^3 - 6 \\ 9z + 2x = z^3 + 32 \end{cases}$$

Đề thi chọn đội tuyển ĐH KHTN Hà Nội, vòng 1

Giải

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} 3y + 6 = x^3 - x - 6 \\ 4z + 16 = y^3 + y + 10 \\ 2x - 4 = z^3 - 9z + 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(y + 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 3) \\ 4(z + 4) = (y + 2)(y^2 - 2y + 5) \\ 2(x - 2) = (z + 4)(z^2 - 4z + 7) \end{cases}$$

Nhân từng vế các phương trình của hệ, ta có

$$24(x - 2)(y + 2)(z + 4) = (x - 2)(y + 2)(z + 4) \left[(x^2 + 2x + 3)(y^2 - 2y + 5)(z^2 - 4z + 7) \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)(y + 2)(z + 4) = 0 \\ (x^2 + 2x + 3)(y^2 - 2y + 5)(z^2 - 4z + 7) = 24 \end{cases}$$

Nếu $(x - 2)(y + 2)(z + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = -4 \end{cases}$

Ta thấy rằng nếu $x = 2$ thì theo phương trình thứ nhất, $y = -2$; theo phương trình thứ hai, $z = -4$ và hệ đã cho có nghiệm $(x; y; z) = (2; -2; -4)$. Tương tự nếu $y = -2$ hoặc $z = -4$.

Nếu $(x^2 + 2x + 3)(y^2 - 2y + 5)(z^2 - 4z + 7) = 24 \Leftrightarrow [(x+1)^2 + 2][(y-1)^2 + 4][(z-2)^2 + 3] = 24$.

Ta thấy rằng

$$[(x+1)^2 + 2][(y-1)^2 + 4][(z-2)^2 + 3] \geq 2.3.4 = 24$$

Nên đẳng thức phải xảy ra, tức là $x = -1, y = 1, z = 2$.

Thử lại, ta thấy bộ này không thỏa mãn hệ đã cho.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x; y; z) = (2; -2; -4)$.

Câu 42. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 = 3x - 12y + 50 \\ y^3 = 12y + 3z - 2 \\ z^3 = 27x + 27z \end{cases}$$

Đề thi chọn đội tuyển trường THPT Phan Chu Trinh, Đà Nẵng

Giải

Ta có
$$\begin{cases} x^3 = 3x - 12y + 50 \Leftrightarrow 48 - 12y = x^3 - 3x - 2 \Leftrightarrow 12(4 - y) = (x - 2)(x + 1)^2 & (1) \\ y^3 = 12y + 3z - 2 \Leftrightarrow 3z - 18 = y^3 - 12y + 16 \Leftrightarrow 3(z - 6) = (y - 4)(y + 2)^2 & (2) \\ z^3 = 27x + 27z \Leftrightarrow 27x - 54 = z^3 - 27z - 54 \Leftrightarrow 27(x - 2) = (z - 6)(z + 3)^2 & (3) \end{cases}$$

Nếu $x = -1$ thì $(x - 2)(x + 1)^2 = 0$, từ (1) suy ra $y = 4$ hay $(y - 4)(y + 2)^2 = 0$, từ (2) suy ra $z = 6$ hay $(z - 6)(z + 3)^2 = 0$, từ (3) suy ra $x = 2$, mâu thuẫn.

Do đó $x = -1$ không thỏa mãn hệ, ta chỉ xét $x \neq -1 \Rightarrow (x + 1)^2 > 0$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta cũng có $(y + 2)^2 > 0, (z + 3)^2 > 0$.

- Từ (2) suy ra $y - 4, z - 6$ cùng dấu.
- Từ (3) suy ra $x - 2, z - 6$ cùng dấu.

Từ đó, ta được $x - 2, y - 4$ cùng dấu. Hơn nữa, từ (1) ta thấy $x - 2, -(y - 4)$ cùng dấu, tức là

$$0 \leq (x - 2)(y - 4) \leq 0.$$

Do đó, $x = 2$ hoặc $y = 4$. Từ các phương trình (1), (2) và (3) dễ thấy cả hai trường hợp trên đều cho ta kết quả là $x = 2, y = 4, z = 6$. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (2; 4; 6)$.

Câu 43. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{5(x+y)}{x+y+6xy} + \frac{6(x+z)}{x+z+5xz} = 4 \\ \frac{6(z+y)}{z+y+4zy} + \frac{4(x+y)}{x+y+6xy} = 5 \\ \frac{4(x+z)}{x+z+5xz} + \frac{5(y+z)}{y+z+4yz} = 6 \end{cases}$$

Đề thi chọn đội tuyển trường PTNK, TPHCM

Giải

Đặt $a = \frac{x+y}{x+y+6xy}$, $b = \frac{y+z}{y+z+4yz}$, $c = \frac{z+x}{z+x+5zx}$.

$$\text{Hệ đã cho trở thành } \begin{cases} 5a+6c=4 \\ 6b+4a=5 \\ 4c+5b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{4-5a}{6} \\ 4a+6b=5 \\ 5b+4\left(\frac{4-5a}{6}\right)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{8} \\ b=\frac{3}{4} \\ c=\frac{9}{16} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \frac{x+y}{x+y+6xy}=\frac{1}{8} \\ \frac{y+z}{y+z+4yz}=\frac{3}{4} \\ \frac{z+x}{z+x+5zx}=\frac{9}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x+y)=6xy \\ y+z=12yz \\ 7(z+x)=45zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{6}{7} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=12 \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{45}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{-33}{14} \\ \frac{1}{y}=\frac{45}{14} \\ \frac{1}{z}=\frac{123}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-14}{33} \\ y=\frac{14}{45} \\ z=\frac{14}{124} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x; y; z) = \left(\frac{-14}{33}; \frac{14}{45}; \frac{14}{124}\right)$.

Câu 44. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 = y(x^2 + 1) \\ 3y^3 = z(y^4 + y^2 + 1) \\ 4z^4 = x(z^6 + z^4 + z^2 + 1) \end{cases}$$

Giải

• **Trường hợp 1.** Với $x = 0$ thì hệ có nghiệm $x = y = z = 0$.

• **Trường hợp 2.**

Với $x \neq 0$ để hệ có nghiệm thì $x > 0, y > 0, z > 0$.

Giả sử (x, y, z) là nghiệm của hệ ta có

$$\begin{cases} 2x^2 = y(1 + x^2) \geq 2xy \Leftrightarrow x \geq y \text{ (do } x^2 + 1 \geq 2x) \\ 3y^3 = z(y^4 + y^2 + 1) \geq 3zy^2 \Leftrightarrow y \geq z \text{ (do } y^4 + y^2 + 1 \geq 3y^2) \\ 4z^4 = x(z^6 + z^4 + z^2 + 1) \geq 4xz^3 \Leftrightarrow z \geq x \text{ (do } z^6 + z^4 + z^2 + 1 \geq 4z^3) \end{cases}$$

Từ hệ suy ra $x = y = z$. Thay vào hệ ban đầu ta được hai nghiệm là $x = y = z = 0; x = y = z = 1$.

Câu 45. Tìm tất cả các nghiệm dương của phương trình

$$(x + y + z)^2(10x + 4y + z) = \frac{243xyz}{2}$$

Leonard Giugiuic.

Giải – Sefket Arslanagic

Đầu tiên ta thấy $(x, y, z) = (2, 3, 4)$ là một nghiệm của phương trình

$$(x + y + z)^2(10x + 4y + z) = (81)(36) = (243)(12) = \frac{243xyz}{2}$$

Ta chứng minh rằng nghiệm của hệ có dạng $k(2, 3, 4)$ với mọi $k > 0$.

Đặt $x = 2u, y = 3v$, và $z = 4w$. Suy ra $u > 0, v > 0, w > 0$. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x + y + z = 2u + 3v + 4w = u + u + v + v + v + w + w + w + w \geq 9\sqrt[9]{u^2v^3w^4}$$

Nên $(x + y + z)^2 \geq 81\sqrt[9]{u^4v^6w^8}$. Tương đương,

$$10x + 4y + z = 4(5u + 3v + w) \geq (4)(9)\sqrt[9]{u^5v^3w}$$

Từ (1) và (2), ta được

$$(x + y + z)^2(10x + 4y + z) \geq (81)(36)uvw = (3^6)(2^2)uvw = (3^6)(2^2)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{y}{3}\right)\left(\frac{z}{4}\right) = \frac{243}{2}xyz$$

Từ giả thiết

$$(x+y+z)^2(10x+4y+z) = \frac{243}{2}xyz$$

Ta có được $u=v=w=k$ với mọi $k>0$, nên $(x,y,z)=k(2,3,4)$.

Câu 46. Giải hệ phương trình	$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \dots + \sqrt{1+x_{2013}} = 2013\sqrt{\frac{2014}{2013}} \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_{2013}} = 2013\sqrt{\frac{2014}{2013}} \end{cases}$
-------------------------------------	--

Giải

Điều kiện $-1 \leq x_i \leq 1$ ($i=1,2,3,\dots,2013$).

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$2013^2 \frac{2014}{2013} = \left(\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \sqrt{1+x_3} + \dots + \sqrt{1+x_{2013}} \right)^2 \leq 2013(2013+x_1+x_2+\dots+x_{2013})$$

$$\text{Suy ra } x_1+x_2+\dots+x_{2013} \geq 1 \quad (1)$$

Lại có

$$2013^2 \frac{2014}{2013} = \left(\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \sqrt{1-x_3} + \dots + \sqrt{1-x_{2013}} \right)^2 \leq 2013(2013-x_1-x_2-\dots-x_{2013})$$

$$\text{Suy ra } x_1+x_2+\dots+x_{2013} \leq 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x_1+x_2+\dots+x_{2013}=1$. Do đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 1+x_1=1+x_2=\dots=1+x_{2013} \\ 1-x_1=1-x_2=\dots=1-x_{2013} \\ x_1+x_2+\dots+x_{2013}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=x_2=\dots=x_{2013}=\frac{1}{2013}$$

Vậy nghiệm của hệ là $x_1=x_2=\dots=x_{2013}=\frac{1}{2013}$.

Câu 47. Giải hệ phương trình	$\begin{cases} x+y+\sqrt{2x^2+2xy+3y^2}=4 & (1) \\ x^2y=32z^3 & (2) \\ 3xz^2+6xz+3z^3+15z^2+16z=2x+6 & (3) \end{cases}$
-------------------------------------	---

Giải

Từ giả thiết đã cho dễ dàng nhận thấy $x+y<4$.

Do đó phương trình (1) có thể viết thành $2x^2+2xy+3y^2=(4-x-y)^2$.

Từ đây bằng một số biến đổi, ta có $(x+y)^2+2(y+2)^2=40$, hay $2\left(2+\frac{x}{2}\right)^2+(y+2)^2=20$

Tới đây sử dụng lần lượt các bất đẳng thức AM – GM và Holder, ta có

$$\left(2+\frac{x}{2}\right)^2 + \left(2+\frac{x}{2}\right)^2 + (y+2)^2 \geq 3 \left[\left(2+\frac{x}{2}\right)^2 (y+2) \right]^{\frac{2}{3}} \geq \left(2+\sqrt[3]{\frac{x^2y}{4}}\right)^2$$

$$\text{Từ đó suy ra } 20 \geq 3 \left(2+\sqrt[3]{\frac{x^2y}{4}}\right)^2. \text{ Hay } x^2y \leq 32 \left(\sqrt{\frac{5}{3}}-1\right)^3.$$

$$\text{Từ (3) ta biến đổi về } [3(z+1)^2-5](x+z+3)=0.$$

$$\text{Vậy ta có } z=\left(\sqrt{\frac{5}{3}}-1\right). \text{ Suy ra } x^2 \leq 32z^3.$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là $x = 2y = 4z = 4\left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1\right)$.

Câu 48. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{30; 4; 14; 10\}$ là bốn tham số đôi một phân biệt và x, y, z, t là các ẩn số. Giải

$$\text{hệ phương trình } \begin{cases} \frac{x}{a-30} + \frac{y}{a-4} + \frac{z}{a-14} + \frac{t}{a-10} = 1 \\ \frac{x}{b-30} + \frac{y}{b-4} + \frac{z}{b-14} + \frac{t}{b-10} = 1 \\ \frac{x}{c-30} + \frac{y}{c-4} + \frac{z}{c-14} + \frac{t}{c-10} = 1 \\ \frac{x}{d-30} + \frac{y}{d-4} + \frac{z}{d-14} + \frac{t}{d-10} = 1 \end{cases}$$

Giải

Với mỗi bộ (x, y, z, t) xét đa thức $P(s) \in \mathbb{R}[s]$, $\deg P = 4$ được cho bởi

$$P(s) = (s-30)(s-4)(s-14)(s-10) - x(s-4)(s-14)(s-10) - y(s-30)(s-14)(s-10) - z(s-30)(s-4)(s-10) - t(s-30)(s-4)(s-14).$$

Ta có (x, y, z, t) là nghiệm của hệ đã cho $\Leftrightarrow a, b, c, d$ là 4 nghiệm phân biệt của phương trình $P(s) = 0$ tức là $P(s) \equiv e(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) = Q(s)$ (1)

Do $\deg(P-Q) \leq 3$ nên điều kiện cần và đủ để có (1) là đa thức $P-Q$ triệt tiêu tại ít nhất là 4 điểm $s_1 = 30; s_2 = 4; s_3 = 14; s_4 = 10$.

$$\text{Suy ra } P(30) = Q(30); P(4) = Q(4); P(14) = Q(14); P(10) = Q(10) \quad (2)$$

Cuối cùng

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -8320x = (a-30)(b-30)(c-30)(d-30) \\ 1560y = (a-4)(b-4)(c-4)(d-4) \\ 640z = (a-14)(b-14)(c-14)(d-14) \\ -480t = (a-10)(b-10)(c-10)(d-10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{(a-30)(b-30)(c-30)(d-30)}{8320} \\ y = \frac{(a-4)(b-4)(c-4)(d-4)}{1560} \\ z = \frac{(a-14)(b-14)(c-14)(d-14)}{640} \\ t = -\frac{(a-10)(b-10)(c-10)(d-10)}{480} \end{cases}.$$

$$\text{Câu 49. Giải hệ phương trình } \begin{cases} xyz = 32 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 = 96 \quad (*) \\ x, y, z > 0 \end{cases}$$

Giải

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned} x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 &= x^2 + z^2 + z^2 + 4y^2 + 4xy \\ &\geq 2xz + 4yz + 4xy \geq 3\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 4x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} = 3\sqrt{32^2} = 96 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 \geq 96$.

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = z \\ z = 2y \\ 2xz = 4yz = 4xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases}.$$

Thế vào hệ (*), ta được $2y \cdot y \cdot 2y = 32 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y; z) = (4; 2; 4)$.

Câu 50. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2 - yz}{2x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2 - xz}{2y^2 + x^2 + z^2} + \frac{z^2 - xy}{2z^2 + y^2 + x^2} = 0 \\ x^2y + y^2z - \left(\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}} + 2\sqrt{yz} + 4\sqrt{xz} \right) = 5 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y, z > 0$.

Ta sẽ chứng minh $\frac{x^2 - yz}{2x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2 - xz}{2y^2 + x^2 + z^2} + \frac{z^2 - xy}{2z^2 + y^2 + x^2} \geq 0$

Để ý rằng $\frac{2(x^2 - yz)}{2x^2 + y^2 + z^2} = 1 - \frac{(y + z)^2}{2x^2 + y^2 + z^2}$. Thiết lập các biểu thức còn lại tương tự.

Ta quy về chứng minh

$$3 \geq \frac{(y + z)^2}{2x^2 + y^2 + z^2} + \frac{(x + z)^2}{2y^2 + z^2 + x^2} + \frac{(x + y)^2}{2z^2 + x^2 + y^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* ta có

$$\sum \frac{(y + z)^2}{(x^2 + y^2) + (y^2 + z^2)} \leq \sum \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{z^2}{z^2 + y^2} \right) = 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$

Thay vào phương trình thứ hai ta được $2y^3 = 12 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{6}$

Vậy hệ có nghiệm $x = y = z = \sqrt[3]{6}$.

Câu 51. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + xy = z^{2^{2003}} + 2z^{2^{2002}} & (1) \\ x^4 + y^4 = 2z^{2^{2004}} & (2) \\ (x + y)^{z-1} = (z + 2004)^{x-y} & (3) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình thứ hai ta có $2z^{2^{2004}} = x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2 \Rightarrow xy \leq z^{2^{2003}} \quad (*)$

Ta lại có $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \Rightarrow (x + y)^4 \leq 2(x^2 + y^2)^2 \leq 8(x^4 + y^4) = 16z^{2^{2004}} \Rightarrow x + y \leq 2z^{2^{2002}} \quad (**)$

Từ (*) và (**) ta có $x + y + xy \leq z^{2^{2003}} + 2z^{2^{2002}}$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z^{2^{2002}}$.

Hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} x = y = z^{2^{2002}} \\ (2x)^{z-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = 1 \\ x = y = \frac{1}{2}; z = \pm 2^{\frac{1}{2^{2002}}} \end{cases}$$

Câu 52. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^5 + y^5 + z^5 = \frac{5\sqrt{6}}{36} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Giải

Với $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ta có

$$0 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x(y + z) + 2yz = 1 - 2x^2 + 2yz$$

Nên $yz = x^2 - \frac{1}{2}$. Mặt khác $yz \leq \frac{y^2 + z^2}{2} = \frac{1 - x^2}{2}$, suy ra $x^2 - \frac{1}{2} \leq \frac{1 - x^2}{2}$, do đó $-\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$ (*)

Khi đó $P = x^5 + (y^2 + z^2)(y^3 + z^3) - y^2z^2(y + z)$

$$\begin{aligned} &= x^5 + (1 - x^2) \left[(y^2 + z^2)(y + z) - yz(y + z) \right] + \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 x \\ &= x^5 + (1 - x^2) \left[-x(1 - x^2) + x \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \right] + \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 x = \frac{5}{4} (2x^3 - x) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - x$, với $-\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$, suy ra $f'(x) = 6x^2 - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ta có $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{9}$, $f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}$. Do đó $f(x) \leq \frac{\sqrt{6}}{9}$, suy ra $P \leq \frac{5\sqrt{6}}{36}$.

Vậy nghiệm của hệ là $x = \frac{\sqrt{6}}{3}; y = z = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ và các hoán vị.

Câu 53. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = 3\sqrt{3} \\ x + y + z = 1 \\ xy + yz + zx = \frac{7}{27} + 2xyz \quad (*) \end{cases}$$

Giải

Bài này có thể giải bằng cách bình thường vẫn cho ta kết quả, nhưng để ý phương trình (*) chính là bất đẳng thức trong đề thi IMO 1984. Như thế hệ có liên quan đến bất đẳng thức. Phương pháp bất đẳng thức sẽ cho ta lời giải đẹp và gọn hơn trong bài toán này.

Phương trình (*) tương đương $xy + yz + zx - 2xyz = \frac{7}{27}$. Lại có

$$\begin{aligned} &xyz(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) = (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) \\ &\Rightarrow 9xyz \geq 4(xy + yz + zx) - 1 \Leftrightarrow 2xyz \geq \frac{8(xy + yz + zx) - 2}{9} \end{aligned}$$

Ta phải chứng minh $xy + yz + zx \leq \frac{1}{3} = \frac{(x + y + z)^2}{3}$, bất đẳng thức này đúng theo AM - GM

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$. Thử lại vào hệ phương trình thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ là $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Cách 2. Điều kiện $x > 0, y > 0, z > 0$.

Kết hợp với (2): $x + y + z = 1$ ta thấy trong các số x, y, z phải có ít nhất 1 số không lớn hơn $\frac{1}{3}$, không mất tính tổng quát ta giả sử $z \leq \frac{1}{3}$. Do đó $z \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$.

Đặt $S = xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - 2z) + z(x + y) = xy(1 - 2z) + z(1 - z)$.

Do $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \Rightarrow S \leq \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 (1-2z) + z(1-z) = \frac{1}{4}(-2z^3 + z^2 + 1)$.

Xét hàm số $f(z) = \frac{1}{4}(-2z^3 + z^2 + 1)$. Ta có $f'(z) = \frac{1}{4}(-6z^2 + 2z) = \frac{1}{2}z(-3z + 1) \geq 0, \forall z \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$

Vậy $f(z) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}, \forall z \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$. Do đó $S \leq \frac{7}{27}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y, z = \frac{1}{3}$.

Thay vào (2), ta được $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 54. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2010^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 2010^3 \end{cases}$$

Đề thi chọn đội tuyển Ninh Bình

Giải

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có $|x|, |y|, |z| \leq 2010$.

Suy ra $x^3 + y^3 + z^3 \leq |x^3| + |y^3| + |z^3| \leq 2010(x^2 + y^2 + z^2) = 2010^3$.

Từ phương trình thứ hai suy ra đẳng thức phải xảy ra, tức là

$$\begin{cases} x^2(2010 - x) = 0 \\ y^2(2010 - y) = 0 \\ z^2(2010 - z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 2010 \\ y = 0 \vee y = 2010 \\ z = 0 \vee z = 2010 \end{cases}$$

Kết hợp với phương trình thứ nhất, ta thấy hệ đã cho có ba nghiệm phân biệt là

$$(x; y; z) = (2010, 0, 0), (0, 2010, 0), (0, 0, 2010).$$

Câu 55. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c + d = 3 \\ ac + bd + cd = \frac{9 + 6\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Diễn đàn Boxmath

Giải

Phân tích. Rõ ràng nếu như đã làm quen với các bài hệ có hình thức kiểu như thế này thì chúng ta có thể nghĩ ngay tới phương pháp hình học vì chỉ có 3 phương trình mà có tới 4 ẩn liên. Với những gì chúng ta đã phân tích ở trên, ý tưởng hình học căn bản của ta sẽ là xét đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ khi đó điểm $M(a, b)$ sẽ thuộc đường tròn này. Còn ở phương trình thứ 2 ta xét đường thẳng $(d): x + y = 3$ thì điểm $N(c, d)$ sẽ thuộc đường thẳng này.

Quỹ tích những điểm $M(a, b)$ thỏa phương trình thứ nhất là đường tròn $(O; 1)$.

Quỹ tích những điểm $N(c, d)$ thỏa mãn phương trình thứ hai là đường thẳng $(d): x + y = 3$

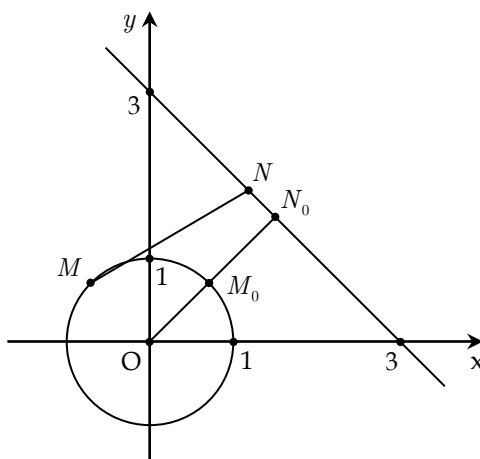
Hơn nữa ta lại có

$$\begin{aligned} 2(ac + bd + cd) &= 2ac + 2bd + (c + d)^2 - c^2 - d^2 \\ &= 2ac + 2db + 10(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \\ &= 10 - (a - c)^2 - (b - d)^2 = 10 - MN^2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } 10 - MN^2 = \frac{9 + 6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow MN^2 = \frac{11 - 6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow MN = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Do đó ta sẽ tìm hai điểm M, N nằm trên đường tròn $(O; 1)$ và đường thẳng $(d): x + y = 3$ sao cho khoảng cách giữa chúng là $\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Lời giải



Gọi N_0 là hình chiếu của O lên MN , và M_0 và M'_0 là giao điểm của ON_0 với đường tròn đơn vị $(O; 1)$

Nhận xét rằng nếu hệ phương trình có nghiệm ta phải có $NM_0 \leq MN \leq NM'_0$, do đó ta sẽ tính N_0M_0 và

$$N_0M'_0. \text{ Ta có } M_0N_0 = ON_0 - 1 = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = MN$$

Từ đó suy ra $M \equiv M_0$ và $N \equiv N_0$.

Dễ dàng tính được $M_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $N_0 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Từ đó suy ra nghiệm của hệ.

Nhận xét. Bài toán rất đặc thù và may mắn là MN đạt giá trị nhỏ nhất. Trong một vài trường hợp số $\frac{9+6\sqrt{2}}{4}$ của ta thay bằng số khác mà vẫn thỏa mãn hệ có nghiệm và MN không đạt cực trị thì việc làm bài toán sẽ rất khó khăn và hệ sẽ có vô số nghiệm, do đó thông thường các bài toán dạng này sẽ là vô nghiệm hay có nghiệm duy nhất.

Câu 56. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo m, n, p, k

$$(I) \begin{cases} \sqrt{x-m^2} + \sqrt{y-m^2} = k \\ \sqrt{y-n^2} + \sqrt{z-n^2} = k \\ \sqrt{z-p^2} + \sqrt{x-p^2} = k \end{cases}$$

Trong đó $m, n, p, k > 0$ và thỏa $m+n+p = \frac{k\sqrt{3}}{2}$.

Diễn đàn Boxmath

Giải

Trước hết ta sẽ chứng minh (I) nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất.

Thật vậy, giả sử $(x_1; y_1; z_1)$ và $(x_2; y_2; z_2)$ là 2 nghiệm phân biệt của (I).

Do vai trò của x, y, z như nhau nên ta giả sử $x_1 > x_2$. Khi đó từ phương trình thứ nhất của (I) ta có

$$\sqrt{x_1 - m^2} + \sqrt{y_1 - m^2} = \sqrt{x_2 - m^2} + \sqrt{y_2 - m^2}$$

Suy ra $y_2 > y_1$. Hoàn toàn tương tự từ phương trình thứ hai của hệ ta chứng minh được $z_1 > z_2$.

Từ phương trình thứ 3 ta suy ra được $x_2 > x_1$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy (I) có nghiệm duy nhất, lại có $\begin{cases} m, n, p, k > 0 \\ m+n+p = k\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, nên tồn tại một ΔABC đều cạnh k và một

điểm I nằm trong tam giác sao cho khoảng cách từ I đến các cạnh là m, n, p .

Xét ΔFIA có $IA^2 - IF^2 = AF^2 \Leftrightarrow \sqrt{IA^2 - m^2} = AF$. Tương tự ta có $\sqrt{IB^2 - m^2} = BF$

Do đó $\sqrt{IA^2 - m^2} + \sqrt{IB^2 - m^2} = AF + BF = k$. Từ phương trình (1) của hệ ta suy ra

$$x = IA^2, y = IB^2 \Rightarrow x = IC^2$$

Vậy (I) có nghiệm $\begin{cases} x = IA^2 \\ y = IB^2 \\ z = IC^2 \end{cases}$. Với mọi m, n, p, k thỏa đề bài thì (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = IA^2 \\ y = IB^2 \\ z = IC^2 \end{cases}$.

Câu 57. Tìm tất cả giá trị nguyên dương của n sao cho hệ phương trình sau có nghiệm dương

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1 \end{cases}$$

Giải

Giả sử hệ đã cho có nghiệm $x_1; x_2; \dots; x_n$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2 \Rightarrow n^2 \leq 9 \Rightarrow n \leq 3$$

- Với $n=3$ thì hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1 \end{cases}$ có nghiệm dương $x_1 = x_2 = x_3 = 3$.
- Với $n=2$, xét hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$.

Ta thấy phương trình $t^2 - 9t + 9 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

Vậy $n=2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

- Với $n=1$ thì hệ $\begin{cases} x_1 = 9 \\ \frac{1}{x_1} = 1 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy $n \in \{2; 3\}$ là giá trị cần tìm.

Câu 58. Giải và biện luận hệ phương trình
$$\begin{cases} a\sqrt{x-y+z} \cdot \sqrt{x+y-z} = x\sqrt{yz} \\ b\sqrt{x+y-z} \cdot \sqrt{y+z-x} = y\sqrt{xz} \\ c\sqrt{y+z-x} \cdot \sqrt{x+y-z} = z\sqrt{xy} \end{cases} \quad (I) \text{ theo } a, b, c \neq 0$$

Giải

Xét 2 trường hợp sau đây

- Nếu có ít nhất một trong 3 số $a, b, c < 0$. Ta giả sử $a < 0$.

Khi đó từ phương trình đầu của hệ ta suy ra cả 2 vế đều phải bằng 0, tức là

$$\begin{cases} x\sqrt{yz} = 0 \\ \sqrt{x-y+z} \cdot \sqrt{x+y-z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 0 \\ (x-y+z)(x+y-z) = 0 \end{cases}$$

Từ đó để ý đến điều kiện cho biểu thức trong căn có nghĩa thì để thỏa mãn phương trình thứ nhất của hệ ta phải có

$$x=0, y=z \geq 0 \text{ hoặc } y=0, x=z \geq 0 \text{ hoặc } z=0, x=y \geq 0.$$

Thay lại vào hai phương trình sau thấy đúng.

Đó chính là các nghiệm của hệ phương trình trong trường hợp này.

- Nếu $a, b, c > 0$. Khi đó hệ đã cho tương đương với hệ phương trình sau

$$(II) \begin{cases} a^2(x-y+z)(x+y-z) = x^2 yz \\ b^2(x+y-z)(y+z-x) = y^2 xz \\ c^2(y+z-x)(x+z-y) = z^2 xy \end{cases}$$

Rõ ràng (II) luôn có nghiệm $(0; 0; 0)$. Ta thử tìm nghiệm khác của hệ.

Nhân vế với vế của ba phương trình trong hệ rồi lấy căn bậc hai, ta được

$$abc(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) = x^2 y^2 z^2$$

Từ đó ta đi đến hệ phương trình sau

$$\begin{cases} bc(y+z-x) = ayz \\ ac(x+y-z) = bzx \\ ab(x+z-y) = cxy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc(y+z-x) = a^2 yz \\ abc(x+y-z) = b^2 xz \\ abc(x+z-y) = c^2 yx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 y + b^2 x = 2abc \\ b^2 z + c^2 y = 2abc \\ c^2 x + a^2 z = 2abc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{b^2 + c^2 - a^2} \\ y = \frac{b}{a^2 + c^2 - b^2} \\ z = \frac{c}{a^2 + b^2 - c^2} \end{cases}$$

Để $x, y, z > 0$, ta phải có $a^2 + b^2 > c^2, b^2 + c^2 > a^2, c^2 + a^2 > b^2$.

Tóm lại ta đi đến kết luận sau

- Nếu có ít nhất một trong ba số $a, b, c < 0$ thì nghiệm của hệ là $(0; \alpha; \alpha), (\alpha; \alpha; 0), (\alpha; 0; \alpha)$ với $\alpha > 0$ tùy ý.

- Nếu cả ba số a, b, c đều dương thì .

- Nếu $a^2 + b^2 > c^2, b^2 + c^2 > a^2, c^2 + a^2 > b^2$ thì nghiệm của hệ là

$$(0; 0; 0) \text{ và } \left(\frac{a}{b^2 + c^2 - a^2}; \frac{b}{a^2 + c^2 - b^2}; \frac{c}{a^2 + b^2 - c^2} \right)$$

- Nếu có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau

$$a^2 + b^2 \leq c^2, b^2 + c^2 \leq a^2, c^2 + a^2 \leq b^2 \text{ thì nghiệm của hệ chỉ là } (0; 0; 0).$$

Câu 59. Giải và biện luận hệ sau theo a, b, c .

$$\begin{cases} x = \sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} \\ y = \sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} \\ z = \sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} \end{cases}$$

Trong đó a, b, c là các số thực dương cho trước thỏa mãn $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ là ba cạnh của tam giác không tù

Giải

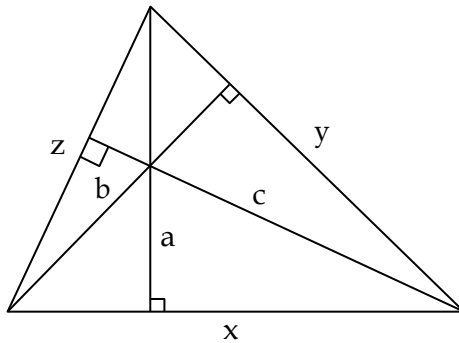
Phân tích. Rõ ràng ngay khi nhìn vào đề bài thì giả thiết thì a, b, c là các số thực dương cho trước thỏa mãn $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ là ba cạnh của tam giác không tù, khiến ta cảm thấy khá rối. Tuy nhiên nếu chú ý đến phân tích sau thì mọi việc hoàn toàn dễ dàng. Với một tam giác không tù có ba cạnh là a, b, c các

đường cao tương ứng là h_a, h_b, h_c và diện tích là S . Ta có $ah_a = bh_b = ch_c = 2S \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2S} = \frac{1}{h_a} \\ \frac{b}{2S} = \frac{1}{h_b} \\ \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_c} \end{cases}$

Từ đó chú ý rằng $\frac{a}{2S}, \frac{b}{2S}, \frac{c}{2S}$ là ba cạnh của tam giác không tù. Vậy ta có lời giải như sau

Lời giải

Điều kiện $a^2, b^2 \leq z^2; b^2, c^2 \leq x^2; a^2, c^2 \leq y^2$.



Để hệ phương trình có nghiệm thì x, y, z phải dương nên suy ra $a, b \leq z; b, c \leq x; a, c \leq y$.

Do đó ta luôn có thể dựng các tam giác sau

| Hệ phương trình nhiều ẩn

- $\Delta A_1B_1C_1$ có $A_1B_1 = y, A_1C_1 = z$ và đường cao tại đỉnh A_1 bằng a đồng thời hai tia A_1B_1 và A_1C_1 nằm về hai phía đối với đường cao tại A_1 . Khi đó theo phương trình thứ nhất dễ dàng có được $x = B_1C_1$.
- $\Delta A_2B_2C_2$ có $B_2A_2 = z, B_2C_2 = x$ và đường cao tại đỉnh B_2 là b đồng thời hai tia B_2A_2 và B_2C_2 nằm về hai phía đối với đường cao tại B_2 thì $y = A_2C_2$.
- $\Delta A_3B_3C_3$ có $C_3A_3 = y, C_3B_3 = x$ và đường cao tại đỉnh C_3 là c đồng thời hai tia C_3A_3 và C_3B_3 nằm về hai phía đối với đường cao tại C_3 thì $z = A_3B_3$.

Do đó ba tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$ có ba cạnh bằng nhau nên chúng bằng nhau do đó diện tích của chúng bằng nhau suy ra $ax = by = cz = 2S$.

Áp dụng công thức Heron ta có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, trong đó $p = \frac{x+y+z}{2}$.

Ta có $x = \frac{2S}{a}, y = \frac{2S}{b}, z = \frac{2S}{c}, p = \frac{x+y+z}{2} = \frac{2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}{2}$. Do đó suy ra

$$S = S^2 \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)}$$

Do đó $S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)}}$.

Từ đó ta có được $x = \frac{2S}{a}, y = \frac{2S}{b}, z = \frac{2S}{c}$.

Câu 60. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^6 + y^8 + z^{10} \leq 1 \\ x^{2007} + y^{2009} + z^{2011} \geq 1 \end{cases}$$

Đề thi chọn đội tuyển Bình Định

Giải

Từ bất phương trình thứ nhất của hệ, ta có $-1 \leq x, y, z \leq 1$.

Từ hai bất phương trình của hệ, ta có

$$x^{2007} + y^{2009} + z^{2011} \geq x^6 + y^8 + z^{10} \Leftrightarrow x^6(1 - x^{2001}) + y^8(1 - y^{2001}) + z^{10}(1 - z^{2001}) \leq 0$$

Từ điều kiện $-1 \leq x, y, z \leq 1$, ta dễ dàng thấy rằng $x^6(1 - x^{2001}), y^8(1 - y^{2001}), z^{10}(1 - z^{2001}) \geq 0$

Do đó, phải có đẳng thức xảy ra, tức là

$$x^6(1 - x^{2001}) = y^8(1 - y^{2001}) = z^{10}(1 - z^{2001}) = 0 \Leftrightarrow x, y, z = 1 \vee x, y, z = 0$$

Kết hợp với điều kiện $x^6 + y^8 + z^{10} \leq 1$, ta thấy bất hệ phương trình đã cho có các nghiệm là

$$(x; y; z) = (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1).$$

Câu 61. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 2z^3 = 19x - 11y - 5z + 1 \\ x^3 + (y^2 + 1)x = (x^2 + y^2)z + z \\ \sqrt{2 + x^2 + y^2 - 2yz} = z^2 + y^2 - 2xy + \sqrt{2} \end{cases}$$

Đề thi chọn đội tuyển dự thi VMO tỉnh An Giang

Giải

Từ phương trình (2) của hệ ta biến đổi

$$x^3 + (y^2 + 1)x = (x^2 + y^2)z + z \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1)x = (x^2 + y^2 + 1)z \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1)(x - z) = 0 \Leftrightarrow x = z.$$

Thay $x = z$ vào phương trình (3) ta được

$$\sqrt{2 + x^2 + y^2 - 2xz} = z^2 + y^2 - 2yz + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2 + (x - y)^2} = (x - y)^2 + \sqrt{2}$$

Đặt $t = (x - y)^2 \geq 0$ khi đó ta được

$$\begin{cases} t = (x - y)^2 \geq 0 \\ \sqrt{2 + t} = t + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = (x - y)^2 \geq 0 \\ 2 + t = t^2 + 2\sqrt{2}t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + (2\sqrt{2} - 1)t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow x = y$$

Thay $x = y = z$ vào phương trình (1) ta được

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 2z^3 &= 19x - 11y - 5z + 1 \\ \Leftrightarrow 4x^3 &= 3x + 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(4x^2 + 4x + 1) &= 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có hai bộ nghiệm là $(1; 1; 1); \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 62. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + z - w = 2 \\ x^2 - y^2 + z^2 - w^2 = 6 \\ x^3 - y^3 + z^3 - w^3 = 20 \\ x^4 - y^4 + z^4 - w^4 = 66 \end{cases}$$

China TST 2006

Giải

Đặt $\begin{cases} x + z = a \\ xz = b \\ y + w = c \\ yw = d \end{cases}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a - c = 2 & (1) \\ a^2 - 2b - c^2 + 2d = 6 & (2) \\ a^3 - 3ab - c^3 + 3cd = 20 & (3) \\ a^4 - 4a^2b + 2b^2 - c^4 + 4c^2d - 2d^2 = 66 & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} c = a - 2 \\ d = -2a + b + 5 \end{cases}$.

Từ (3) và (4) có

$$\begin{cases} 5a - 2b - 14 = 0 \\ 5a^2 - 2ab - 10a - b - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 2b = 14 \\ 4a - b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ d = 0 \end{cases}$$

Thế ngược lại ta tìm được nghiệm $(x; y; w; z)$ của hệ là $(1; 0; 3; 2)$ và các hoán vị.

Câu 63. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (3 - x)^{2003} = y + 2 \\ \log_3 \frac{1}{2z - y} + \log_{\frac{1}{3}}(y + 2) = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{9 + 4y} \text{ với } z \geq 0 \\ \log_2(x^2 + z^2) = 2 + \log_2 x \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x > 0; 2z > y; y > -2$

Khi đó biến đổi hệ phương trình đầu tương đương

$$\begin{cases} (3 - x)^{2003} = y + 2 \\ -\log_3(2z - y) - \log_3(y + 2) = -\log_3(9 + 4y) \\ \log_2(x^2 + z^2) = \log_2 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3 - x)^{2003} = y + 2 \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y \\ x^2 + z^2 = 4x \end{cases}$$

| Hệ phương trình nhiều ẩn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)^{2003} = y+2 \\ y^2 + 9 + z^2 + 6y - 2yz - 6z = z^2 - 2z \\ x^2 - 4x + 4 = 4 - z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)^{2003} = y+2 & (1) \\ (y+3-z)^2 = z^2 - 2z & (2) \\ (x-2)^2 = 4 - z^2 & (3) \end{cases}$$

Nếu (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của hệ ta có

$$(x_0 - 2)^2 = 4 - z_0^2 \Rightarrow 4 - z_0^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq z_0 \leq 2 \quad (4)$$

$$(y_0 + 3 - z_0)^2 = z_0^2 - 2z_0 \Rightarrow z_0^2 - 2z_0 \geq 0 \Leftrightarrow z_0 \leq 0 \vee z_0 \geq 2 \quad (5)$$

Kết hợp với điều kiện bài toán là $z_0 \geq 0$ với (4) và (5) ta có $z_0 = 0 \vee z_0 = 2$.

- Với $z_0 = 0$ từ (2) và (3) ta có $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = -3 \end{cases}$ không thỏa điều kiện bài toán.
- Với $z_0 = 2$ từ (2) và (3) ta có $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$.

Thử lại ta thấy nghiệm duy nhất của hệ là $(x; y; z) = (2; -1; 2)$.

Câu 64. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2009} x_i = 2009 \\ \sum_{i=1}^{2009} x_i^8 = \sum_{i=1}^{2009} x_i^6 \end{cases}$$

Đề chọn đội tuyển VMO – THPT chuyên ĐH Sư phạm

Giải

Giả sử $(x_1, x_2, \dots, x_{2009})$ là một nghiệm của hệ.

Không mất tính tổng quát giả sử $x_1^2 \geq x_2^2 \geq \dots \geq x_{2009}^2$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$2009 \sum_{i=1}^{2009} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{2009} x_i \right)^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2009} x_i^2 \geq 2009 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho các bộ số $(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{2009}^2)$ và $(x_1^6, x_2^6, \dots, x_{2009}^6)$ được sắp thứ tự

$$\left(\sum_{i=1}^{2009} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{2009} x_i^6 \right) \leq 2009 \sum_{i=1}^{2009} x_i^8 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra
$$\sum_{i=1}^{2009} x_i^8 \geq \sum_{i=1}^{2009} x_i^6 \quad (3)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{2009} = 1$.

Thử lại ta thấy $x_i = 1 (i = \overline{1, 2009})$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Câu 65. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2-x)(1-2x)(2+y)(1+2y) = 4\sqrt{10z+1} & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + x^2y^2 + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Phương trình thứ 2 của hệ tương đương

$$(x+y+z)^2 + (xy-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ xy-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-(x+y) \\ y=\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ y=\frac{1}{x} \end{cases}$$

Thay vào (1), ta được

$$\begin{aligned} (2-x)(1-2x)\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right) &= 4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)} \\ \Leftrightarrow (2-x)(1-2x)\left(\frac{2x+1}{x}\right)\left(\frac{x+2}{x}\right) &= 4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)} \\ \Leftrightarrow \frac{(4-x^2)(1-4x^2)}{x^2} &= 4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)} \\ \Leftrightarrow 4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-17 &= 4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)} \quad (3) \end{aligned}$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} |t| \geq 2 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \end{cases}$. Từ đó phương trình (3) tương đương

$$\begin{aligned} 4(t^2 - 2) - 17 &= 4\sqrt{1-10t} \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 25 &= 4\sqrt{1-10t} \\ \Leftrightarrow (4t^2 - 25)^2 - 16(1-10t) &= 0 \\ \Leftrightarrow (4t^2 - 20t + 29)(2t+3)(2t+7) &= 0 \\ \Leftrightarrow t = -\frac{7}{2} \text{ (do } |t| \geq 2) &\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{2} \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4} \end{aligned}$$

- Với $x = \frac{-7 + \sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{-7 - \sqrt{33}}{4} \Rightarrow z = \frac{7}{2}$.
- Với $x = \frac{-7 - \sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{-7 + \sqrt{33}}{4} \Rightarrow z = \frac{7}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là

$$(x; y; z) = \left(\frac{-7 + \sqrt{33}}{4}; \frac{-7 - \sqrt{33}}{4}; \frac{7}{2} \right), \left(\frac{-7 - \sqrt{33}}{4}; \frac{-7 + \sqrt{33}}{4}; \frac{7}{2} \right).$$

Câu 66. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37 & (1) \\ x^2 + z^2 + xz = 28 & (2) \\ y^2 + z^2 + yz = 19 & (3) \end{cases}$$

Giải

Ta có $\begin{cases} (1) - (2) \Rightarrow y^2 - z^2 + x(y-z) = 9 \Leftrightarrow (y-z)(x+y+z) = 9 & (4) \\ (2) - (3) \Rightarrow x^2 - y^2 + z(x-y) = 9 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+z) = 9 & (5) \end{cases}$.

Lại có $(4) - (5) \Rightarrow [(y-z) - (x-y)](x+y+z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ y-z = x-y \end{cases}$.

- Nếu $x+y+z=0 \Leftrightarrow z=-(x+y)$. Thay vào hệ ta được $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37 \\ x^2 + y^2 + xy = 28 \\ x^2 + y^2 + xy = 19 \end{cases}$.

Dễ thấy hệ phương trình vô nghiệm!

| Hệ phương trình nhiều ẩn

- Nếu $y - z = x - y = t \Rightarrow \begin{cases} x = y + t \\ z = y - t \end{cases}$.

Thay vào (4) ta được $t(y + y + t + y - t) = 9 \Leftrightarrow ty = 3 \Leftrightarrow t = \frac{3}{y}$ (6)

Thay vào (3) ta được

$$y^2 + (y - t)^2 + y(y - t) = 19 \Leftrightarrow 3y^2 - 3ty + t^2 = 19 \Leftrightarrow 3y^2 + t^2 = 28 \quad (7)$$

Thay (6) vào (7) ta được

$$3y^2 + \frac{9}{y^2} = 28 \Leftrightarrow 3y^4 - 28y^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3 \Rightarrow t = \pm 1 \\ y^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow t = \pm 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Xét 4 trường hợp $(y; t) = (3; 1), (-3; -1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 3\sqrt{3}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -3\sqrt{3}\right)$ ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là $(4; 3; 2), (-4; -3; -2), \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{8\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{10\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$

Câu 67. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(\frac{v^2 + 1}{u^2} - \frac{1 + y^2}{v^2} + v^2 - u^2 \right) \left(\frac{u^2}{1 + v^2} - \frac{v^2}{1 + u^2} + \frac{1}{v^2 - u^2} \right) = 9u^2 & (1) \\ u^2 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Phân tích. Ta có mệnh đề sau

$$\left(\frac{b - c}{a} + \frac{c - a}{b} + \frac{a - b}{c} \right) \left(\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b} \right) = 9 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \quad (*)$$

Chứng minh.

Xuất phát từ đẳng thức $\frac{x - y}{z} + \frac{y - z}{x} + \frac{z - x}{y} = \frac{-(x - y)(y - z)(z - x)}{xyz}$

Đặt $x = b - c, y = c - a, z = a - b \Rightarrow x - y = -3c, y - z = -3a, z - x = -3b$

Thế thì $\frac{-3a}{b - c} + \frac{-3b}{c - a} + \frac{-3c}{a - b} = \frac{-27abc}{(b - c)(c - a)(a - b)}$

Đẳng thức trên tương đương với điều phải chứng minh. Áp dụng mệnh đề trên ta có lời giải như sau

Lời giải.

Áp dụng (*) với $a = u^2, b = v^2, c = -1$ từ (1) ta suy ra $9 = 9u^2$.

Vậy ta có hệ tương đương $\begin{cases} 9 = 9u^2 \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \pm 1 \\ v = 0 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(1; 0); (-1; 0)$

$$\text{Câu 68. Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2x^3 = 2y(x^2 + 1) - (z^2 + 1) & (1) \\ 2y^4 = 3z(y^2 + 1) - 2(x^2 + 1) & (2) \\ 2z^5 = 4x(z^2 + 1) - 3(y^2 + 1) & (3) \end{cases}$$

Giải

Xét 6 trường hợp

- Trường hợp 1.** Nếu $y \leq x \leq z$.

Từ (1) ta có $0 = 2y(x^2 + 1) - (z^2 + 1) - 2x^3$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2x(x^2 + 1) - (z^2 + 1) - 2x^3 \Leftrightarrow 0 \leq 2x(x^2 + 1) - (x^2 + 1) - 2x^3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \leq 0$$

Từ đó suy ra $x = y = z = 1$.

- **Trường hợp 2.** Nếu $y \leq z \leq x \Rightarrow 2x^3 + z^2 + 1 \geq 2x^3 + z^2 + 1$ (*)

Từ (1) ta có $2x^3 + z^2 + 1 = 2y(x^2 + 1) = 2yx^2 + 2y$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} 2yx^2 + 2y \leq 2x^3 + 2y \\ 2yx^2 + 2y \leq 2x^3 + 2z \\ 2yx^2 + 2y \leq 2x^3 + z^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^3 + z^2 + 1 \leq 2x^3 + z^2 + 1.$$

Kết hợp với (*) suy ra $x = z$, nghĩa là $x = y = z = 1$.

- **Trường hợp 3.** Nếu $z \leq y \leq x$. Từ (2) ta có

$$\begin{aligned} 0 &= 3z(y^2 + 1) - 2y^4 - 2(x^2 + 1) \\ &\Rightarrow 0 \leq 3y(y^2 + 1) - 2y^4 - 2(x^2 + 1) \\ &\Rightarrow 0 \leq 3z(y^2 + 1) - 2y^4 - 2(y^2 + 1) = -(2y^2 + y + 2)(y - 1)^2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $x = y = z = 1$.

- **Trường hợp 4.** Nếu $z \leq x \leq y$. Từ (2) ta có

$$\begin{aligned} 0 &= 8[3z(y^2 + 1) - 2y^4 - 2(x^2 + 1)] \Rightarrow 0 \leq 8[3x(y^2 + 1) - 2y^4 - 2(x^2 + 1)] \\ &\Leftrightarrow 0 \leq -(3y^2 + 1 - 4x)^2 - 16(y - x) - [7(y + 1)^2 + 8](y - 1)^2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $y = 1 \Rightarrow x = y = z = 1$.

- **Trường hợp 5.** Nếu $x \leq y \leq z$. Từ (3) ta có

$$\begin{aligned} 0 &= 4x(z^2 + 1) - 3(y^2 + 1) - 2z^5 \\ &\Rightarrow 0 \leq 4y(z^2 + 1) - 3(y^2 + 1) - 2z^5 \\ &\Rightarrow 0 \leq -(2z^3 + 4z^2 + 2z + 3)(z - 1)^2 - (z - y) \left[\left(2z - \frac{3}{2} \right) + \frac{7}{4} \right] \end{aligned}$$

Do đó $y = z \Rightarrow x = y = z = 1$.

- **Trường hợp 6.** Nếu $x \leq z \leq y$. Từ (3) ta có

$$\begin{aligned} 0 &= 4x(z^2 + 1) - 3(y^2 + 1) - 2z^5 \\ &\Rightarrow 0 \leq 4z(z^2 + 1) - 3(y^2 + 1) - 2z^5 \\ &\Rightarrow 0 \leq 4x(z^2 + 1) - 3(z^2 + 1) - 2z^5 \\ &\Rightarrow 0 \leq -(2z^3 + 4z^2 + 2z + 3)(z - 1)^2 \end{aligned}$$

Từ đó có $x = y = z = 1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = 1$.

Câu 69. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} ab(a + b) = 6 \\ bc(b + c) = 30 \\ ac(a + c) = 12 \end{cases}$$

Giải

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Rõ ràng a, b, c không thể bằng 0.

Đặt $S = a + b + c, P = abc$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} \frac{P}{c}(S-c)=6 \\ \frac{P}{a}(S-a)=30 \\ \frac{P}{b}(S-b)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{PS}{P+6} \\ a = \frac{PS}{P+30} \\ b = \frac{PS}{P+12} \end{cases}$$

Như vậy $S = S \left(\frac{P}{P+6} + \frac{P}{P+12} + \frac{P}{P+30} \right)$.

Nếu $S = 0$ thì $a + b = -c$, khi đó phương trình đầu tiên trở thành $abc = -6$ và hai phương trình còn lại là $abc = -30$ và $abc = -12$ điều này không thể xảy ra Do đó $\frac{P}{P+6} + \frac{P}{P+12} + \frac{P}{P+30} = 1$.

Biến đổi và thu gọn ta được $P^3 + 24P^2 - 1080 = 0 \Leftrightarrow (P-6)(P^2 + 30P + 180) = 0$.

- Với $P = 6$ ta có $a = \frac{S}{6}, b = \frac{S}{3}, c = \frac{S}{2} \Rightarrow ab(a+b) = \frac{S^3}{36} = 6 \Rightarrow S = 6$. Vậy $(a, b, c) = (1, 2, 3)$.
- Với $P^2 + 30P + 180 = 0 \Rightarrow P = -15 + 3\sqrt{5}; P = -15 - 3\sqrt{5}$.

○ Nếu $P = -15 + 3\sqrt{5}$ thì ta có
$$\begin{cases} a = \frac{-15 + 3\sqrt{5}}{15 + 3\sqrt{5}} S = \frac{\sqrt{5} - 3}{2} S \\ b = \frac{-15 + 3\sqrt{5}}{-3 + 3\sqrt{5}} S = -\sqrt{5} S \\ c = \frac{-15 + 3\sqrt{5}}{-9 + 3\sqrt{5}} S = \frac{\sqrt{5} + 5}{2} S \end{cases}$$

Kết hợp với $ab(a+b) = 6$ ta có $-\sqrt{5}S^3 = 6 \Leftrightarrow S = \sqrt[3]{\frac{36}{5}}$.

Vậy $(a, b, c) = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sqrt[3]{\frac{36}{5}}, \sqrt{5} \sqrt[3]{\frac{36}{5}}, -\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \sqrt[3]{\frac{36}{5}} \right)$.

- Tương tự với $P = -15 - 3\sqrt{5}$ ta tìm được.

Câu 70. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \\ x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = -24 \\ xz = yt \\ x - y + z + t = 0 \end{cases}$$

Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia năm 1981

Giải

Đặt $xz = yt = u; x + z = y - t = v$. Cộng và trừ từng vế của phương trình thứ nhất và thứ hai của hệ cho nhau ta được
$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 13 \\ y^2 + t^2 = 37 \end{cases}$$
. Suy ra $(x+z)^2 = 13 + 2u; (y-t)^2 = 37 - 2v$.

Từ đó ta tìm được $u = 6, v = \pm 5$ hay $x - z = \pm 1; y + t = \pm 7$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(3; 6; 2; 1), (2; 6; 3; 1), (3; -1; 2; -6), (2; -1; 3; -6)$
 $, (-3; -6; -2; -1), (-2; -6; -3; -1), (-3; 1; -2; 6), (-2; 1; -3; 6)$

Câu 71. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - zx - zy = 3 \\ x^2 + y^2 + yz - zx - 2xy = -1 \end{cases}$$

Giải

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} (x+y)^2 - z(x+y) + z^2 - 3 = 0 \\ (x-y)^2 - z(x-y) + 1 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $u = x + y, v = x - y$. Khi đó $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$.

Hệ (I) thành
$$\begin{cases} u^2 - zu + z^2 - 3 = 0 \\ v^2 - zv + 1 = 0 \end{cases}$$
. Hệ này có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_u \geq 0 \\ \Delta_v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 \leq 4 \\ z^2 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2$.

- Với $z = 2$ ta có được $u = v = 1$. Suy ra $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.
- Với $z = -2$ ta có được $u = v = -1$. Suy ra $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(1; 0; 2), (-1; 0; -2)$.

Câu 72. Giải phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = xyz \end{cases}$$

Giải

Trường hợp 1. Nếu $x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ y^4 + z^4 = 0 \end{cases}$ suy ra phương trình vô nghiệm.

Xét tương tự $y = 0$ suy ra phương trình vô nghiệm.

Xét tương tự $z = 0$ suy ra phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $x < 0, y < 0, z < 0$. Ta có $VP < 0, VT > 0$ suy ra phương trình vô nghiệm

Trường hợp 3. Nếu xét $x < 0, y > 0, z > 0$.

Tương tự ta cũng có thể suy ra được phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 4. Nếu xét $x > 0, y > 0, z > 0$.

Từ đây ta cũng có thể suy ra các trường hợp với y, z

Trường hợp 5. Nếu $x > 0, y > 0, z > 0$.

Lấy (1) thế (2) ta được $x^4 + y^4 + z^4 = xyz(x + y + z) \Leftrightarrow \frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{xz} + \frac{z^3}{xy} = x + y + z$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có
$$\begin{cases} \frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{xz} \geq 2\sqrt{\frac{x^2 y^2}{z^2}} = \frac{2xy}{z} \\ \frac{y^3}{xz} + \frac{z^3}{xy} \geq 2\sqrt{\frac{y^2 z^2}{x^2}} = 2\frac{yz}{x} \\ \frac{x^3}{yz} + \frac{z^3}{xy} \geq 2\frac{xz}{y} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $VT \geq \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x}} = 2y$.

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Vậy $VT \geq VP$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Câu 73. Giải phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 + z^2} + 2\sqrt{8y^2 + x^2} = 12 \\ 30x^2y^2 + x^2z^2 - 5y^4 + 12y^2z^2 - 2z^4 = 36 \end{cases}$$

Giải

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\frac{\sqrt{3x^2 + z^2}}{2} + \frac{\sqrt{8y^2 + x^2}}{3} + 3 = 5 \geq 5\sqrt[5]{\frac{\sqrt{(3x^2 + 2x)(8 + x^2)}}{6}}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} (3x^2 + z^2)(8y^2 + x^2) &\geq 30x^2y^2 + x^2z^2 - 5y^4 + 12y^2z^2 - 2z^4 \\ \Leftrightarrow 24x^2y^2 + 8x^2z^2 + x^2z^2 &\geq 30x^2y^2 + x^2z^2 + 12y^2z^2 \\ \Leftrightarrow 3x^4 + 5y^4 + 2z^4 - 6x^2y^4 - 4y^2z^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 3(x^2 - y^2)^2 + 2(y^2 - z^2)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Khi đó ta được

$$VT \geq 5\sqrt[5]{\frac{\sqrt{(3x^2 + 2)(8y^2 + x^4)}}{6}} \geq 5\sqrt[5]{\frac{\sqrt{30x^2y^2 + x^2z^2 - 5y^4 + 12y^2z^2 - 2z^4}}{6}} \geq VP$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = y^2 = z^2 = 1$

Câu 74. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(z-1) = xyz - 1 & (1) \\ (x-2)(y-2)(z-2) = xyz - 2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Phương trình (1) tương đương

$$xyz - xy - xz + x - yz + y + z - 1 = xyz - 1 \Leftrightarrow -xy - xz - yz + x + y + z = 0$$

Phương trình (2) tương đương

$$xyz - 2xy - 2y = -2xz + 4x + 4y + 4z - 8 = xyz - 2 \Leftrightarrow -xy - yz - xz + 2x + 2y + 2z = 3$$

Từ đó ta được hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = 3 \end{cases}$$

Ta có $(x + y + z)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Mà $xy + yz + zx = 3$

Mặt khác ta lại có $x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) = \frac{1}{2} \sum (x - y)^2$

Suy ra $x = y = z$. Ta thế ngược lại tìm được $x = y = z = 1$

Câu 75. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 12 & (1) \\ 2\sqrt{x} + 5\sqrt{y} + 10\sqrt{z} = \sqrt{xyz} & (2) \end{cases}$$

Nguyễn Trường Phát

Giải

Điều kiện $x, y, z \geq 0$. Lấy phương trình (1) thế vào phương trình (2) để tìm điều kiện có nghiệm của hệ phương trình.

Chú ý. Ta thế $\sqrt{z}$ từ phương trình (1) vào phương trình (2) rồi sau đó sử dụng điều kiện có nghiệm của tam thức bậc 2.

$$\text{Ta được } \begin{cases} (\sqrt{x}-5)^2(x-14\sqrt{x}+1) \geq 0 \\ (\sqrt{y}-4)^2(y-16\sqrt{y}+4) \geq 0. \\ (\sqrt{z}-3)^2(z-18\sqrt{z}+1) \geq 0 \end{cases}$$

Ta sẽ xét lần lượt các trường hợp để có thể loại nghiệm một cách dễ dàng hơn. Xét 1 trong 3 số x, y, z bất kì bằng 0 thì ta sẽ có được bộ nghiệm duy nhất là $(25, 16, 9)$. Làm tương tự lần lượt cho 2 trong bằng 0 ta cũng thu được bộ nghiệm như trên. Tương tự ta cũng xét 3 số bằng 0.

$$\text{Nếu ta xét } x, y, z \neq 0 \text{ ta có } \begin{cases} x > 97 + 56\sqrt{3} \text{ hay } 0 < x < \frac{1}{97 + 56\sqrt{3}} \\ y > 4(31 + 8\sqrt{15}) \text{ hay } 0 < y < \frac{4}{31 + 8\sqrt{15}}. \\ z > 161 + 72\sqrt{5} \text{ hay } 0 < z < \frac{1}{161 + 72\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1. Ta có } \begin{cases} x > 97 + 56\sqrt{3} \\ y > 4(31 + 8\sqrt{15}) \Rightarrow VT(1) > 12 \text{ suy ra hệ phương trình vô nghiệm.} \\ z > 161 + 72\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2. Ta có } \begin{cases} 0 \leq x < \frac{1}{97 + 56\sqrt{3}} \\ 0 \leq y < \frac{4}{31 + 8\sqrt{15}} \Rightarrow VT(1) > 12. \\ 0 \leq z < \frac{1}{161 + 72\sqrt{5}} \end{cases}$$

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

$$\text{Trường hợp 3. Ta có } \begin{cases} x > 97 + 56\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{97 + 56\sqrt{3}} \\ 0 \leq y < \frac{4}{31 + 2\sqrt{3}} \\ 0 \leq z < \frac{1}{161 + 72\sqrt{5}} \end{cases}.$$

$$\text{Mà } 12 - \sqrt{\frac{4}{31 + 6\sqrt{15}}} - \sqrt{\frac{1}{161 + 72\sqrt{5}}} < 12 - \sqrt{y} - \sqrt{z} \leq 12 < \sqrt{97 + 56\sqrt{3}} < \sqrt{x}.$$

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

Tương tự với các trường hợp còn lại cũng suy ra phương trình vô nghiệm.

$$\text{Trường hợp 4. Ta có } \begin{cases} x > 97 + 56\sqrt{3} \\ y > 4(31 + 8\sqrt{15}) \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{97 + 56\sqrt{3}} + \sqrt{4(31 + 8\sqrt{15})}. \\ 0 \leq z < \frac{1}{161 + 72\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{Mà } 12 - \sqrt{\frac{1}{161 + 72\sqrt{5}}} < 12 - \sqrt{z} \leq 12 < \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm. Tương tự với các trường hợp còn lại

Câu 76. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$
, trong đó a là tham số thực cho trước

Moscow Olympiad 1937.

Giải

Lấy phương trình thứ nhất của hệ trừ phương trình thứ 3 của hệ ta có

$$3(x+y)(y+z)(x+z) = 0$$

Trường hợp 1. Nếu $x+y=0$ thì $z=a$.

Từ phương trình thứ 2 ta suy ra được $x=y=0$.

Tương tự cho các trường hợp $x+z=0, y+z=0$.

Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Câu 77. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 = b^3 \\ x + y + z = 2b \\ x^2 + y^2 - z^2 = b^2 \end{cases}$$
.

Moscow Olympiad 1939.

Giải

Từ giả thiết ta có $-b^3 = 2b(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

Với $b \neq 0$ ta thấy rằng $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = -\frac{1}{2}b^2$.

Điều này tương đương với $(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) = -\frac{1}{2}b^2$

Mặt khác $x+y+z=2b$ từ đó $xy+yz+zx = \frac{3}{2}b^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ (*)

Từ $x^2 + y^2 - z^2 = b^2$ và từ (*) ta có
$$\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 2b \\ xy = \frac{3}{2}b^2 \end{cases}$$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - 2bt + \frac{3}{2}b^2 = 0$.

Từ đó ta giải được 2 nghiệm của phương trình là

$$(x; y) = \left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) b, \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) b \right); \left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) b, \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) b \right)$$

Với hội đồng tổ chức **Moscow Olympiad** họ sẽ không xem xét trường hợp là số phức, do đó ta chỉ xét $b=0$. Nếu $b=0$ ta có $z^2 = x^2 + y^2, z = -x - y$ vì thế $x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2, xy = 0$.

Từ đây ta dễ dàng suy ra được kết quả của bài toán!

Câu 78. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} a + b + c = 2x & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 = y - 1 & (2) \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = z + 2 & (3) \end{cases}$$

Biết hệ phương trình có nghiệm $(a; b; c)$, hãy tìm 1 đẳng thức liên hệ giữa x, y, z mà không có a, b, c .

Võ Văn Thành

Giải

Phân tích. Đây là 1 bài toán hệ phương trình khá hay. Bài toán không yêu cầu ta tìm nghiệm mà tìm 1 đẳng thức liên hệ giữa các tham số. Vì vậy, muốn làm được bài này, ta phải vận dụng khéo léo các hằng đẳng thức. Ta có cách giải như sau. Sử dụng hằng đẳng thức, ta có

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) \\a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) .\end{aligned}$$

Từ 2 hằng đẳng thức trên , ta sẽ có $ab + bc + ac = \frac{4x^2 - y + 1}{2}$ (4)

Từ (3), ta có $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = z + 2$ (5)

Thay (1),(2),(4) vào (5), ta được $2x\left(y - 1 - \frac{4x^2 - y + 1}{2}\right) = z + 2$.

Lúc này, bằng cách biến đổi tương đương, ta dễ dàng có được

$$4x^3 - 3xy + 3x + z + 2 = 0$$

Đây chính là đẳng thức cần tìm.

Câu 79. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2 (1) \\ x + y + 2z = 4(a^2 + 1) (2) \\ z^2 - xy = a^2 (3) \end{cases}$	Nguyễn Hoàng Vũ
---	------------------------

Giải

Ta lấy phương đầu trừ 2 lần phương cuối rồi tách theo hằng đẳng thức.

Ta có lời giải như sau.

Ta lấy (1) - 2(3) = 0 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 4z^2 = 0$. Suy ra $(x + y + 2z)(x + y - 2z) = 0$.

Mặt khác, vì $x + y + 2z = 4(a^2 + 1) > 0 \Rightarrow x + y - 2z = 0$. Suy ra $x + y = 2z$. (4)

Thế (4) vào (2), ta có $2z + 2z = 4(a^2 + 1) \Rightarrow z = a^2 + 1$. (5)

Từ đây ta có $x + y = 2(a^2 + 1)$. (6)

Từ (5), ta có $z^2 = a^4 + 2a^2 + 1$. Từ (3) và (1), ta cũng có $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 + 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 4a^2 \\ xy = 1 \end{cases}$

Lúc này ta xét 2 trường hợp .

- **Trường hợp 1.** $\begin{cases} x + y = 2a \\ xy = 1 \end{cases}$

Nên theo định lý Viete cho phương trình bậc 2 , ta có x,y là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 2aX + 1 = 0$$

Từ đây , ta xét 3 trường hợp

1. Khi $-1 < a < 1$. Phương trình vô nghiệm
2. Khi $a = \pm 1$. Phương trình có nghiệm kép $x = y = \pm 1$
3. Khi $a^2 > 1$. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $a \pm \sqrt{a^2 - 1}$

- **Trường hợp 2.** $\begin{cases} x + y = -2a \\ xy = 1 \end{cases}$. Tương tự trường hợp 1 nên nhường mọi người giải.

Câu 80. Giải hệ phương trình $a^2 + bc - ab = b^2 + ca - bc = c^2 + ab - ca$.

Giải

- **Trường hợp 1.** Với $c = 0$ ta tìm được nghiệm $(a; b; c) = (0; 0; 0)$.

- **Trường hợp 2.** Với $c \neq 0$, nếu $(a; b; c)$ là nghiệm của hệ thì $\left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}; 1\right)$ cũng là nghiệm do các phương trình là thuần nhất. Vậy không mất tính tổng quát giả sử $c = 1$. Khi đó ta có hệ phương trình trở thành

$$a^2 + b - ab = b^2 + a - b = 1 + ab - a$$

Từ $a^2 + b - ab = 1 + ab - a$, ta có $a^2 + a - 1 = b(2a - 1) \Rightarrow b = \frac{a^2 + a - 1}{2a - 1}$, dễ thấy $a \neq \frac{1}{2}$

Thay vào phương trình $a^2 + b - ab = b^2 + a - b$ ta có $(a - 1)(a^3 - 6a^2 + 5a - 1) = 0$

1. Nếu $a = 1$ ta có nghiệm $(a; b; c) = (1; 1; 1)$.
2. Trường hợp còn lại, a là nghiệm của $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$. Có thể giải phương trình bằng cách đặt $t = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}y + 2$ từ đó ta tìm được nghiệm

$$2 + \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cos \frac{t + 2k\pi}{3} \text{ với } t = \arccos \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \text{ và } k = \overline{0, 2}$$

Như vậy hệ phương trình có nghiệm $(c; c; c)$ với $c \in \mathbb{R}$ và

$$\left(c \times \left(2 + \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cos \frac{t + 2k\pi}{3} \right), c \times f \left(2 + \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cos \frac{t + 2k\pi}{3} \right), c \right)$$

trong đó $c \in \mathbb{R}, t = \arccos \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, k = \overline{0, 2}$ và $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x - 1}$.

Câu 81. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = a & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 & (2) \\ xy = z^2 & (3) \end{cases}$$

a) Giải hệ trên với ẩn $(x; y)$.

b) Các số a, b phải thỏa mãn điều kiện gì để các nghiệm x, y, z của hệ dương khác nhau?

Giải

Bình phương hai vế của phương trình thứ nhất trong hệ ta được

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2(x + y)z$$

Để ý rằng $x + y = a - z$ và sử dụng phương trình thứ hai, thứ ba của hệ ta đi đến

$$a^2 = b^2 + 2z^2 + 2(a - z)z \Leftrightarrow a^2 = b^2 + 2az.$$

Từ đó $z = \frac{a^2 - b^2}{2a}$. Từ đây ta tìm được các hệ thức liên hệ giữa x và y như sau

$$x + y = a - z = \frac{a^2 + b^2}{2a}; xy = z^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

Như vậy ta có được

$$x = \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}; y = \frac{a^2 + b^2}{4a} \mp \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}; z = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Để $x, y, z > 0$ ta phải có $x + y > 0$ hay $\frac{a^2 + b^2}{2a} > 0 \Leftrightarrow a > 0$. Với điều kiện này thì $x, y > 0$ bởi vì $xy > 0$.

Từ điều kiện $z = \frac{a^2 - b^2}{2a} > 0$ với $a > 0$ ta suy ra rằng $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > |b|$ (1)

Để $x \neq y$ cần phải có $10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4 > 0$ (2)

Đặt $t = \frac{|b|}{a}$ thì theo (1) ta có $1 > t \geq 0$ và có thể viết (2) dưới dạng

$$-3t^4 + 10t^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow -3\left(t + \sqrt{3}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(t - \sqrt{3}) > 0 \quad (3)$$

Vì $t \geq 0$ nên $t + \sqrt{3} > 0; t + \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ và vì $t < 1$ nên $t - \sqrt{3} < 0$ và bất phương trình (3) tương đương với

$t - \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$. Như vậy $1 > t > \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $1 > \frac{|b|}{a} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ tức là $a > |b| > \frac{a}{\sqrt{3}}, a > 0$.

Câu 82. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 30x - 4y + \frac{1}{xy} = 2012 \\ 4y - 2012z + \frac{1}{zx} = 30 \\ 2012y - 30z + \frac{1}{yz} = 4 \end{cases}$$

Giải

Đặt $30 = a; 4 = b; 2012 = c$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} ax - by + \frac{1}{xy} = c & (1) \\ by - cz + \frac{1}{zx} = a & (2) \\ cy - az + \frac{1}{yz} = b & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = ax - by + \frac{1}{xy} \\ bz - \left(ax - by + \frac{1}{xy}\right) \cdot x + \frac{1}{zx} = a & (4) \\ \left(ax - by + \frac{1}{xy}\right) \cdot y - az + \frac{1}{yz} = b & (5) \end{cases}$$

Xét (4), (5) là 1 hệ 2 ẩn theo a, b. Dùng công thức Cramer ta tính được

$$D = \begin{vmatrix} x^2 + 1 & -xy - z \\ xy - z & -y^2 - 1 \end{vmatrix} = -(1 + x^2 + y^2 + z^2) \neq 0.$$

$$D_a = \begin{vmatrix} \frac{1}{xy} - \frac{1}{y} & -xy - z \\ -\frac{1}{yz} - \frac{1}{x} & -y^2 - 1 \end{vmatrix} = \frac{-(1 + x^2 + y^2 + z^2)}{xz}.$$

$$D_b = \begin{vmatrix} x^2 + 1 & \frac{1}{xy} - \frac{1}{y} \\ xy - z & -\frac{1}{xy} - \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{-(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{yz}.$$

Từ đây ta giải được $a = \frac{D_a}{D} = \frac{1}{xz}; b = \frac{D_b}{D} = \frac{1}{yz}; c = \frac{1}{xy}$.

Trở lại hệ phương trình đầu ta có

$$\begin{cases} xz = \frac{1}{30} \\ yz = \frac{1}{4} \\ xy = \frac{1}{2012} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{\sqrt{15090}} \\ y = \sqrt{\frac{15}{4024}} \\ z = \sqrt{\frac{503}{30}} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y; z) = \left(\frac{-1}{\sqrt{15090}}; \sqrt{\frac{15}{4024}}; \sqrt{\frac{503}{30}} \right)$.

Câu 83. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 10 & (2) \\ x^7 + y^7 + z^7 = 350 & (3) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (1), (2) ta có $xy + yz + zx = -5$ (3)

Từ phương trình (1) $\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ (4)

Lấy phương trình (2) $\times$ (4) ta được

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)(x^3 + y^3 + z^3) &= 30xyz \\ \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 + x^2y^2(x+y) + y^2z^2(y+z) + x^2z^2(x+z) &= 30xyz \\ \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 - x^2y^2z - xy^2z^2 - x^2yz^2 &= 30xyz \\ \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 - xyz(x+y+z) &= 30xyz \\ \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 + 5xyz &= 30xyz \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 = 25xyz \end{aligned}$$

Lấy phương trình (2) $\times$ (5)

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^5 + z^5) &= 250xyz \\ \Leftrightarrow x^7 + y^7 + z^7 + x^2y^2(x^3 + y^3) + y^2z^2(y^3 + z^3) + z^2x^2(z^3 + x^3) &= 250xyz \\ \Leftrightarrow x^7 + y^7 + z^7 + x^2y^2(3xyz - z^3) + y^2z^2(3xyz - x^3) + z^2x^2(3xyz - y^3) &= 250xyz \\ \Leftrightarrow x^7 + y^7 + z^7 + 3xyz(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - x^2y^2z^2(x+y+z) &= 250xyz \\ \Leftrightarrow x^7 + y^7 + z^7 + 3xyz[(xy + yz + xz)^2 - 2xyz(x+y+z)] &= 250xyz \\ \Leftrightarrow x^7 + y^7 + z^7 + 45xyz &= 250xyz \\ \Leftrightarrow x^7 + y^7 + z^7 &= 135xyz \quad (6) \end{aligned}$$

Thay (6) vào (3) ta được $135xyz = 350 \Leftrightarrow xyz = 2$. Vậy ta có.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + xz + yz = -5 \\ xyz = 2 \end{cases}$$

Suy ra x, y, z là nghiệm của phương trình $t^3 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 + \sqrt{2}, t = -2, t = 1 - \sqrt{2}$

Vậy hệ có nghiệm là $(1 + \sqrt{2}; -2; 1 - \sqrt{2})$ và các hoán vị.

Câu 84. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \tan x^2 + \tan y^2 + \tan z^2 = m^2 \\ \tan x^3 + \tan y^3 + \tan z^3 = m^3 \end{cases}$$

Đề thi đề nghị Olympic 30/4

Giải

Đặt $a = \tan x, b = \tan y, c = \tan z$, hệ phương trình trở thành
$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = m^3 & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 = m^2 & (2) \end{cases}$$

- Nếu $m = 0$ thì hệ tương đương $\tan x = \tan y = \tan z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = i\pi \\ y = j\pi \\ z = k\pi \end{cases} (i, j, k \in \mathbb{Z})$
- Nếu $m \neq 0$.

Từ phương trình (1) ta suy ra

$$m^6 = (a - a^2 + b \cdot b^2 + c - c^2)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4) \Rightarrow m^4 \leq a^4 + b^4 + c^4$$

Từ phương trình (2) ta suy ra

$$m^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \Rightarrow a^2b^2 = b^2c^2 = c^2a^2 = 0$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = \arctan m + i\pi \\ y = j\pi \\ z = k\pi \end{cases}, \begin{cases} x = i\pi \\ y = \arctan m + j\pi \\ z = k\pi \end{cases}, \begin{cases} x = i\pi \\ y = j\pi \\ z = \arctan m + k\pi \end{cases} \quad (i, j, k \in \mathbb{Z})$$

Câu 85. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+3} = y^3 - 6 \\ \sqrt{y+2} = z^3 - 25 \\ \sqrt{z+1} = x^3 + 1 \end{cases}$$

Giải

Cách 1.

Đặt $a = \sqrt{x+3}, b = \sqrt{y+2}, c = \sqrt{z+1} (a, b, c \geq 0)$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a = (b^2 - 2)^3 - 6 \\ b = (c^2 - 1)^3 - 25 \\ c = (a^2 - 3)^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = (b^2 - 2)^3 - b - 6 = f(b) \\ b - c = (c^2 - 1)^3 - c - 25 = g(c) \\ c - a = (a^2 - 3)^3 - a + 1 = h(a) \end{cases}$$

Mặt khác ta lại có
$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b^2 - 2)^3 \geq 6 > 1^3 \\ (c^2 - 1)^3 \geq 25 > 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > \sqrt{3} \\ c > \sqrt{3} \end{cases}$$

Từ đây suy ra được
$$(a^2 - 3)^3 + 1 > \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a > \sqrt{3} \\ a^2 - 3 > \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} > \sqrt[3]{\frac{1}{2}} (*) \end{cases}$$

Ta có
$$\begin{cases} f'(b) = 3(b^2 - 2)^2 \cdot 2b - 1 > 3 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3} - 1 > 0, \forall b > \sqrt{3} \\ g'(c) = 3(c^2 - 1)^2 \cdot 2c - 1 > 3 \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3} - 1 > 0, \forall c > \sqrt{3} \\ h'(a) = 3(a^2 - 3)^2 \cdot 2a - 1 > 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 2\sqrt{3} - 1 > 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} - 1 > 0, \forall a (*) \end{cases}$$

Suy ra $f(b), g(c), h(a)$ đồng biến và $f(2) = g(2) = h(2) = 0$

- **Trường hợp 1.** Nếu $a > 2$
 $\Rightarrow h(a) > h(2) = 0 \Rightarrow c > a > 2 \Rightarrow g(c) > g(2) = 0 \Rightarrow b > c > 2$
 $\Rightarrow f(b) > f(2) = 0 \Rightarrow a > b > 2 \Rightarrow a > b > c > a$
 Trường hợp này loại.
- **Trường hợp 2.** Nếu $a < 2$, lập luận tương tự trường hợp 1.

| Hệ phương trình nhiều ẩn

$$\text{Tóm lại ta có } \begin{cases} a=2 \Rightarrow c=a+h(a)=2 \Rightarrow b=c+g(c)=2 \\ a=b=c=2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}=2 \\ \sqrt{y+2}=2 \\ \sqrt{z+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y; z) = (1; 2; 3)$

Cách 2. Biến đổi hệ phương trình như sau.

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-2=y^3-8 \\ \sqrt{y+2}-2=z^3-27 \\ \sqrt{z+1}-2=x^3-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}=(y-2)(y^2+2y+4) \\ \frac{y-2}{\sqrt{y+2}+2}=(z-3)(z^2+3z+9) \\ \frac{z-3}{\sqrt{z+1}+2}=(x-1)(x^2+x+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=(y-2)(y^2+2y+4)(\sqrt{x+3}+2) & (1) \\ y-2=(z-3)(z^2+3z+9)(\sqrt{y+2}+2) & (2) \\ z-3=(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{z+1}+2) & (3) \end{cases}$$

Nếu $x \neq 1 \Rightarrow y \neq 2, z \neq 3$, khi đó từ hệ trên ta có

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow |x-1| > |y-2| \\ (2) \Rightarrow |y-2| > |z-3| \\ (3) \Rightarrow |z-3| > |x-1| \end{cases}$$

Điều này mâu thuẫn!

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y; z) = (1; 2; 3)$.

Câu 86. Với giá trị nào của $u, v \in \mathbb{R}$ thì hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 169 \\ a^2(ua^2 + vb^2) + b^2(ub^2 + vc^2) + c^2(uc^2 + va^2) = \frac{(2u+v) \cdot 13^4}{4} \end{cases}$$

có nghiệm nguyên dương a, b, c ?

Giải

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $u(a^4 + b^4 + c^4) + v(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = \frac{(2u+v) \cdot 13^4}{4}$.

Do $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2} - \frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}$ nên phương trình trở thành

$$\frac{2u-v}{2}(a^4 + b^4 + c^4) = \frac{(2u-v) \cdot 13^4}{4}$$

- Nếu $2u-v \neq 0$ thì phương trình có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow 1:2(a^4 + b^4 + c^4) = 13^4$.
- Nếu $2u-v = 0$ ta có $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 13^4$. Dễ dàng tìm được nghiệm $a=12, b=4, c=3$.

Tóm lại hệ trên có nghiệm nguyên khi $v=2u$.

Câu 87. Biết hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 15 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 35 \end{cases}$$
 có một bộ nghiệm $(x; y; z)$ thỏa $x^2 + y^2 + z^2 < 10$.
Hãy tính $x^5 + y^5 + z^5$.

Giải

Đặt $p = xy + yz + zx$; $q = xyz$.

Cho $(x; y; z)$ là nghiệm của đa thức $f(X) = (X - x)(X - y)(X - z) = X^3 - 3X^2 + pX - q$.

Ta có
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + px - q = 0 \\ y^3 - 3y^2 + py - q = 0 \\ z^3 - 3z^2 + pz - q = 0 \end{cases}$$

Nhân hai vế của ba phương trình trên theo thứ tự với x^k, y^k, z^k rồi cộng lại với nhau ta được

$$x^{k+3} + y^{k+3} + z^{k+3} - 3(x^{k+2} + y^{k+2} + z^{k+2}) + p(x^{k+1} + y^{k+1} + z^{k+1}) - q(x^k + y^k + z^k) = 0.$$

Đặt $S_n = x^n + y^n + z^n$, $n \in \mathbb{N}$, suy ra $S_{k+3} - 3S_{k+2} + pS_{k+1} - qS_k = 0$.

Vì $x + y + z = 3 \Rightarrow (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = S_2 + 2p = 9 \Rightarrow S_2 = 9 - 2p$.

Cho $k = 1$, ta có $S_4 - 3S_3 + pS_2 - qS_1 = 0 \Rightarrow 35 - 45 + p(9 - 2p) - (3p - 4).3 = 0 \Rightarrow p^2 = 1$.

- Với $p = 1 \Rightarrow S_2 = 7 < 10 \Rightarrow q = -1$.
- Với $p = -1 \Rightarrow S_2 = 11 > 10$, trái với giả thiết.

Cho $k = 2$, ta có $S_5 - 3S_4 + pS_3 - qS_2 = 0 \Rightarrow S_5 = 3S_4 - pS_3 + qS_2 = 3.35 - 1.15 - 1.7 = 83$.

Vậy $x^5 + y^5 + z^5 = 83$.

Câu 88. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2-x)(3x-2z) = 3-z \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2 \\ y^2 + z^2 = 6z \\ z \leq 3 \end{cases}.$$

Giải

Phương trình thứ nhất của hệ có nghiệm $x \Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow (3+z)^2 - 3(3z+3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z \leq 0 \\ z \geq 3 \end{cases} \quad (1)$

Phương trình thứ ba của hệ có nghiệm $y \Leftrightarrow -z^2 + 6z \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq z \leq 6 \quad (2)$

Từ (1), (2) và kết hợp với điều kiện $z \leq 3$ ta thu được $z = 0$; $z = 3$.

Cuối cùng hệ phương trình có 2 nghiệm là $(1; 0; 0), (2; -3; 3)$.

Câu 89. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-1)^4 \cdot (y-2)^2 \cdot z^3 \cdot t^6 = 1024 \\ 4x^2 + z^3 + 16y + t^6 = 8x + 16 \\ x \geq 1; y \geq 2; z \geq 0; t \geq 0 \end{cases}.$$

Giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} (x-1)^4 \cdot (y-2)^2 \cdot z^3 \cdot t^6 = 1024 \\ 4(x-1)^2 + 16(y-2) + z^3 + t^6 = 48 \\ x \geq 1; y \geq 2; z \geq 0; t \geq 0 \end{cases} \quad (I).$$

| Hệ phương trình nhiều ẩn

Đặt $u = x - 1; v = y - 2$. Hệ (I) thành
$$\begin{cases} u^4 v^2 z^3 t^6 = 1024 \\ 4u^2 + 16v + z^3 + t^6 = 48 \\ u; v; z; t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II}).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$2u^2 \cdot 2u^2 \cdot 8v \cdot 8v \cdot z^3 \cdot t^6 \leq \left(\frac{4u^2 + 16v + z^3 + t^6}{6} \right)^6 = \left(\frac{48}{6} \right)^6 = 2^{18} \Rightarrow u^4 v^2 z^3 t^6 \leq 1014.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2u^2 = 8v = z^3 = t^6$.

Cuối cùng ta tìm được một nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(3; 3; 2; \sqrt{2})$.

Câu 90. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} y = x - 2012 \\ z = 2y - 2012 \\ w = 3z - 2012 \end{cases}$$

Tìm nghiệm $(x; y; z; w)$ sao cho $x; y; z; w \geq 0$ và x có giá trị bé nhất.

Giải

Từ giả thiết bài toán ta suy ra

$$z = \frac{w}{3} + \frac{2012}{3}; y = \frac{z}{2} + 1006 = \frac{w}{6} + \frac{4024}{3}; x = y + 2012 = \frac{w}{6} + \frac{10060}{3} \geq \frac{10060}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $w = 0$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\left(\frac{10060}{3}; \frac{4024}{3}; \frac{2012}{3}; 0 \right)$.

Câu 91. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3})^{2012} = 2012x_{i+4} \\ i = \overline{1, 10} \end{cases}$$
 với $x_{11} = x_1; x_{12} = x_2; x_{13} = x_3; x_{14} = x_4$.

Giải

Nếu bộ $(x_1; x_2; \dots; x_{10})$ là một nghiệm suy ra các hoán vị vòng quanh của nó cũng là nghiệm.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 = \min\{x_1; x_2; \dots; x_{10}\}$.

Dễ thấy $x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, 10}$ và hàm $f(t) = t^{2012}$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Ký hiệu $(x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3})^{2012} = 2012x_{i+4}$ là (i) .

- Từ (7) và (8) suy ra $x_7 \leq x_1 \Rightarrow x_1 = x_7$.
- Từ (3) và (4) suy ra $x_3 \leq x_7 \Rightarrow x_3 = x_7$.
- Từ (9) và (10) suy ra $x_9 \leq x_3 \Rightarrow x_9 = x_3$.
- Từ (5) và (6) suy ra $x_5 \leq x_9 \Rightarrow x_5 = x_9$.
- Từ (1) và (2) suy ra $x_5 = x_6$.

Do đó $x_i = x_j, \forall i, j = \overline{1, 10}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x_i = x \\ (4x)^{2012} = 2012x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_i = x \\ x = 0 \\ x = \sqrt[2011]{\frac{2012}{4^{2012}}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_i = 0 \\ x_i = \sqrt[2011]{\frac{2012}{4^{2012}}} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là $(0; 0; \dots; 0), \left(\sqrt[2011]{\frac{2012}{4^{2012}}}, \sqrt[2011]{\frac{2012}{4^{2012}}}, \dots, \sqrt[2011]{\frac{2012}{4^{2012}}} \right)$.

Câu 92. Xác định $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ biết $(x; y; z; t)$ là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2^2-1^2} + \frac{y^2}{2^2-3^2} + \frac{z^2}{2^2-5^2} + \frac{t^2}{2^2-7^2} = 1 \\ \frac{x^2}{4^2-1^2} + \frac{y^2}{4^2-3^2} + \frac{z^2}{4^2-5^2} + \frac{t^2}{4^2-7^2} = 1 \\ \frac{x^2}{6^2-1^2} + \frac{y^2}{6^2-3^2} + \frac{z^2}{6^2-5^2} + \frac{t^2}{6^2-7^2} = 1 \\ \frac{x^2}{8^2-1^2} + \frac{y^2}{8^2-3^2} + \frac{z^2}{8^2-5^2} + \frac{t^2}{8^2-7^2} = 1 \end{cases}.$$

Giải

Từ hệ phương trình đã cho ta suy ra $\frac{x^2}{u-1^2} + \frac{y^2}{u-3^2} + \frac{z^2}{u-5^2} + \frac{t^2}{u-7^2} = 1$, với $u \in \{4; 16; 36; 64\}$.

Xét đa thức

$$P(u) = (u-1)(u-9)(u-25)(u-49) - x^2(u-9)(u-25)(u-49) - y^2(u-1)(u-49)(u-25) - z^2(u-1)(u-9)(u-49) - t^2(u-1)(u-9)(u-25)n$$

Vì $\deg P = 4; P(u)$ có các nghiệm là 4; 16; 36; 64 nên

$$P(u) = (u-4)(u-16)(u-36)(u-64).$$

Đồng nhất hệ số của u^3 ta được

$$1 + 9 + 25 + 49 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4 + 16 + 36 + 64 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 36.$$

Câu 93. Tìm các số thực của hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 18 \\ x^7 + y^7 + z^7 = 2058 \end{cases}$.

Giải

Xét đa thức $P(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ với các nghiệm x, y, z .

Từ $x + y + z = 0$ ta suy ra $a = 0$, do đó $P(t) = t^3 + bt + c$.

Vì x, y, z là các nghiệm của $P(t)$ nên $x^3 + bx + c = 0; y^3 + by + c = 0; z^3 + bz + c = 0$.

Cộng vế theo vế ba đẳng thức trên và sử dụng hai phương trình đầu tiên của hệ ta tìm được $c = -6$.

Do đó $P(t) = t^3 + bt - 6$. Suy ra $x^3 + bx - 6 = 0; y^3 + by - 6 = 0; z^3 + bz - 6 = 0$.

Nhân từng đẳng thức trên với x^n, y^n, z^n tương ứng rồi cộng chúng lại với nhau ta được

$$x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} + b(x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}) - 6(x^n + y^n + z^n) = 0.$$

Ký hiệu $S_n = x^n + y^n + z^n, \forall n \geq 1$. Đẳng thức này trở thành $S_{n+3} + bS_{n+1} - 6S_n = 0, \forall n \geq 1$ (*)

Ta có $S_7 = 2058$ và sử dụng (*) ta được

$$S_7 = -bS_5 + 6S_4 = -b(-bS_3 + 6S_2) + 6(-bS_2 + 6S_1) = b^2S_3 - 12bS_2 + 36S_1$$

Từ $S_3 = 18, S_2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = -2b$ và $S_1 = 0$ ta suy ra $S_7 = 42b^2 = 2058 \Leftrightarrow b = \pm 7$.

Khi đó $P(t) = t^3 \pm 7t - 6$.

- Phương trình $t^3 + 7t - 6 = 0$ có duy nhất một nghiệm thực vì $f(t) = t^3 + 7t - 6$ là hàm tăng.
- Phương trình $t^3 - 7t - 6 = 0$ có ba nghiệm $t = -1; t = -2; t = 3$ và như vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(-1; -2; -3)$ và tất cả các hoán vị của nó.

Câu 94. Giải hệ phương trình $6\left(x - \frac{1}{y}\right) = 3\left(y - \frac{1}{z}\right) = 2\left(z - \frac{1}{x}\right) = xyz - \frac{1}{xyz}$.

Giải

Điều kiện $x, y, z \neq 0$.

$$\text{Đặt } 6\left(x - \frac{1}{y}\right) = 3\left(y - \frac{1}{z}\right) = 2\left(z - \frac{1}{x}\right) = xyz - \frac{1}{xyz} = t.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } 6\left(x - \frac{1}{y}\right) \cdot 3\left(y - \frac{1}{z}\right) \cdot 2\left(z - \frac{1}{x}\right) &= \left(xyz - \frac{1}{xyz}\right)^3 = t^3 \\ \Leftrightarrow 36\left[xyz - \frac{1}{xyz} - \left(x - \frac{1}{y}\right) - \left(y - \frac{1}{z}\right) - \left(z - \frac{1}{x}\right)\right] &= t^3 \\ \Leftrightarrow 36\left(t - \frac{t}{6} - \frac{t}{3} - \frac{t}{2}\right) &= t^3 \Leftrightarrow t = 0. \end{aligned}$$

Đến đây dễ dàng tìm được nghiệm $(x; y; z)$ của hệ.

Câu 95. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sum x^2(y+z) = 6 \\ \sum xy(1+2xy) = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình thứ nhất của hệ thêm vào một lượng $3xyz$ ta được

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) = 6 + 3xyz.$$

Phương trình thứ hai của hệ được biến đổi thành

$$2(xy+yz+zx)^2 - 4xyz(x+y+z) + (xy+yz+zx) = 9.$$

Phương trình thứ ba của hệ được biến đổi thành

$$(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = 3.$$

Đặt $a = x+y+z, b = xy+yz+zx, c = xyz$. Khi đó ta có hệ phương trình sau
$$\begin{cases} ab = 6 + 3c \\ 2b^2 - 4ac + b = 9 \\ a^2 - 2b = 3 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp thế ta được phương trình theo ẩn a như sau

$$a^4 + 3a^2 - 48a + 36 = 0.$$

Phương trình này có nghiệm $a = 3; a = -1 - \frac{3}{\sqrt[3]{11+2\sqrt{37}}} + \sqrt[3]{11+2\sqrt{37}}$.

Đến đây việc tìm nghiệm $(x; y; z)$ không còn khó khăn.

Câu 96. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{2012} = -1 \\ x_1(x_2 + x_3 + \dots + x_{2012}) = -1 \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4 + \dots + x_{2012}) = -1 \\ \dots \\ (x_1 + x_2 + \dots + x_{2011})x_{2012} = -1 \end{cases}$$

MSS 2013

Giải

Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra $x_2 + x_3 + \dots + x_{2012} = -1 - x_1$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $x_1(-1-x_1)=-1 \Leftrightarrow x_1^2+x_1-1=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Tương tự ta cũng tìm được $x_{2012}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Mặt khác, ta xét

$$\begin{aligned} (x_1+x_2+\dots+x_{k-1})(x_k+x_{k+1}+\dots+x_{2012}) &= (x_1+x_2+\dots+x_k)(x_{k+1}+x_{k+2}+\dots+x_{2012}), \quad 2 \leq k \leq 2011 \\ \Leftrightarrow x_k[(x_1+x_2+\dots+x_{k-1})-(x_{k+1}+x_{k+2}+\dots+x_{2012})] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_k=0 \\ x_1+x_2+\dots+x_{k-1}=x_{k+1}+x_{k+2}+\dots+x_{2012} \end{cases} & (*) \end{aligned}$$

Đặt $x_1+x_2+\dots+x_{k-1}=a$. Thay (*) vào phương trình đầu tiên của hệ ta được

$$2a+x_k=-1 \Leftrightarrow a=\frac{-1-x_k}{2}.$$

Khi đó $(x_1+x_2+\dots+x_{k-1})(x_k+x_{k+1}+\dots+x_{2012})=-1$

$$\Leftrightarrow a(x_k+a)=-1 \Leftrightarrow \frac{-1-x_k}{2}\left(x_k+\frac{-1-x_k}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow x_k=\pm\sqrt{5} \text{ với } k=2,3,\dots,2011.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $x_1=x_2=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}; x_k=0$ hoặc $x_k=\pm\sqrt{5}$, $k=2,3,\dots,2011$ thỏa mãn $x_2+x_3+\dots+x_{2011}=0$ hoặc $\pm\sqrt{5}$.

Câu 97. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=1 \\ y\sqrt{1+x^2}+z\sqrt{1+y^2}=2 \\ z\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+z^2}=3 \end{cases}; x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Gzeta, Romania

Giải

Đặt $x=\text{sh } a, y=\text{sh } b, z=\text{sh } c$; ở đây $\text{sh } u=\frac{e^u-e^{-u}}{2}, \text{ch } u=\frac{e^u+e^{-u}}{2}; u \in \mathbb{R}$.

Ta có $\text{ch}^2 u=1+\text{sh}^2 u$ và $\text{sh}(u+v)=\text{sh } u.\text{ch } v+\text{sh } v.\text{ch } u$.

Hệ phương trình đã cho thành
$$\begin{cases} \text{sh}(a+b)=1 \\ \text{sh}(b+c)=2 \\ \text{sh}(c+a)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\text{arcsch } 1 \\ b+c=\text{arcsch } 2 \\ c+a=\text{arcsch } 3 \end{cases},$$

Ở đây $\text{arcsch } u=\ln(u+\sqrt{u^2+1}), u \in \mathbb{R}$. Như vậy ta suy ra $a=\frac{1}{2}(\text{arcsch } 1+\text{arcsch } 3-\text{arcsch } 2)$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(1+\sqrt{2})+\ln(3+\sqrt{10})-\ln(2+\sqrt{5})\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{10})}{2+\sqrt{5}}$$

Suy ra $x=\text{sh } a=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{10})}{2+\sqrt{5}}}-\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{10})}}\right]$

$$=\frac{1}{2}(1+3\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{5})\sqrt{(2+\sqrt{5})(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{10})}.$$

Tương tự ta cũng tìm được y và z .

Câu 98. Tìm tất cả các số thực $a, b, c, d, e \in [-2; 2]$ thỏa hệ phương trình
$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 0 \\ a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 = 10 \end{cases}.$$

Romania 2002, Titu Andreescu

Giải

Đặt $a = 2\cos x, b = 2\cos y, c = 2\cos z, d = 2\cos t, e = 2\cos u$.

Ta có $2\cos 5x = (2\cos x)^5 - 5(2\cos x)^3 + 5(2\cos x) = a^5 - 5a^3 + 5a$.

Suy ra $\sum 2\cos 5x = \sum a^5 - 5\sum a^3 + 5\sum a = 10 \Leftrightarrow \sum \cos 5x = 5$.

Điều đó kéo theo $\cos 5x = \cos 5y = \cos 5z = \cos 5t = \cos 5u = 1$.

Rõ ràng $\cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Từ $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \cos 0 = 1$ ta suy ra $a, b, c, d, e \in \left\{2; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

Với $\sum a = 0$ thì rõ ràng phải có một số bằng 2, hai số khác bằng $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ và hai số còn lại bằng $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Kiểm tra từng trường hợp ta thấy đẳng thức $\sum a^3 = 0$ được thỏa mãn.

Câu 99. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} a + b + c + d = 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12 \\ abc + abd + acd + bcd = 8 + abcd \end{cases}$$

Leonard Giugiuc and Diana Trailescu.

Giải – Ramanujan Srihari

Từ 2 phương trình đầu của hệ, ta có

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 12$$

Đặt $abcd = k$ và đặt $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - (k+8)x + k$ là đa thức với a, b, c, d là các nghiệm của nó.

Khi đó $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - (k+8)$. Giả sử $f'(r) = 0$ với mọi $r \in \mathbb{R}$ thì hệ số góc $y = f(x)$ tại $x = r$ là 0. Biến đổi ta có

$$\begin{aligned} f(r) &= f(r) + (1-r)f'(r) \\ &= r^4 - 6r^3 + 12r^2 - (6+8)r + k + (1-r)(4r^3 - 18r^2 + 24r - (k+8)) \\ &= -3r^4 + 16r^3 - 30r^2 + 24r - 8 \\ &= -(r^2 - 4r + 4)(3r^2 - 4r + 2) \\ &= -(r-2)^2(3r^2 - 4r + 2) \end{aligned}$$

Với $3r^2 - 4r + 2 = 3\left(\left(r - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right) > 0$ ta thấy $f(r) \leq 0$ trong đó $f(r) = 0$ khi và chỉ khi $r = 2$.

Giả sử rằng $f'(2) \neq 0$. Khi đó với mọi t sao cho $f'(t) = 0$ thì $f(t) < 0$. Điều đó chứng tỏ rằng f chỉ có 2 nghiệm duy nhất điều đó mâu thuẫn với $f(x)$ có 4 nghiệm phân biệt a, b, c, d .

Khi đó với $f'(2) = 0$ thì $t = 2$ là nghiệm duy nhất của f' . Từ $f'(2) = 0 \Rightarrow k = 0$.

Do đó từ (1) ta có $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x = x(x-2)^3$. Khi đó

$$(0, 2, 2, 2), (2, 0, 2, 2), (2, 2, 0, 2), (2, 2, 2, 0)$$

là nghiệm của hệ.

Câu 100. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=7 \\ abc+abd+acd+bcd-abcd=\frac{15}{16} \end{cases}.$$

Leonard Giugiuc and Sladjan Stankovik.

Giải

Đầu tiên ta có

$$\begin{aligned} 16 &= (a+b+c+d)^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ &= 7+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \end{aligned}$$

Do đó $ab+ac+ad+bc+bd+cd = \frac{9}{2}$.

Đặt $w=a-1, x=b-1, y=c-1$, và $z=d-1$, khi đó $w+x+y+z=0$ và

$$\begin{aligned} wxyz &= (a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \\ &= (abcd) - (abc+abd+acd+bcd) + (ab+ac+ad+bc+bd+cd) - (a+b+c+d) + 1 \\ &= -\frac{15}{16} + \frac{9}{2} - 4 + 1 = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned} w^2+x^2+y^2+z^2 &= (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+d^2-2(a+b+c+d)+4 \\ &= 7-8+4=3 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$3 = w^2+x^2+y^2+z^2 \geq 4\sqrt[4]{w^2x^2y^2z^2} = 4\sqrt{\frac{9}{16}} = 3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $w^2=x^2=y^2=z^2=\frac{3}{4}$. Do đó,

$$(w, x, y, z) = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Với $w+x+y+z=0$. Ta thấy nghiệm của hệ là 5 hoán vị của bộ

$$(a, b, c, d) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Câu 101. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=6 \\ a^3+b^3+c^3+d^3=\frac{94}{9} \end{cases} \quad \text{với } a, b, c, d \in [0; 2].$$

Giải

Digby Smith.

Chú ý rằng

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd = \frac{1}{2} \left((a+b+c+d)^2 - (a^2+b^2+c^2+d^2) \right) = \frac{1}{2} (4^2 - 6) = 5$$

Và

| Hệ phương trình nhiều ẩn

$$\begin{aligned}
 (a+b+c+d)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3a^2(b+c+d) + 3b^2(c+d+a) \\
 &\quad + 3c^2(d+a+b) + 3d^2(a+b+c) + 6(abc+abd+acd+bcd) \\
 &= 3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2) - 2(a^3+b^3+c^3+d^3) + 6(abc+abd+acd+bcd) \\
 &\Rightarrow 64 = 3(4)(6) - 2\frac{94}{9} + 6(abc+abd+acd+bcd) \\
 &\Rightarrow abc+abd+acd+bcd = \frac{1}{6}\left(64 + \frac{188}{9} - 72\right) = \frac{58}{27}
 \end{aligned}$$

Ta đặt $k = abcd$ và $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

Từ (1), (2) ta có

$$\begin{aligned}
 p(x) &= x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - (abc+bcd+cda+dab)x + abcd \\
 &= x^4 - 4x^3 + 5x^2 - \frac{58}{27}x + k
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$p'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 10x - \frac{58}{27} = \frac{1}{27}(108x^3 - 324x^2 + 270x - 58) = \frac{2}{27}(3x-1)(18x^2 - 48x + 29)$$

Giải phương trình $p'(x) = 0$ ta được các nghiệm là $x = \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Với $p(x)$ là đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất dương và $p'(x)$ có 3 nghiệm phân biệt trên khoảng $(0, 2)$, điều này chứng tỏ rằng a, b, c, d là nghiệm của đẳng thức, với $0 \leq a, b, c, d \leq 2$, ta có

$$p(0) \geq 0, p\left(\frac{1}{3}\right) \leq 0, p\left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \geq 0, p\left(\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \leq 0, p(2) \geq 0$$

Ta thấy $p\left(\frac{1}{3}\right) = p(2) = k - \frac{8}{27}$. Suy ra, $k = \frac{8}{27}$, từ đó ta có

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - \frac{58}{27}x + \frac{8}{27} = \frac{1}{27}(27x^4 - 108x^3 + 135x^2 - 58x + 8) = \frac{1}{27}(3x-1)^2(3x-4)(x-2)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là 12 hoán vị của bộ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 2\right)$.

Câu 102. Giải hệ phương trình	$ \begin{cases} x(x+y) + y(y+z) = 0 & (1) \\ x(x+1) + y(2z+1) = 0 & (2) \\ (x+y)^2 + (y+z)^2 = \frac{(x+1)^2 + (2z+1)^2}{2004} & (3) \end{cases} $
--------------------------------------	--

Giải

$$\text{Xét } y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow z^2 = \frac{1+(2z+1)^2}{2004} \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1001}}{1000}.$$

Xét $y \neq 0$, nhân 2 vế của (3) cho y^2 rồi thế (1) và (2) vào, ta được

$$(x+y)^2 y^2 + x^2(x+y)^2 = \frac{x^2(x+1)^2 + y^2(x+1)^2}{2004} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \\ (x+y)^2 = \frac{(x+1)^2}{2004} (*) \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình } (*), \text{ ta đặt } a = \sqrt{2004}, \text{ khi đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{x+1}{a} \\ x+y = \frac{-x-1}{a} \end{cases}.$$

Ta có (1): $x^2 + xy + y^2 + yz = 0$, (2): $x^2 + x + 2yz + y = 0$, khi đó lấy $yz = -x^2 - xy - y^2$ thế vào (2) ta được

$$\begin{aligned} x^2 + x + 2(-x^2 - xy - y^2) + y &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 2x^2 - 2xy - 2y^2 + y &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2 - 2xy - 2y^2 + x + y &= 0(**) \end{aligned}$$

Với $y = \left(\frac{1}{a} - 1\right)x + \frac{1}{a}$ ta lại thế vào phương trình trên, ta được

$$\begin{aligned} -x^2 + (x + y)(1 - 2y) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2 + \left(\frac{x+1}{a}\right)\left(1 - \left(\frac{2}{a} - 2\right)x - \frac{2}{a}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2a + (x+1)\left(\left(2 - \frac{2}{a}\right)x + 1 - \frac{2}{a}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2a^2 + (x+1)((2a-2)x + a-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2a^2 + (2a-1)x^2 + (a-2)x + (2a-2)x + a-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a-1-a^2)x^2 + (3a-4)x + a-2 &= 0 \end{aligned}$$

Xét biệt thức $\Delta = (3a-4)^2 - 4(2a-1-a^2)(a-2) = 4a^3 - 7a^2 - 4a + 8$.

Từ đó ta giải được $x = \frac{4-3a \pm \sqrt{4a^3 - 7a^2 - 4a + 8}}{2(2a-1-a^2)}$, từ đây có thể suy ra các nghiệm còn lại.

Câu 103. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} k(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = xy & (1) \\ k(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (k-1)\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} & (2) \end{cases}$$

1. Xác định k để hệ phương trình có nghiệm.
2. Giải hệ phương trình với $k = 16$.

Giải

Đặt $\sqrt[3]{x} = a \Rightarrow x = a^3$, hệ phương trình trở thành
$$\begin{cases} k(a^6 + a^4 + a^2 + 1) = a^3y & (1) \\ k(a^8 + a^6 + a^2 + 1) + (k-1)a^4 = 2ya^4 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) ta suy ra $k(a^8 + a^6 + a^2 + 1 + a^4) - a^4 = 2ya^4$.

Xét $a = 0 \Rightarrow k = 0$, thế vào phương trình trên, ta được
$$\begin{cases} a^3y = 0 & (1) \\ -a^4 = 2ya^4 & (2) \end{cases}$$

Hệ phương trình này có nghiệm thỏa mãn yêu cầu đề bài khi $a \neq 0$, khi đó (2) tương đương

$$k\left(a^4 + a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + 1\right) - 1 = 2y$$

Và phương trình (1) tương đương $k\left(a^3 + a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3}\right) = y$, thế vào (2) ta được

$$k\left(a^4 + \frac{1}{a^4} + a^2 + \frac{1}{a^2} + 1\right) - 1 = 2k\left(a^3 + \frac{1}{a^3} + a + \frac{1}{a}\right) \quad (*)$$

Đặt $t = a + \frac{1}{a} (a \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{cases}$, khi đó ta có

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 = \left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2\right)^2 - 2 = (t^2 - 2)^2 - 2$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = t^2 - 2, a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1\right) = t(t^2 - 3)$$

Phương trình (*) trở thành

$$k\left((t^2 - 2)^2 + t^2 - 3\right) - 1 = 2k(t^3 - 2t)$$

$$\Leftrightarrow k\left((t^2 - 2)^2 + t^2 - 3 - 2t^3 + 4t\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow k\left((t^2 - t)^2 - 4(t^2 - t) + 1\right) = 1 \quad (**)$$

Đặt $b = t^2 - t$, xét $f(t) = t^2 - t$ với điều kiện đã tìm được, thì ta suy ra được $b \geq 2$.

Phương trình (**) $\Leftrightarrow k(b^2 - 4b + 1) = 1$, nếu $b^2 - 4b + 1 = 0$ thì vô lý, do vậy $b \neq 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow k = \frac{1}{b^2 - 4b + 1}$.

Đặt $g(b) = \frac{1}{b^2 - 4b + 1}$, có $g'(b) = \frac{-(2b - 4)}{(b^2 - 4b + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow b = 2$. Từ đây dễ dàng chỉ ra được $k \leq \frac{1}{3} \vee k \geq 0$

thì hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Với $k = 16$ thì $16 = \frac{1}{b^2 - 4b + 1} \Leftrightarrow 16b^2 - 64b + 15 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{15}{4} \vee b = \frac{1}{4}$.

Đến đây phần còn lại xin nhường cho bạn đọc.

Câu 104. Cho $a, b, c, d \neq 0$ là các số không đồng thời bằng nhau, giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ \frac{a^2x}{a-d} + \frac{b^2y}{b-d} + \frac{c^2z}{c-d} = 0 & (2) \\ \frac{ax}{a-d} + \frac{by}{b-d} + \frac{cz}{c-d} = d(a-b)(b-c)(c-a) & (3) \end{cases}$$

Giải

Lấy phương trình (1) $\Leftrightarrow x = -y - z$ thế vào (2), (3) ta suy được

$$(2) \Leftrightarrow \frac{a^2(-y-z)}{a-d} + \frac{b^2y}{b-d} + \frac{c^2z}{c-d} = 0 \Leftrightarrow \frac{-a^2y}{a-d} - \frac{a^2z}{a-d} + \frac{b^2y}{b-d} + \frac{c^2z}{c-d} = 0$$

$$\Leftrightarrow y\left(\frac{b^2}{b-d} - \frac{a^2}{a-d}\right) + \left(\frac{c^2}{c-d} - \frac{a^2}{a-d}\right)z = 0 \quad (*)$$

Và đồng thời

$$(3) \Leftrightarrow \frac{a(-y-z)}{a-d} + \frac{by}{b-d} + \frac{cz}{c-d} = d(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{b-d} - \frac{a}{a-d}\right)y + \left(\frac{c}{c-d} - \frac{a}{a-d}\right)z = d(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(a-b)y}{(b-d)(a-d)} + \frac{d(a-c)z}{(c-d)(a-d)} = d(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)y}{(b-d)(a-d)} + \frac{(a-c)z}{(c-d)(a-d)} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\Leftrightarrow z = \left[(a-b)(b-c)(c-a) - \frac{(a-b)y}{(b-d)(a-d)}\right] \frac{(c-d)(a-d)}{(a-c)} \quad (**)$$

Nhân 2 vế của (**) cho $\left(\frac{c^2}{c-d} - \frac{a^2}{a-d}\right)$, ta được

$$\begin{aligned} & \left[(a-b)(b-c)(c-a) - \frac{(a-b)y}{(b-d)(a-d)} \right] \left[\frac{(a-d)c^2 - a^2(c-d)}{a-c} \right] \\ &= \left[(a-b)(b-c)(c-a) - \frac{(a-b)y}{(b-d)(a-d)} \right] (ad+cd-ac) \end{aligned}$$

Khi đó thì

$$\begin{aligned} (*) & \Leftrightarrow \left[\frac{b^2}{b-d} - \frac{a^2}{a-d} - \frac{(a-b)(ad+cd-ac)}{(b-d)(a-d)} \right] y + (ad+cd-ac)(a-b)(b-c)(c-a) = 0 \\ & \Leftrightarrow \left[\frac{(a-d)b^2 - a^2(b-d) - (a-b)(ad+cd-ac)}{(b-d)(a-d)} \right] y = -(ad+cd-ac)(a-b)(b-c)(c-a) \\ & \Leftrightarrow \frac{(a-b)(d-a)(b-c)}{(b-d)(a-d)} y = -(ad+cd-ac)(a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

Thế $y = (ad+cd-ac)(c-a)(b-d)$ vào (**) ta được

$$\begin{aligned} z &= \left[(a-b)(b-c)(c-a) - \frac{(a-b)(ad+cd-ac)(c-a)(b-d)}{(b-d)(a-d)} \right] \frac{(c-d)(a-d)}{(a-c)} \\ &= \left[(a-b)(b-c)(c-a) - \frac{(a-b)(ad+cd-ac)(c-a)}{a-d} \right] \frac{(c-d)(a-d)}{(a-c)} \\ &= -(a-b)(b-c)(c-d)(a-d) + (a-b)(ad+cd-ac)(c-d) \\ &= (a-b)(c-d)[ad+cd-ac-(b-c)(a-d)] \\ &= (a-b)(c-d)[ad+cd-ac-ab+bd+ac-dc] \\ &= (a-b)(c-d)(ad+bd-ab) \end{aligned}$$

Lúc này suy ra $x = -(a-b)(c-d)(ad+bd-ab) - (c-a)(b-d)(ad+cd-ac) = (a-d)(b-c)(bd+cd-bc)$.

Vậy ta kết luận được bộ nghiệm của hệ phương trình.

Câu 105. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 7(x^2 + y^2) + 9z(x+y) + 13xy + 3z^2 = 1(1) \\ 7(y^2 + z^2) + 9x(y+z) + 13yz + 3x^2 = 4(2) \\ 7(z^2 + x^2) + 9y(z+x) + 13zx + 3y^2 = 9(3) \end{cases}$$

Giải

Đặt $\begin{cases} a = y + z + 2x, \\ b = x + z + 2y, \\ c = x + y + 2z \end{cases} \Rightarrow x + y + z = \frac{a+b+c}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3a-b-c}{4} \\ y = \frac{3b-a-c}{4} \\ z = \frac{3c-a-b}{4} \end{cases}$

Khi đó ta được

$$\begin{aligned} \bullet \quad 7(x^2 + y^2) &= \frac{7[(3a-b-c)^2 + (3b-a-c)^2]}{16} = \frac{7(5a^2 + 5b^2 - 2ac - 2bc - 6ab + c^2)}{8} \\ \bullet \quad 9z(x+y) &= \frac{9(3c-a-b)(a+b-c)}{8} = \frac{9(-a^2 - b^2 + 4ac + 4bc - 2ab - 3c^2)}{8} \\ \bullet \quad 13xy &= \frac{13}{16}(3a-b-c)(3b-a-c) = \frac{13(-3a^2 - 3b^2 - 2ac - 2bc + 10ab + c^2)}{16} \end{aligned}$$

| Hệ phương trình nhiều ẩn

$$\bullet \quad 3z^2 = \frac{3(3c-a-b)^2}{16} = \frac{3(a^2+b^2-6ac-6bc+2ab+9c^2)}{16}$$

Cộng tất cả điều này lại thì $(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab = 1$, tương tự $\begin{cases} (2) \Leftrightarrow b^2 + c^2 + bc = 4 \\ (3) \Leftrightarrow a^2 + c^2 + ac = 9 \end{cases}$.

Như vậy ta được hệ phương trình mới là $\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 & (1) \\ b^2 + bc + c^2 = 4 & (2) \\ c^2 + ca + a^2 = 9 & (3) \end{cases}$

Lấy $(1) - (2) \Rightarrow (a-c)(a+b+c) = -3$.

Lấy $(2) - (3) \Rightarrow (b-a)(a+b+c) = -5$

Từ 2 điều này ta suy ra $\begin{cases} 5c + 3b = 8a \\ a + b + c = 0 \end{cases}$.

Lấy $(1) - (3) \Rightarrow b^2 - c^2 + \frac{(5c+3b)(b-c)}{8} = -8$, kết hợp với (2) ta được

$$\begin{cases} 13c^2 - 2bc - 11b^2 = 64 & (*) \\ b^2 + bc + c^2 = 4 & (**) \end{cases}$$

Hệ trên cho ta $52c^2 - 8bc - 44b^2 = 64b^2 + 64bc + 64c^2 \Leftrightarrow 12c^2 + 72bc + 108b^2 = 0 \Leftrightarrow (c+3b)^2 = 0 \Leftrightarrow c = -3b$.

Thế vào (*) ta được $117b^2 + 6b^2 - 11b^2 = 64 \Rightarrow b = \frac{\pm 2}{\sqrt{7}}$.

Phần còn lại xin nhường lại cho bạn đọc!

Câu 106. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 + z^2 - (y+z)x = 1 & (1) \\ z^2 + x^2 - (z+x)y = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 - (x+y)z = 3 & (3) \end{cases}$

Giải

Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} (y+z)(y+z-x) = 1+2yz \\ (z+x)(z+x-y) = 2+2xz \\ (x+y)(x+y-z) = 3+2xy \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a = y+z-x, \\ b = x+z-y, \\ c = x+y-z \end{cases} \Rightarrow x+y+z = a+b+c \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{b+c}{2}, \\ y = \frac{a+c}{2}, \\ z = \frac{a+b}{2} \end{cases}$, thế vào hệ trên ta được

$$\begin{cases} a\left(\frac{2a+b+c}{2}\right) = 1 + \frac{(a+c)(a+b)}{2} \\ b\left(\frac{2b+a+c}{2}\right) = 2 + \frac{(b+c)(a+b)}{2} \\ c\left(\frac{2c+a+b}{2}\right) = 3 + \frac{(b+c)(a+c)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + ab + ac = 2 + a^2 + ab + ac + bc, \\ 2b^2 + ab + bc = 4 + b^2 + ab + bc + ac, \\ 2c^2 + ac + bc = 6 + c^2 + ac + bc + ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2 + bc & (1) \\ b^2 = 4 + ac & (2) \\ c^2 = 6 + ab & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta suy ra $bc = a^2 - 2$, nhận thấy $b=0$ là nghiệm của hệ phương trình, do đó ta suy ra $c = \frac{a^2-2}{b}$, thế vào (2) và (3) ta được

$$(2) \Leftrightarrow b^2 = 4 + \frac{a^3 - 2a}{b} \Rightarrow b^3 = 4b + a^3 - 2a \Rightarrow b^3 - a^3 = 4b - 2a$$

Và đồng thời

$$\begin{aligned} (3) \Leftrightarrow \frac{(a^2 - 2)^2}{b^2} &= 6 + ab \Leftrightarrow a^4 - 4a^2 + 4 = 6b^2 + ab^3 \\ &\Leftrightarrow a(a^3 - b^3) = 6b^2 + 4a^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow a(2a - 4b) = 6b^2 + 4a^2 - 4 \end{aligned}$$

Như vậy ta được hệ phương trình $\begin{cases} 6b^2 + 4ab + 2a^2 = 4 \\ b^3 - a^3 = 4b - 2a \end{cases}$, từ hệ này ta suy ra

$$(4b - 2a)(6b^2 + 4ab + 2a^2) = 4b^3 - 4a^3 \Leftrightarrow (2b - a)(3b^2 + 2ab + a^2) = b^3 - a^3 \Leftrightarrow b = \frac{-a}{5}$$

$$\text{Từ đó ta có phương trình } \frac{6a^2}{25} - \frac{4a^2}{5} + 2a^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{36a^2}{25} = 4 \Leftrightarrow a = \frac{5}{3} \vee a = \frac{-5}{3}.$$

Phần còn lại xin nhường cho bạn đọc.

Nhận xét. Ta có thể áp dụng cách làm trên để giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 + z^2 - (y + z)x = a \\ z^2 + x^2 - (x + z)y = b \\ x^2 + y^2 - (x + y)z = c \end{cases}$.

Trong đó a, b, c là các số thực dương và $\sqrt{ac} \neq b, \sqrt{ab} \neq c, \sqrt{bc} \neq a$.

Câu 107. Cho các số thực $x, y, z \neq 0$ có tổng bằng 0 và thỏa mãn điều kiện

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1 = a \quad (*)$$

Tìm tất cả các giá trị có thể có của a .

Polish JMO 2020

Giải

Đặt $m = \frac{x}{y}, n = \frac{y}{z} \Rightarrow mn = \frac{x}{z}$, từ (*) ta được $m + n + \frac{1}{mn} = mn + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + 1 = a$.

Từ giả thiết $x + y + z = 0$ ta suy ra $m + 1 + \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow mn + n + 1 = 0$, thế vào (*) ta được

$$\begin{cases} m + n + \frac{1}{mn} = a & (1) \\ mn + \frac{m + n}{mn} + 1 = a & (2) \\ mn = -1 - n & (3) \\ m + n + \frac{1}{mn} = mn + \frac{m + n}{mn} + 1 & (4) \end{cases}$$

Lấy (3) thế vào (4) ta được

$$\begin{aligned} \frac{-1 - n}{n} + n + \frac{1}{-1 - n} &= -1 - n + \frac{1}{n} + \frac{n}{-1 - n} + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{-1}{n} - 1 + n - \frac{1}{n + 1} &= -n + \frac{1}{n} - \frac{n}{1 + n} \\ \Leftrightarrow 2(n^2 - 1)(n + 1) + n^2 - n &= n^2 + n \\ \Leftrightarrow n^3 + n^2 - n - 1 = n &\Rightarrow n^3 + n^2 - 1 = 2n \end{aligned} \quad (**)$$

Lấy (1) thế vào (2) ta được

| Hệ phương trình nhiều ẩn

$$mn + \left(a - \frac{1}{mn}\right) \cdot \frac{1}{mn} = a - 1 \Leftrightarrow mn + \frac{a}{mn} - \frac{1}{(mn)^2} = a - 1 \Leftrightarrow (mn)^3 + a(mn) - 1 = (a - 1)(mn)^2$$

Lấy (3) thế vào phương trình trên ta được

$$\begin{aligned} & (mn)^3 + (mn)^2 + a(mn - (mn)^2) = 1 \\ & \Leftrightarrow (-1 - n)^3 + (-1 - n)^2 - 1 + a(-1 - n - (1 - n)^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow -(n^3 + 2n^2 + n + 1) - a(n^2 + 3n + 2) = 0 \end{aligned}$$

Lấy (**) thế tiếp tục vào phương trình trên ta được

$$-(2n + 1 - n^2 + 2n^2 + n + 1) - a(n^2 + 3n + 2) = 0 \Rightarrow -(n^2 + 3n + 2) - a(n^2 + 3n + 2) = 0$$

Đến đây ta suy ra được $a = -1$ là giá trị duy nhất có thể có của a .

Câu 108. Cho 2 số thực a, b phân biệt, giải hệ phương trình sau theo 2 ẩn này.

$$\begin{cases} 3x + z = 2y + (a + b) & (1) \\ 3x^2 + 3xz = y^2 + 2y(a + b) + ab & (2) \\ x^3 + 3x^2z = y^2(a + b) + 2yab & (3) \end{cases}$$

Giải

Lấy $a + b = 3x + z - 2y$ thế vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & 3x^2 + 3xz = y^2 + 2y(3x + z - 2y) + ab \\ & \Leftrightarrow 3x^2 + 3xz = y^2 + 6xy + 2yz - 4y^2 + ab \\ & \Leftrightarrow ab = 3x^2 + 3y^2 + 3xz - 6xy - 2yz \end{aligned}$$

Thế vào (3) ta được

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x^2z = y^2(3x + z - 2y) + 2y(3x^2 + 3y^2 + 3xz - 6xy - 2yz) \\ & \Leftrightarrow x^3 + 3x^2z = (3xy^2 + y^2z - 2y^3) + (6x^2y + 6y^3 + 6xyz - 12xy^2 - 4y^2z) \\ & \Leftrightarrow x^3 + 3x^2z = -9xy^2 - 3y^2z + 4y^3 + 6x^2y + 6xyz \\ & \Leftrightarrow x^3 + 3x^2z + 9xy^2 + 3y^2z - 4y^3 - 6x^2y - 6xyz = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^3 - 4y^3 + 9xy^2 - 6x^2y) + 3x^2z + 3y^2z - 6xyz = 0 \\ & \Leftrightarrow (x - y)^2(x - 4y) + 3z(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 3z = 0 \\ x = y \end{cases} \end{aligned}$$

Với $x = y$ thế vào (1) và (2) ta được hệ phương trình $\begin{cases} x + z = a + b & (1) \\ 2x^2 + 3xz = 2x(a + b) + ab & (2) \end{cases}$.

Ta suy ra $(a + b - x)x = ab \Leftrightarrow -x^2 + (a + b)x - ab = 0$, xét biệt thức $\Delta = (a - b)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-a - b - a + b}{-2} \\ x = \frac{-a - b + a - b}{-2} \end{cases}$.

Với $x = y = a \Rightarrow z = b$.

Với $x = y = b \Rightarrow z = a$.

Với $x = 4y - 3z$, thế vào (1) và (2) ta được

$$\begin{cases} 3(4y - 3z) + z = 2y + a + b & (1) \\ 3(4y - 3z)^2 + 3(4y - 3z)z - y^2 = 2y(a + b) + ab & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta được $10y - 8z = a + b$, lúc này phương trình (2) tương đương

$$3(16y^2 - 24yz + 9z^2) + 12yz - 9z^2 - y^2 = 2y(a+b) + ab$$

$$\Leftrightarrow 47y^2 - 60yz + 18z^2 = 2y(a+b) + ab$$

$$\Leftrightarrow 47y^2 - 60yz + 18z^2 = 2y(10y - 8z) + ab$$

$$\Leftrightarrow 27y^2 - 44yz + 18z^2 = ab$$

$$\Leftrightarrow (27y^2 - 44yz + 18z^2)(a+b)^2 = ab(10y - 8z)^2$$

$$\Leftrightarrow 27(a+b)^2 y^2 - 44(a+b)^2 yz + 18(a+b)^2 z^2 = ab(100y^2 - 160yz + 64z^2)$$

$$\Leftrightarrow (27a^2 + 27b^2 - 46ab)y^2 - (44a^2 + 44b^2 - 72ab)yz + (18a^2 + 18b^2 - 28ab)z^2 = 0$$

$$\text{Xét } \Delta = (44a^2 + 44b^2 - 72ab)^2 - 4(27a^2 + 27b^2 - 46ab)(18a^2 + 18b^2 - 28ab) = -8(a^2 - b^2)^2 < 0.$$

Vậy phương trình này vô nghiệm, do đó ta suy ra được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Lời cảm ơn

Vậy là chúng ta đã đi đến những trang sách cuối cùng rồi, thực sự với mình cuốn sách đã vượt qua dự định ban đầu rất nhiều nhờ sự giúp đỡ của các thầy cô, và bạn bè. Vì thế ở cuối cuốn sách mình xin gửi lời cảm ơn đến những người bạn, người thầy của mình.

1. Thầy Huỳnh Kim Linh – THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Khánh Hòa.
2. Cô Lưu Thị Thêm – THPT Yên Phong 1 – Bắc Ninh.
3. Bạn Đinh Quốc Khánh – A4 K53NH – THPT Ngọc Hồi – Hà Nội.
4. Bạn Nguyễn Trường Phát – Khoa Toán Tin Ứng Dụng – Đại học Sài Gòn
5. Bạn Nguyễn Mai Hoàng Anh – Lớp 12A1 – THPT Thực Hành Cao Nguyên – Đắk Lắk.
6. Bạn Đinh Phương Hằng – 12A trường THPT Bình Minh.
7. Bạn Trần Thị Thu Hiền – 12D trường THPT Bình Minh.
8. Thầy Lã Duy Tiến – THPT Bình Minh.
9. Anh Hồ Xuân Hùng – Đại học Bách Khoa Hà Nội.
10. Cô Trần Thị Thu Thủy – THPT Chuyên Điện Biên.
11. Bạn Võ Văn Thành – THPT Nguyễn Trãi – Khánh Hòa.

Niềm vui lớn nhất của những người hoàn thiện cuốn sách này là bạn đọc có thể tìm kiếm và khám phá ra nhiều điều từ cuốn sách. Lời cuối cùng xin chúc các bạn học sinh và các thầy cô đang cầm cuốn sách này trên tay thành công trong công việc và gặp được nhiều điều may mắn trong cuộc sống!

Tài liệu tham khảo

1. Phương pháp hàm số chinh phục giải toán phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất – Nguyễn Đình Thành Công
2. Bí quyết chinh phục kỳ thi THPT Quốc Gia 2 trong 1 chủ đề phương trình, bất phương trình, hệ phương trình – Phạm Bình Nguyên, Nguyễn Ngọc Duyệt
3. Luyện siêu tư duy casio chuyên đề phương trình, bất phương trình, hệ phương trình đại số và vô tỷ - Đoàn Trí Dũng, Hà Hữu Hải, Nguyễn Tấn Siêng, Hồ Xuân Trọng
4. Tư duy logic tìm tòi lời giải hệ phương trình – Mai Xuân Vinh
5. Những điều cần biết luyện thi quốc gia kỹ thuật giải nhanh hệ phương trình – Đặng Thành Nam
6. Phương pháp đánh giá nhân tử trong giải toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình – Đoàn Trí Dũng, Hà Hữu Hải
7. Tuyển chọn 410 hệ phương trình hay và đặc sắc – Nguyễn Minh Tuấn
8. Tư duy sáng tạo tìm tòi lời giải PT – BPT – HPT đại số và vô tỷ – Lê Văn Đoàn
9. Phương pháp U – V – T – W phân tích nhân tử phương trình vô tỷ – Bùi Thế Việt
10. Sáng Tạo Và Giải Phương Trình, Hệ Phương Trình, Bất Phương Trình – Nguyễn Tài Chung
11. Phương trình và hệ phương trình – Diễn đàn MathScope
12. Tuyển chọn các bài toán phương trình vô tỷ - Đoàn Quốc Việt
13. Tuyển chọn các bài toán phương trình đặc sắc – Diễn đàn K2pi
14. 101 Problems in Algebra from the training of the USA IMO team- T Andreescu, Z Feng
15. Mathematical Olympiad Treasures - Titu Andreescu, Bogdan Enescu
16. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses For Junior Section _ Vol. 1,2
17. The IMO Compendium 1959 – 2009.
18. Tuyển tập 40 năm olympic toán học quốc tế.

HẾT

TẠP CHÍ VÀ TỰ LIỆU TOÁN HỌC

Thôn 6 – Thạch Hòa – Thạch Thất – Hà Nội

Điện thoại: 0343763310; Email: tuangenk@gmail.com

Fanpage: <https://www.facebook.com/OlympiadMathematical/>

CHỊU TRÁCH NHIỆM NỘI DUNG

NGUYỄN MINH TUẤN

NGUYỄN TRƯỜNG PHÁT

NGUYỄN HOÀNG MAI ANH

ĐINH QUỐC KHÁNH

BIÊN TẬP

NGUYỄN MINH TUẤN

THIẾT KẾ BÌA

NGUYỄN MINH TUẤN

TUYỂN TẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ HAY VÀ KHÓ

Đề nghị quý bạn đọc tôn trọng bản quyền của tác giả, không sao chép bản phụ.

Mọi ý kiến thắc mắc đóng góp vui lòng gửi về địa chỉ đã cung cấp ở trên.

Cuốn sách được in xong ngày 27/10/2020.