

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT XUÂN ĐÌNH

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**RÈN LUYỆN TƯ DUY SÁNG TẠO CHO HỌC SINH THÔNG
QUA MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẪNG ĐIỂN HÌNH**

Người thực hiện: Ngô Thành Trung

Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc lĩnh vực (môn): Toán

HÀ NỘI NĂM 2023

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐƠN YÊU CẦU CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN

Kính gửi: Hội đồng khoa học ngành Giáo dục và Đào tạo

Họ và tên	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Tên sáng kiến
Ngô Thành Trung	16/07/1982	Trường THPT Xuân Đinh	Giáo viên	Thạc sỹ	Phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh thông qua một số bài toán hình học phẳng điển hình

- Lĩnh vực áp dụng sáng kiến (*nêu rõ lĩnh vực có thể áp dụng sáng kiến và vấn đề mà sáng kiến giải quyết*) Ôn thi học sinh giỏi cấp cụm, Thành Phố và THPT Quốc gia
- Ngày sáng kiến được áp dụng lần đầu hoặc áp dụng thử, (ghi ngày nào sớm hơn) Năm học 2020-2021
- Mô tả bản chất của sáng kiến: *Rèn luyện tính nhuần nhuyễn, tính mềm dẻo, tính độc đáo đồng thời dành không gian cho để người học và người dạy có thể tự sáng tạo các bài toán theo các dạng khác nhau, đó là các đặc trưng của tư duy sáng tạo, là đặc điểm cần thiết của mỗi cá nhân trong thời đại 4.0, đồng thời cũng nêu giải pháp để giải quyết một lớp bài Vận dụng cao trong đề thi THPT Quốc gia.*
- Những thông tin cần được bảo mật (nếu có):

.....

- Các điều kiện cần thiết để áp dụng sáng kiến: *Dùng để bồi dưỡng học sinh khá giỏi và Ôn luyện thi THPT Quốc gia*

- Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tác giả : *kích thích tư duy tìm tòi khám phá để tìm ra cái mới từ những cái quen thuộc đã biết tạo góp phần phát triển phẩm chất năng lực quan trọng của con người trong thời đại mới*

- Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tổ chức, cá nhân đã tham gia áp dụng sáng kiến lần đầu hoặc áp dụng thử nếu có: *là một nguồn tài liệu bổ ích, một cách nhìn riêng của tác giả trong việc phát triển phẩm chất năng lực tư duy sáng tạo cho người học, là một tài liệu tham khảo trong quá trình bồi dưỡng học sinh năng khiếu, yêu thích môn Toán hoặc có thể phát triển các phân tương tự trong chương trình giảng dạy của mình.*

Danh sách những người đã tham gia áp dụng thử hoặc áp dụng sáng kiến lần đầu (nếu có):

Tôi xin cam đoan mọi thông tin nêu trong đơn là trung thực, đúng sự thật và hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật.

Hà nội, ngày 13 tháng 03 năm 2022

Người nộp đơn



Ngô Thành Trung

PHIẾU NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ

Họ tên tác giả: **NGÔ THÀNH TRUNG**

Tên đề tài: **Rèn luyện tư duy sáng tạo cho học sinh thông qua một số bài toán hình học phẳng điển hình**

Lĩnh vực: Chuyên môn Toán

STT	Tiêu chuẩn	Điểm tối đa
1	Sáng kiến có tính mới	
1.1	Hoàn toàn mới, được áp dụng đầu tiên	30
1.2	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ khá	
1.3	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ trung bình	
1.4	Không có tính mới hoặc sao chép từ các giải pháp đã có trước đây	
Nhận xét: Sáng kiến đã nêu bật được các giải pháp phát triển và bồi dưỡng năng lực sáng tạo cho học sinh trong quá trình học tập (một trong những năng lực rất quan trọng).		
2	Sáng kiến có tính áp dụng	
2.1	Có khả năng áp dụng trong phạm vi toàn ngành hoặc rộng hơn	25
2.2	Có khả năng áp dụng trong đơn vị và có thể nhân ra một số đơn vị có cùng điều kiện	
2.3	Có khả năng áp dụng trong đơn vị	
2.4	Không có khả năng áp dụng trong đơn vị	
Nhận xét: Sáng kiến có thể áp dụng rộng rãi trong công tác giảng dạy môn Toán cấp THPT đối với các học sinh đại trà và bồi dưỡng học sinh giỏi.		
3	Sáng kiến có tính hiệu quả	
3.1	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội, có tính lan tỏa	30
3.2	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội	
3.3	Có hiệu quả, lợi ích phù hợp với mức độ phù hợp tại đơn vị	
3.4	Không có hiệu quả cụ thể	
Nhận xét: Sáng kiến có tính hiệu quả cao và có tính lan tỏa tốt		
4	Điểm trình bày	
4.1	Trình bày khoa học, hợp lý	10
4.2	Trình bày chưa khoa học, chưa hợp lý	
Nhận xét: Trình bày khoa học, hợp lý đúng qui định		
Tổng cộng: 95		Đánh giá: ☒ Đạt (≥ 70 điểm) ☐ Không đạt

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾN CƠ SỞ



HIỆU TRƯỞNG
Lê Ngọc Hoa

Contents

A. ĐẶT VẤN ĐỀ	3
I. Lý do chọn đề tài.....	3
II. Mục đích nghiên cứu.....	3
III. Đối tượng nghiên cứu	3
VI. Phạm vi nghiên cứu	3
V. Phương pháp nghiên cứu.....	3
B. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ.....	4
I. Cơ sở lý luận.....	4
II. Thực trạng của học sinh	6
III. Một số biện pháp rèn luyện dạy học tọa độ trong mặt phẳng lớp 10 cho học sinh theo hướng phát triển tư duy sáng tạo.....	7
<i>Biện pháp 1: Thiết kế và sử dụng hệ thống bài toán nhằm rèn luyện và phát triển tính nhuần nhuyễn trong sử dụng các kiến thức và kỹ năng giải toán tọa độ trong mặt phẳng.</i>	<i>7</i>
<i>Biện pháp 2: Rèn luyện tính mềm dẻo, linh hoạt cho học sinh thông qua các bài toán có thể nhìn theo nhiều phương diện khác nhau.</i>	<i>17</i>
Biện pháp 3: Phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh bằng cách tạo cơ hội cho học sinh phát triển, mở rộng bài toán.....	30
IV. Kết quả đạt được.....	33
* Đối với học sinh:	33
* Kết quả đạt được của học sinh:	34
C. Phần kết luận và khuyến nghị	34
Kết luận và đánh giá cơ bản.....	34
2.Khuyến nghị:	35
TÀI LIỆU THAM KHẢO	36

A. ĐẶT VẤN ĐỀ

I. Lý do chọn đề tài

Phát triển tư duy và lập luận cho học sinh là một trong những yêu cầu của giáo dục phổ thông môn Toán. Hiện nay đổi mới giáo dục đang là vấn đề được toàn xã hội quan tâm. Với mục tiêu đào tạo con người Việt Nam phát triển toàn diện có tính năng động, sáng tạo đáp ứng yêu cầu mới trong bối cảnh hội nhập quốc tế. Trong giáo dục cần phải đổi mới nội dung và phương pháp giáo dục. Định hướng đổi mới phương pháp dạy học được đề ra trong Luật Giáo dục (2019) là: “Phương pháp giáo dục phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, tư duy sáng tạo của người học; bồi dưỡng cho người học năng lực tự học, khả năng thực hành, lòng say mê học tập và ý chí vươn lên”. [18]

Môn Toán là môn học công cụ, có nhiều cơ hội để rèn luyện và phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh. Dạy học nội dung tọa độ trong mặt phẳng có nhiều cơ hội để phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh. Phương pháp tọa độ là một phương pháp nghiên cứu hình học. Để giải một bài toán hình học thông thường bằng phương pháp tọa độ ta có thể có nhiều cách lựa chọn hệ tọa độ khác nhau; có cách dẫn đến lời giải dài dòng phức tạp, có cách dẫn đến lời giải ngắn gọn. Điều này phụ thuộc vào sự linh hoạt và tính sáng tạo của mỗi người. Hơn nữa, mỗi bài toán hình học có thể có nhiều cách suy nghĩ, giải quyết vấn đề, dẫn đến có nhiều cơ hội để học sinh sáng tạo.

Mặt khác, nhờ phương pháp tọa độ mà từ một bài toán, chỉ cần thay đổi tọa độ, phương trình trong bài toán, ta có thể sáng tạo ra những bài toán mới; cũng có khi có được cách giải độc đáo, sáng tạo.

Vì vậy để rèn luyện tư duy sáng tạo cho học sinh tôi xây dựng đề tài: **“rèn luyện tư duy sáng tạo cho học sinh thông qua một số bài toán hình học phẳng điển hình”**

II. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận văn là đề xuất một số biện pháp dạy học chương phương pháp tọa độ trong mặt phẳng theo hướng phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh.

III. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu là những biện pháp dạy học chương phương pháp tọa độ theo hướng phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh.

VI. Phạm vi nghiên cứu

- Phạm vi nội dung: Nghiên cứu các bài toán về tọa độ trong mặt phẳng trong chương trình toán lớp 10.

- Mẫu khảo sát: Giáo viên và học sinh một số lớp 10 THPT TP Hà Nội.

V. Phương pháp nghiên cứu

- *Phương pháp nghiên cứu lý luận:* Nghiên cứu và phân tích tài liệu lý luận về tư duy, tư duy sáng tạo, các công trình nghiên cứu đã công bố liên quan đến đề tài. Đồng thời đề xuất một số biện pháp dạy học tọa độ trong mặt phẳng theo hướng phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh.

- *Phương pháp điều tra quan sát:* Khảo sát tình hình dạy và học phương pháp tọa độ trong mặt phẳng theo hướng phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh ở trường THPT trước và sau thực nghiệm.

B. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

I. Cơ sở lý luận

• Tính mềm dẻo (*flexibility*)

Tính mềm dẻo thể hiện ở năng lực thay đổi dễ dàng các trật tự của hệ thống tri thức, có khả năng chuyển từ góc độ quan niệm này sang góc độ quan niệm khác hay định nghĩa lại sự vật hiện tượng, có thể xây dựng phương pháp tư duy mới cũng như tạo ra sự vật mới, thông qua chuyển đổi mối quan hệ để nhận ra bản chất của sự vật và điều phán đoán. Tính mềm dẻo trong quá trình tư duy còn làm thay đổi một cách dễ dàng các thái độ đã cố hữu trong hoạt động trí tuệ của con người.

Tính mềm dẻo của tư duy có một số đặc trưng nổi bật sau:

- Biết vận dụng linh hoạt các thao tác phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hoá, khái quát hoá, đặc biệt hoá cùng với các phương pháp suy luận như quy nạp, diễn dịch, tương tự. Có thể dễ dàng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác.

- Không suy nghĩ rập khuôn cũng không áp dụng một cách máy móc những kinh nghiệm, những kiến thức, kỹ năng đã có vào hoàn cảnh mới mà trong đó đã có nhiều yếu tố thay đổi và có khả năng thoát khỏi ảnh hưởng kìm hãm của những cách suy nghĩ, những kinh nghiệm hay những phương pháp đã có từ trước...

- Nhận thấy những vấn đề mới trong điều kiện quen thuộc hay có thể nhìn thấy chức năng mới của đối tượng quen biết.

Vì vậy tính mềm dẻo cũng là một trong những yếu tố cơ bản của TDST, do đó để rèn luyện TDST cho HS ta có thể cho các em giải một số bài tập.

Đó là năng lực thay đổi dễ dàng các trật tự của hệ thống tri thức, có khả năng chuyển từ góc độ quan niệm này sang góc độ quan niệm khác hay định nghĩa lại sự vật hiện tượng, có thể xây dựng phương pháp tư duy mới cũng như tạo ra sự vật mới, thông qua chuyển đổi mối quan hệ để nhận ra bản chất của sự vật và điều phán đoán. Tính mềm dẻo của tư duy có một số đặc điểm nổi bật sau:

- Biết cách áp dụng linh hoạt phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hóa, khái quát hóa, chuyên môn hóa với các phương pháp suy luận như quy nạp, giải thích, tương tự. Bạn có thể dễ dàng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác.

- Không rập khuôn hay áp dụng một cách máy móc những kinh nghiệm, kiến thức và kỹ năng hiện có vào một tình huống mới, trong đó có nhiều yếu tố thay đổi và có thể thoát khỏi ảnh hưởng hạn chế của cách suy nghĩ, kinh nghiệm hoặc phương pháp đã có từ trước ...

- Nhận thấy những vấn đề mới trong điều kiện quen thuộc hay có thể nhìn thấy chức năng mới của đối tượng quen biết.

Vì vậy tính mềm dẻo cũng là một trong những yếu tố cơ bản của TDST, do đó để rèn luyện TDST cho HS ta có thể cho các em giải một số bài tập.

Ví dụ 1.3 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A có diện tích là 18, đỉnh $A(-1;4)$, hai đỉnh B,C thuộc đường thẳng $d: x - y - 4 = 0$ xác định tọa độ các đỉnh B, C. (Đề thi THPTQG 2009 khối B)

Phân tích

Với bài toán này để tìm tọa các đỉnh của tam giác, ngoài việc sử dụng công thức khoảng cách, học sinh cần linh hoạt áp dụng thêm công thức của diện tích tam giác để dễ dàng giải quyết được nút thắt của bài toán, qua đó bài toán sẽ được giải quyết ngắn gọn hơn cách thông thường. Cụ thể như sau:

Gọi H là hình chiếu của A trên BC ta có $BH = CH = \frac{BC}{2} = \frac{2.S\Delta ABC}{AH} = \frac{2.S\Delta ABC}{d(A,d)} = 2\sqrt{2}$.

Từ đó ta có $AB = AC = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \frac{\sqrt{97}}{2}$.

Từ đó ta có tọa độ hai điểm B,C là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-4)^2 = \frac{97}{4} \\ x-y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases};$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right); C\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right); C\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right); B\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

• *Tính độc đáo(originality)*

Là khả năng tìm kiếm và quyết định các phương pháp lạ và độc đáo. Tính độc đáo thể hiện qua các đặc trưng: Khả năng tìm kiếm kết hợp với những liên tưởng mới nhất, khả năng tìm mối quan hệ trong các sự kiện bên ngoài dường như không liên quan, khả năng tìm giải pháp lạ mặc dù đã

biết có những giải pháp khác.

Ba yếu tố cơ bản nói trên có quan hệ mật thiết với nhau, bổ sung và hỗ trợ cho nhau. Người có khả năng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác sẽ tìm được nhiều giải pháp trên các góc độ và tình huống khác nhau. Từ đó đề xuất được nhiều phương án giải khác nhau và có thể tìm ra được giải pháp lạ, đặc sắc. Các yếu tố như tính mềm dẻo, tính nhuần nhuyễn, tính độc đáo có quan hệ khăng khít với tính nhạy cảm vấn đề, tính hoàn thiện. Tất cả các yếu tố đặc trưng nói trên cùng góp phần tạo nên TDST là hoạt động trí tuệ cao nhất của con người.

Ví dụ 1.4

Chứng minh rằng các đường thẳng có phương trình dạng: $2tx + (1-t^2)y + 1 + t^2 = 0$ (t là tham số) đều tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Nếu giải quyết bài toán theo cách nghĩ thông thường ta gọi là tâm đường tròn là $I(a;b)$ bán kính R. Khi đó hệ phương trình của đường thẳng và đường tròn phải có nghiệm kép với mọi t, rút x theo y từ phương trình t thế vào phương trình đường tròn rồi tìm điều kiện để phương trình bậc hai ẩn y có nghiệm kép. Biến đổi điều kiện $\Delta = 0, \forall t$ sắp xếp đa thức theo t cho các hệ số đa thức bằng 0 sẽ được a, b, R.

Một cách nhìn khác cải tiến hơn thay cho việc giải hệ là cho $d(I;d) = R$ mọi t. Tuy nhiên còn một cách độc đáo hơn như sau:

- Các hệ số $2t, 1-t^2, 1+t^2$ trong phương trình đường thẳng gần gũi với công thức

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sin \alpha; \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos \alpha.$$

$$\text{- Phương trình } 2tx + (1-t^2)y + 1+t^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2t}{t^2+1}x + \frac{1-t^2}{1+t^2}y + 1 = 0$$

Đặt $t = \tan \frac{\alpha}{2}$, phương trình này tương đương với phương trình $x \sin \alpha + y \cos \alpha + 1 = 0$.

Các đường thẳng này luôn tiếp xúc với đường tròn tâm $I(x_0; y_0)$ bán kính R khi và chỉ khi khoảng cách từ $I(x_0; y_0)$ đến các đường thẳng này đều bằng R , tức là

$$\frac{|x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha + 1|}{1} = R, \forall \alpha. \text{ Điều này xảy ra khi và chỉ khi } x_0 = 0, y_0 = 0, R = 1. \text{ Vậy các}$$

đường thẳng đã cho luôn tiếp xúc với đường tròn đơn vị trong mặt phẳng tọa độ.

Ngoài 3 đặc tính cơ bản trên người ta còn quan tâm tới 2 đặc tính sau của tư duy sáng tạo là tính nhạy cảm và tính hoàn thiện.

• *Tính nhạy cảm*

Đó là khả năng phát hiện nhanh các vấn đề, xung đột, sai sót và sự bất hợp lý, với sự tinh tế của các cơ quan cảm giác, với khả năng cảm nhận trực tiếp, giàu cảm xúc, nhạy cảm, có thể đoán biết được chính xác cảm xúc của người khác. Điều này còn được thể hiện thông qua việc thích ứng nhanh chóng và linh hoạt. Độ nhạy cảm cũng được biểu hiện trong điều kiện khó khăn và cấp bách mà vẫn tìm ra được những giải pháp phù hợp nhất.

• *Tính hoàn thiện*

Tính hoàn thiện là khả năng phối hợp các ý nghĩ và hành động, lập kế hoạch nhằm phát triển ý tưởng sau đó kiểm tra và kiểm chứng ý tưởng.

Năm yếu tố cơ bản của tư duy sáng tạo nêu trên biểu hiện khá rõ ở học sinh nói chung và đặc biệt rõ nét đối với học sinh khá, giỏi. Trong học tập toán mà cụ thể là trong hoạt động giải toán, các em có khả năng di chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác, biết sử dụng khéo léo giữa phân tích và tổng hợp, biết phối hợp giữ khái quát hoá, đặc biệt hoá và tương tự hóa. Nhưng điều quan trọng nhất là giáo viên phải có các phương pháp dạy học thích hợp để có thể bồi dưỡng và phát triển tốt hơn năng lực sáng tạo cho học sinh.

II. Thực trạng của học sinh

Các em học sinh cũng có nhận xét khá tương đồng với các thầy cô ở chỗ: Phương trình đường thẳng, phương trình đường tròn là nội dung không dễ học (66/80 em), các em cũng chưa thấy được tầm quan trọng của nội dung kiến thức ở chương này (72/80 em).

Qua trao đổi trực tiếp với các thầy cô dạy Toán ở trường THPT Ngô Sỹ Liên, tác giả thấy một số thầy cô còn chưa quan tâm nhiều đến việc rèn luyện tư duy sáng tạo cho học sinh. Bản thân các em học sinh cũng chưa quan tâm nhiều đến các thành tố của tư duy sáng tạo, các em chỉ quan tâm đến con điểm trong bài kiểm tra mà chưa thực sự để ý đến việc bài toán có thể tư duy theo nhiều hướng để có nhiều cách giải.

III. Một số biện pháp rèn luyện dạy học tọa độ trong mặt phẳng lớp 10 cho học sinh theo hướng phát triển tư duy sáng tạo.

Biện pháp 1: Thiết kế và sử dụng hệ thống bài toán nhằm rèn luyện và phát triển tính nhuần nhuyễn trong sử dụng các kiến thức và kỹ năng giải toán tọa độ trong mặt phẳng.

Hệ thống bài toán nhằm rèn luyện và phát triển tính nhuần nhuyễn trong sử dụng các kiến thức và kỹ năng giải toán tọa độ trong mặt phẳng. Biện pháp này giúp các học sinh củng cố kiến thức cơ bản, khắc sâu kiến thức. Đây là biện pháp quan trọng giúp học sinh bước đầu được rèn luyện tính nhuần nhuyễn khi làm bài.

Các kiến thức và kỹ năng được rèn luyện và phát triển ở học sinh thông qua biện pháp này là:

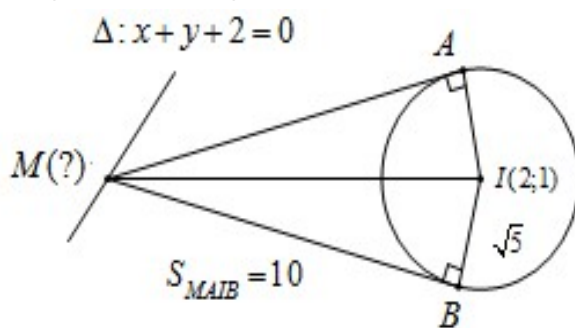
- Lấy được điểm, VTCP, VTPT khi biết phương trình đường thẳng.
- Viết phương trình đường thẳng khi biết các yếu tố xác định đường thẳng đó.
- Sử dụng các biểu thức về khoảng cách: hai điểm, một điểm đến một đường thẳng...
- Lấy tọa độ tâm, bán kính đường tròn.
- Viết phương trình đường tròn khi biết các yếu tố xác định của nó.

Nội dung cụ thể được trình bày qua các ví dụ minh họa sau:

Ví dụ 1 (A – 2011). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc Δ . Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M , biết tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng 10.

Phân tích

Điểm M thuộc đường thẳng Δ dựa vào hình vẽ ta thấy hai tam giác MAI và MBI vuông tại A, B và diện tích tam giác MAI bằng 5, mà hai lần diện tích tam giác MAI là 10 chính là tích



của MA và IA , từ đó ta xác định được điểm M nhờ điểm M nằm trên đường thẳng Δ và có khoảng cách từ điểm I cố định tới M là một hằng số

Lời giải:

$$M \in d: x - y + 3 = 0, S_{MAB} = 2S_{MAI} = BI \cdot MB = \sqrt{5} \cdot MB = 10$$

$$+ \text{Ta có: } (C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} I(2;1) \\ R = IB = \sqrt{5} \end{cases}$$

+ vì MA, MB là các tiếp tuyến (A, B là các tiếp điểm).

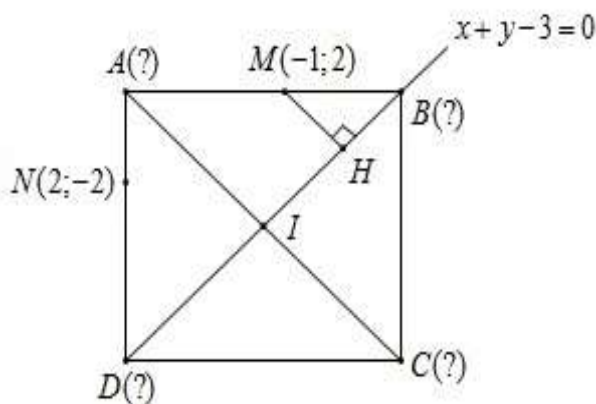
$$\Rightarrow S_{MAIB} = 2S_{MAI} = IA \cdot MA = \sqrt{5}MA = 10 \Rightarrow MI = \sqrt{MA^2 + IA^2} = 5$$

+ Gọi $M(t; -t-2) \in \Delta$

+ Khi đó: $MI = 5 \Leftrightarrow MI^2 = 25 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (-t-3)^2 = 25 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; -4) \\ M(-3; 1) \end{cases}.$$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có BD nằm trên đường thẳng có phương trình: $x + y - 3 = 0$, điểm $M(-1; 2)$ thuộc đường thẳng AB , điểm $N(2; -2)$ thuộc đường thẳng AD . Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết điểm B có hoành độ dương.



Phân tích:

❖ Trong dữ kiện của bài toán ta nhận thấy điểm có lợi chính là điểm B, bởi phương trình BD đã biết và điểm B có hoành độ dương.

❖ Ta đã biết tọa độ hai điểm $M(-1; 2)$ và $N(2; -2)$ nên ta tính được độ dài đoạn thẳng BM hoặc BN ta sẽ tìm được tọa độ điểm B nhờ bài toán quen thuộc thông qua khoảng cách từ M hoặc N đến BD.

❖ Khi tìm được tọa độ điểm B ta sẽ viết được phương trình AB, AD ta sẽ tìm được tọa độ các điểm còn lại nhờ tính chất trung điểm và giao điểm hai đường chéo.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $BD \Rightarrow MH = d(M, BD) = \frac{|-1 + 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$

Tam giác MBH vuông cân tại H nên $BM = BH\sqrt{2} = 2$

Gọi $B(t; 3-t)$, ($t > 0$) khi đó:

$$BM^2 = 4 \Leftrightarrow (t+1)^2 + (t-1)^2 = 4 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -1 \text{ (loại)} \Rightarrow B(1; 2)$$

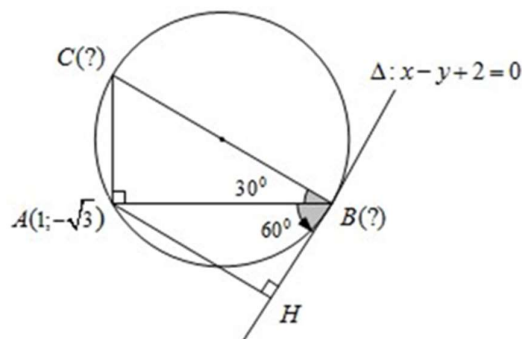
+ AB đi qua B và M nên có phương trình $y = 2 \Rightarrow A(2; 2)$

$$\text{+ Tọa độ D là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 2 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow D(2; 1)$$

+ Tọa độ C thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow C(1; 1)$

Vậy $A(2;2), B(1;2), C(1;1), D(2;1)$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC vuông tại $A(1; -\sqrt{3})$ và góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$, đường thẳng $\Delta: x - y + 2 = 0$ là tiếp tuyến của đường tròn tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ các điểm B và C biết hoành độ B là số hữu tỉ.



Phân tích:

Ở đây, B đang thuộc đường thẳng Δ và A là điểm đã biết tọa độ. Do đó, nếu tính được độ dài đoạn AB ta sẽ chuyển được về bài toán tìm $B \in \Delta$ biết BA, H cố định. Từ đây ta dựa vào dữ kiện bài toán để tìm tọa độ điểm B, dễ dàng viết được phương trình BC và AC để suy ra tọa độ điểm C.

Lời giải:

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d, suy ra:

$$AH = d(A, \Delta) = \frac{|1 + \sqrt{3} + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Tam giác ABC vuông tại A nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nhận BC là đường kính.

Mặt khác: Δ là tiếp tuyến tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $\Delta \perp BC$.

Khi đó: $\widehat{ABH} = 60^\circ$ và xét tam giác vuông ABH ta có:

$$AB = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

+ Gọi $B(t; t+2)$ với $t \in \mathbb{Q}$, khi đó:

$$AB^2 = 8 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (t-1)^2 + (t+2+\sqrt{3})^2 = 8 + 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + (1 + \sqrt{3})t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -1 - \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \text{ (loại)}$$

Suy ra $B(0; 2)$.

+ Khi đó BC đi qua $B(0; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}} = \overrightarrow{u_\Delta} = (1; 1)$ nên có phương trình:
 $x + y - 2 = 0$

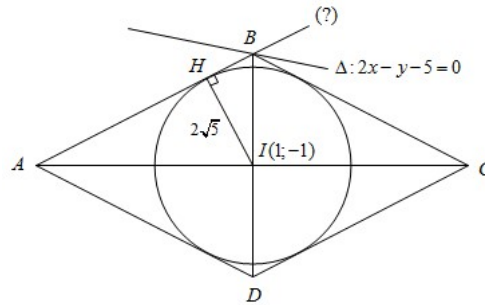
AC đi qua $A(1; -\sqrt{3})$, có $\overrightarrow{n_{AC}} = \overrightarrow{BA} = (1; -2 - \sqrt{3})$ có phương trình:

$$x - (2 + \sqrt{3})y - 4 - 2\sqrt{3} = 0$$

+ Vì $BC \cap AC = \{C\}$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - (2 + \sqrt{3})y - 4 - 2\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow C\left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Ví dụ 4. Cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 18 = 0$. Biết $AC = 2BD$, điểm B có hoành độ dương và thuộc đường thẳng $\Delta: 2x - y - 5 = 0$. Viết phương trình cạnh AB.



Phân tích:

+ Ở đây B thuộc đường thẳng Δ và I là tâm của đường tròn (C) đã biết tọa độ do đó nếu tính được độ dài đoạn BI ta sẽ chuyển được về bài toán tìm tọa độ một điểm thuộc đường thẳng, biết yếu tố khoảng cách. Lúc này ta sẽ cắt nghĩa dữ kiện của bài toán để làm điều này (cụ thể ở lời giải).

+ Khi đã tìm được điểm B ta chuyển về bài toán viết phương trình đường thẳng AB đi qua điểm B đã biết tọa độ và cách điểm I cho trước một khoảng không đổi R.

Lời giải:

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Gọi H là hình chiếu của I trên AB, suy ra $IH = R = 2\sqrt{5}$.

Vì ABCD là hình thoi và $AC = 2BD$ nên $AI = 2BI$, khi đó xét tam giác vuông ABI ta có:

$$\frac{1}{AI^2} + \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{HI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4BI^2} + \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{(2\sqrt{5})^2} \Leftrightarrow BI = 5$$

+ Gọi $B(t; 2t - 5) \in \Delta$ với $t > 0$, khi đó:

$$BI = 5 \Leftrightarrow BI^2 = 25 \Leftrightarrow (t - 1)^2 + (2t - 4)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 18t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ hoặc } t = -\frac{2}{5} (\text{loại}) \Rightarrow B(4; 3).$$

+ Gọi VTPT của AB là $\vec{n}_{AB} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 > 0$, khi đó phương trình AB có dạng:

$$a(x - 4) + b(y - 3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 4a - 3b = 0$$

Ta có: $d(I; AB) = R \Leftrightarrow \frac{|a-b-4a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\sqrt{5}$

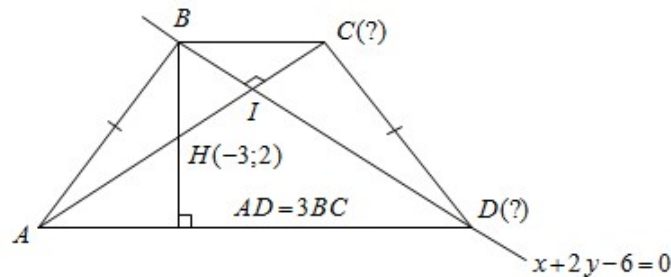
$$\Leftrightarrow (3a+4b)^2 = 20(a^2+b^2) \Leftrightarrow 11a^2 - 24ab + 4b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 11\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 24\frac{a}{b} + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2 \text{ hoặc } \frac{a}{b} = \frac{2}{11}$$

+ Với $\frac{a}{b} = 2$ chọn $a = 2, b = 1$ ta có phương trình AB là: $2x + y - 11 = 0$

Với $\frac{a}{b} = \frac{2}{11}$ chọn $a = 2, b = 11$ ta có phương trình AB là: $2x + 11y - 41 = 0$.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD = 3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x + 2y - 6 = 0$ và tam giác ABD có trực tâm là $H(-3; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh C, D.



Phân tích:

Với yêu cầu của bài toán, ban đầu sẽ cho ta được chùm các câu hỏi và các hướng phân tích sau: Với C và D ta ưu tiên tìm điểm nào trước? D đang thuộc đường thẳng BD đã biết phương trình, C thuộc đường thẳng AC mà ta hoàn toàn có thể viết được phương trình (AC đi qua H và vuông góc với BD). Khi đó giao điểm $AC \cap BD = \{I\}$ hoàn toàn xác định. Ta cần thêm những dữ kiện “có lợi” cho C và D. Do ABCD là hình thang cân nên $IB = IC \Rightarrow \widehat{BCI} = 45^\circ$ suy ra tam giác BCH cân tại B suy ra I là trung điểm của HC. Nghĩa là ta sẽ tìm được tọa độ điểm C trước. Lúc này các dữ kiện chưa được khai thác là BC song song với AD và $AD = 3BC$, từ đây ta nghĩ tới định lý Ta-Lét và suy ra được $DI = 3BI = 3IH$ khi đó việc tìm tọa độ điểm D được đưa về bài toán tìm 1 điểm thuộc đường thẳng và biết độ dài đoạn thẳng cố định.

Lời giải:

+ Vì $AC \perp BD \Rightarrow \vec{n}_{AC} = \vec{u}_{BD} = (2; -1)$, nên AC có phương trình là:

$$2(x+3) - (y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 8 = 0$$

Gọi $AC \cap BD = \{I\}$. Khi đó tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ 2x - y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow I(-2; 4)$$

+ Do ABCD là hình thang cân nên $IB = IC \Rightarrow \widehat{BCI} = 45^\circ$ suy ra tam giác BCH cân tại B suy ra I là trung điểm của HC $\Rightarrow C(-1; 6)$

+ Áp dụng định lý Ta-lét với $AD \parallel BC$ ta có:

$$\frac{ID}{IB} = \frac{AD}{BC} = 3 \Rightarrow ID = 3IB = 3IH = 3\sqrt{5}$$

+ Gọi $D(6-2t; t) \in BD$, khi đó $ID = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow ID^2 = 45$

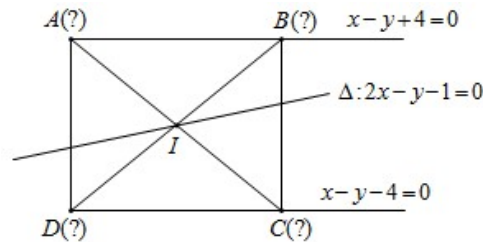
$$\Leftrightarrow (2t-8)^2 + (t-4)^2 = 45 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D(4;1) \\ D(-8;7) \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} C(-1;6) \\ D(4;1) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} C(-1;6) \\ D(-8;7) \end{cases}$

Nhận xét:

Khi bài toán yêu cầu tìm hai điểm trở lên thì thứ tự tìm điểm thường ưu tiên theo các dự kiện sau: Điểm cần tìm có liên quan tới hệ thức vector, điểm thuộc đường đã biết phương trình...

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD có phương trình đường thẳng chứa các cạnh AB và CD lần lượt là $x - y + 4 = 0$ và $x - y - 4 = 0$. Xác định toạ độ các đỉnh của hình vuông biết tâm của hình vuông thuộc đường thẳng $\Delta: 2x - y - 1 = 0$.



Phân tích:

Ở bài toán này $AB \parallel CD$ và đều đã biết phương trình, vì vậy ta hoàn toàn có thể tính được độ dài một cạnh của hình vuông (khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD). Khi đó khoảng cách từ I tới AB hoặc CD là hoàn toàn tính được, nghĩa là ta hoàn toàn tìm được điểm I. Song ở bài toán này, để tránh không phải loại bớt nghiệm ta có thể sử dụng luôn hệ thức $d(I, AB) = d(I, CD)$ để tìm toạ độ điểm I. Khi tìm được điểm I ta dễ dàng viết được phương trình đường thẳng AD và tìm được toạ độ điểm A, B, C, D.

Lời giải:

Gọi $I(t; 2t-1) \in \Delta$ là tâm của hình vuông ABCD.

$$\text{Ta có: } d(I, AB) = d(I, CD) \Leftrightarrow \frac{|t - (2t-1) + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{|t - (2t-1) - 4|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |t-5| = |t+3| \Leftrightarrow t=1$$

$$\Rightarrow I(1;1)$$

Vì $AB \perp AD$, nên phương trình AD có dạng: $x + y + m = 0$

$$\text{Ta có: } d(I, AD) = d(I, AB) \Leftrightarrow \frac{|m+2|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD: x + y + 2 = 0 \\ AD: x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

+ Với $AD: x + y + 2 = 0$, toạ độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-3;1)$$

Toạ độ điểm D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow D(1;-3)$$

Do I(1;1) là trung điểm của AC, BD nên ta suy ra C(5;1), B(1;5).

+ Với $AD: x + y - 6 = 0$, toạ độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(1;5)$$

Toạ độ điểm D là nghiệm của hệ phương trình:

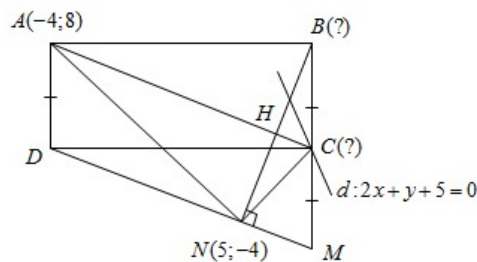
$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow D(5;1)$$

Do I(1;1) là trung điểm của AC, BD nên ta suy ra C(1;-3), B(-3;1).

Vậy A(-3;1); B(1;5); C(5;1); D(1;-3) hoặc A(1;5), B(-3;1), C(1;-3), D(5;1).

Nhận xét: Nếu bài toán trên việc tìm I ta sử dụng đẳng thức $d(I, AB) = 2\sqrt{2}$ (trước đó ta đi tính $d(AB, CD) = d(M, CD) = 4\sqrt{2}$ với $M \in AB$) sẽ cho ra hai điểm I, khi đó ta phải có bước thử lại $d(I, CD) = 2\sqrt{2}$. Song ở bài toán trên thay vì làm thế, ta sử dụng đẳng thức: $d(I, AB) = d(I, CD)$ giúp ta tìm được duy nhất được điểm I thỏa mãn bài toán. Tổng quát ta được bài toán: “Tìm toạ độ điểm $M \in \Delta$ và liên hệ với một đường thẳng khác qua hệ thức có yếu tố khoảng cách”.

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$ và A(-4;8). Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm toạ độ các điểm B và C, biết rằng N(5;-4).



Phân tích:

Do C thuộc đường thẳng d nên ta nghĩ ngay tới việc tìm điểm C trước bằng cách tham số hoá toạ độ điểm $C(t; -2t - 5) \in d$.

Lúc này ta cần thiết lập một phương trình $f(t) = 0$. Trong bài toán có 2 yếu tố điểm tường minh là A(-4;8) và N(5;-4). Khi đó ta nghĩ ngay tới việc gắn kết các điểm C, A, N để tạo mối liên hệ. Ta đặt câu hỏi: “tam giác CAN có gì đặc biệt?”. Bằng kiến thức hình học phẳng ta dễ dàng trả lời được câu hỏi bằng việc chứng minh tam giác CAN vuông tại N.

Lời giải:

+ Gọi $AC \cap BN = \{H\}$.

Do ACMD là hình bình hành nên $AC \parallel DM$ hay $CH \parallel MN$.

Suy ra CH là đường trung bình trong $\triangle BNM \Rightarrow \begin{cases} CH \perp BN \\ HB = HN \end{cases} \Rightarrow B$

đối xứng với N qua AC.

Khi đó $\widehat{ANC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$ hay $AN \perp NC(*)$

+ Gọi $C(t; -2t-5) \in d \Rightarrow \overrightarrow{NC} = (t-5; -2t-1)$ và ta có $\overrightarrow{AN} = (9; -12)$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow 9(t-5) - 12(-2t-1) = 0$
 $\Leftrightarrow 33t - 33 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow C(1; -7).$

+ Ta có $\overrightarrow{AC} = (5; -15) = 5(1; -3)$, suy ra phương trình $AC: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -7-3t \end{cases}$

Gọi $H(1+m; -7-3m) \in AC \Rightarrow \overrightarrow{NH} = (m-4; -3m-3).$

$NH \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{NH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m-4-3(-3m-3) = 0$

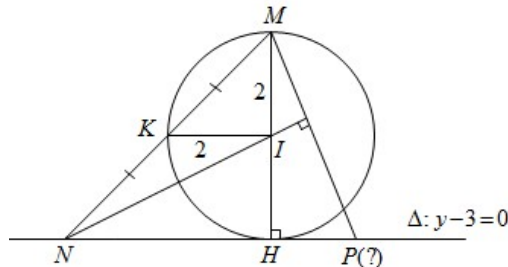
Do $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow H\left(\frac{1}{2}; -\frac{11}{2}\right)$

+ H là trung điểm của BN nên suy ra $\begin{cases} x_B = 2x_H - x_N = -4 \\ y_B = 2y_H - y_N = -7 \end{cases} \Rightarrow B(-4; -7)$

Nhận xét:

Khi bài toán tìm điểm $M(t)$ đang thiếu đi một yếu tố (cần để lập phương trình chứa t) thì ta sẽ cần khai thác các dữ kiện còn lại của bài toán. Cụ thể: nếu bài toán cho biết toạ độ một điểm, ta nghĩ tới việc tính khoảng cách từ M tới điểm đó. Nếu bài toán cho biết phương trình một đường thẳng, ta nên tìm cách tính khoảng cách từ M tới đường thẳng đó. Nếu bài toán cho biết toạ độ của hai điểm (như ví dụ 7) ta sẽ gắn kết M với hai điểm đó, bằng cách trả lời câu hỏi: “ba điểm này tạo thành tam giác gì đặc biệt?”, “nếu ba điểm này thẳng hàng thì chúng có mối liên hệ gì qua hệ thức vector?”.

Ví dụ 8: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ và đường thẳng $\Delta: y-3=0$. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C), các đỉnh N và P thuộc Δ , đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C). Tìm toạ độ điểm P.

**Phân tích:**

Một câu hỏi quen thuộc khi đứng trước bài toán hình học Oxy: “ Với những dữ kiện ban đầu, ta có thể tìm được ngay tọa độ của những điểm nào trước?”. Trong bài toán này câu trả lời là điểm M. Bởi ta nhìn thấy ngay điểm M với $MI=R=2$ và M thuộc đường thẳng đi qua I vuông góc với Δ .

Nếu biết trung điểm K của MN ta sẽ suy ra được tọa độ điểm N và tìm được điểm P. Cụ thể: $P \in \Delta$ và $NI \perp MP$. Như vậy lúc này ta cần tìm tọa độ điểm K.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm I(1;1) và bán kính $R=2$.

Ta có MI đi qua I(1;1) vuông góc với $\Delta: y-3=0$ nên MI có phương trình: $x-1=0$.

$$\text{Gọi } M(1;m), \text{ khi đó } MI^2 = R^2 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1;-1)(TM) \\ M(1;3)(L) \end{cases}$$

Gọi K là trung điểm của MN, do Δ tiếp xúc với (C) tại H nên IK là đường trung bình của tam giác MNH $\Rightarrow IK \parallel \Delta$, suy ra phương trình IK là: $y-1=0$.

$$\text{Gọi } K(t;1) \in IK, \text{ khi đó } KI^2 = R^2 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} K(-1;1) \\ K(3;1) \end{cases}$$

Với $K(-1;1) \Rightarrow N(-3;3); K(3;1) \Rightarrow N(5;3)$ (vì K là trung điểm của MN).

Gọi $P(a;3) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{MP} = (a-1;4)$

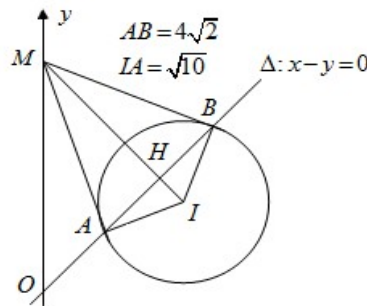
Với $N(-3;3) \Rightarrow \overrightarrow{NI} = (4;-2)$, khi đó $\overrightarrow{NI} \perp \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow 4(a-1) - 2.4 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow P(3;3)$

Với $N(5;3) \Rightarrow \overrightarrow{NI} = (-4;-2)$, khi đó $\overrightarrow{NI} \perp \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow -4(a-1) - 2.4 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow P(-1;3)$

Vậy $P(3;3)$ hoặc $P(-1;3)$.

Chú ý: Với dữ kiện đặc biệt của bài toán: Δ tiếp xúc với (C) tại H, khi đó ta có thể tìm M theo cách nhìn I là trung điểm của MH.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y=0$. Đường tròn (C) có bán kính $R=\sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A,B sao cho $AB=4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).



Phân tích:

Ta nhận thấy để giải quyết được yêu cầu bài toán, ta cần tìm tọa độ tâm I của đường tròn (C).

Vẫn một tư duy quen thuộc khi đi tìm hiểu, ta sẽ cần tìm ra các yếu tố định tính (điểm I nằm trên đường thẳng nào đã biết phương trình?) và yếu tố định lượng liên quan tới điểm I (điểm

I có cách một điểm cố định nào đó một khoảng tính được không? Có cách một đường thẳng cho trước một khoảng không đổi không?). Để có được điều này ta cần khai thác các dữ kiện mà bài toán cho.

Nếu gọi H là giao điểm của IM và Δ (với M là giao của hai tiếp tuyến) ta sẽ dễ dàng tính được $IH = \sqrt{2}$ hay $d(I, \Delta) = \sqrt{2}$.

$IM \perp \Delta$, nếu biết thêm toạ độ một điểm thuộc IM ta sẽ viết phương trình IM và sẽ tìm được điểm M. Lúc này với dữ kiện M thuộc tia Oy, định hướng ta đi tìm toạ độ điểm M.

Với số liệu $R = \sqrt{10}$ và $AB = 4\sqrt{2}$ giúp ta tính được $MH = 4\sqrt{2}$ hay $d(M, \Delta) = 4\sqrt{2}$ từ đó tìm được M.

Lời giải:

Gọi I là tâm của đường tròn (C); M là giao điểm của tiếp tuyến tại A và B của (C), H là giao điểm của AB và IM.

Do M thuộc tia Oy nên gọi $M(0;m)$ với $m \geq 0$ và H là trung điểm của $AB \Rightarrow AH = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}$

Xét tam giác IAM, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{40} \Leftrightarrow AM = 2\sqrt{10}$$

Suy ra $MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 4\sqrt{2}$

$$\text{Mà } MH = d(M, \Delta) \Leftrightarrow 4\sqrt{2} = \frac{|m|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8(TM) \\ m = -8(L) \end{cases}$$

Do đó $M(0;8)$.

Đường thẳng IM qua M và vuông góc với Δ nên có phương trình: $x + y - 8 = 0$

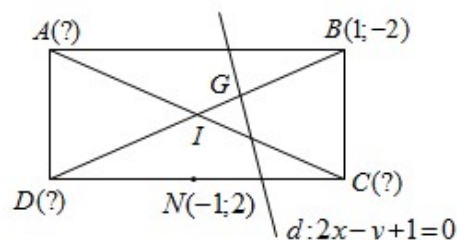
Khi đó $I(t; 8-t)$, suy ra: $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow d(I, \Delta) = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|t - (8-t)|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(5;3) \\ I(3;5) \end{cases}$$

Kiểm tra điều kiện $IM = \sqrt{IA^2 + AM^2} = 5\sqrt{2}$, ta được $I(5;3)$

Vậy đường tròn (C) có phương trình $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10$.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có B(1;-2) và trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$. Trung điểm của CD là điểm N(-1;2). Tìm toạ độ các đỉnh A, C, D. Biết G có hoành độ nhỏ nhất.



Phân tích:

Trọng tâm G thuộc đường thẳng d nên ta nghĩ tới việc tham số hoá G(t). Ta nhận thấy D có mối liên hệ với G qua hệ thức vector $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BG}$ và N là trung điểm của DC. Nghĩa là ta cũng suy ra được D(t) và C(t). Mà BCD là tam giác vuông tại C nên ta hoàn toàn tìm được C và D. Khi đó việc tìm điểm A sẽ trở nên đơn giản nhờ hệ thức $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải:

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $G \in d \Rightarrow G(t; 2t+1)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BG}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D - 1 = 3(t - 1) \\ y_D + 2 = 3(2t + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3t - 2 \\ y_D = 6t + 7 \end{cases} \Rightarrow D(3t - 2; 6t + 7)$$

Do N là trung điểm của DC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_N - x_D \\ y_C = 2y_N - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -3t \\ y_C = -3 - 6t \end{cases} \Rightarrow C(-3t; -3 - 6t)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CB} = (3t + 1; 6t + 1); \overrightarrow{CD} = (6t - 2; 12t + 10)$$

Vì tam giác BCD vuông cân tại C nên ta có:

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (3t + 1)(6t - 2) + (6t + 1)(12t + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow 45t^2 + 36t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ t = -\frac{2}{25} \end{cases}$$

$$\text{Do G có hoành độ nhỏ nhất nên } t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} D(-4; 3) \\ C(2; 1) \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} x_A - 1 = -6 \\ y_A + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -5 \\ y_A = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-5; 0)$$

Vậy A(-5;0); D(-4;3); C(2;1).

Nhận xét:

Khi chúng ta gặp bài toán tìm điểm, mà các điểm này chúng ta không chỉ ra được nó thuộc đường nào đã biết phương trình. Lúc đó giải pháp là tìm mối liên hệ thông qua các điểm có thể tham số hoá được (những điểm thuộc đường thẳng đề bài đã cho hoặc viết được phương trình). Cụ thể ở ví dụ trên ta có mối liên hệ giữa D và G; C và D mà G tham số hoá được theo ẩn t do thuộc đường thẳng đề bài cho và tìm cách tạo ra phương trình chứa t.

Biện pháp 2: Rèn luyện tính mềm dẻo, linh hoạt cho học sinh thông qua các bài toán có thể nhìn theo nhiều phương diện khác nhau.

Những bài toán liên quan đến phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, có thể nhìn theo nhiều phương diện khác nhau, được thể hiện qua sự chuyển hoá trong một số dạng toán sau:

- Dạng toán có sự chuyển hoá giữa phương pháp tọa độ và phương pháp hình học thông thường;

- Dạng toán có sự chuyển hoá từ Đại số (phương trình, bất phương trình...) sang tọa độ trong mặt phẳng;

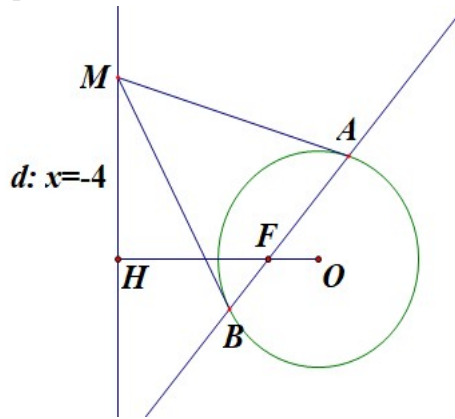
- Dạng toán chuyển hoá từ số phức sang tọa độ trong mặt phẳng...

Thông qua các dạng toán này, tính mềm dẻo, linh hoạt trong tư duy sáng tạo của học sinh sẽ được rèn luyện và phát triển.

Sau đây là những ví dụ minh họa cho mỗi dạng toán trên.

1. Dạng toán có sự chuyển hoá giữa phương pháp tọa độ và phương pháp hình học thông thường.

Ví dụ 1: Cho đường tròn (ξ) tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 2$ và đường thẳng $d: x = -4$. Từ điểm M trên d kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn với A, B là hai tiếp điểm. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định.



Phân tích: Thông thường ta gọi $M(-4;a) \in d$ và viết phương trình tiếp tuyến qua M , sau đó tìm tọa độ tiếp điểm A, B rồi viết phương trình đường thẳng AB . Từ đó chứng minh AB đi qua điểm cố định.

Theo cách này việc viết phương trình đường thẳng AB là không hề dễ, không khả quan đối với học sinh.

Nếu linh hoạt trong cách nghĩ, ta có thể sử dụng cách nghĩ ở lớp 9 THCS như sau: điểm cố định cần tìm phải liên quan đến những yếu tố cố định đã cho trong bài toán. Ở đây, yếu tố cố định đã cho là đường thẳng d và $(I; R)$. Phải chăng đó là giao điểm F của d với đường thẳng $OH \perp d$. Đây là một dự đoán đúng.

Thật vậy ta có:

$$+ OF.OH = OE.OM = OB^2 = R^2 \Rightarrow F \text{ cố định.}$$

$$+ OF.OH = R^2 = 4 \Rightarrow OF = 1 \text{ từ đó ta xác định được vị trí điểm } F.$$

Một cách nhìn khác AB là trục đẳng phương của hai đường tròn đường tròn (ξ) và đường tròn đường kính AB , từ đó dễ dàng viết được phương trình đường thẳng AB .

Ta sẽ giải bài toán trên theo hai cách suy nghĩ trên.

Cách 1:

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d ; $AB \cap OH = F$ ta có:

Tam giác $OF.OH = OE.OM$ (tính chất tứ giác nội tiếp)

$$= OB^2 = R^2 \Rightarrow OF = \frac{R^2}{OH} = 1$$

Ta có $H(-4;0)$, $OF = \frac{1}{4}OH \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OH} = (-1;0)$

$\Rightarrow F(-1;0)$ hay đường thẳng AB luôn đi qua điểm $F(-1;0)$ cố định khi M di chuyển trên đường thẳng d

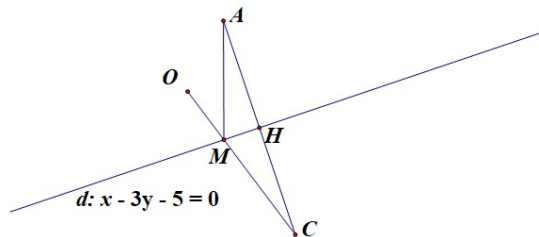
Cách 2: Đường thẳng AB là trục đẳng phương của hai đường tròn đường tròn (ξ) và đường tròn đường kính AB ,

Ta có $M \in d \Rightarrow M(-4;m)$ từ đó ta có phương trình AB

$$x^2 + y^2 - 4 = x(x+4) + y(y-m) \Leftrightarrow 4x - my + 4 = 0$$

Đường thẳng này luôn đi qua điểm cố định $F(-1;0)$, bài toán hoàn thành.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng $d: x - 3y - 5 = 0$, điểm $A(1;2), O(0;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $MA + MO$ nhỏ nhất.



Phân tích: Theo cách nghĩ thông thường ta sẽ gọi M thuộc đường thẳng d

dùng công thức khoảng cách tính $MA + MO$ sau đó đi tìm giá trị nhỏ nhất.

Nếu sáng tạo hơn trong suy nghĩ, ta thấy hai điểm A, O nằm cùng phía với đường thẳng d , từ đó gọi C là điểm đối xứng với A qua d khi đó ta có:

$$MA + MO = MO + MC \geq OC$$

“dấu bằng xảy ra khi O, M, C thẳng hàng hay $M = OC \cap d$ ”

Trong việc tìm điểm C đối xứng với A qua d ta có 3 cách làm với 3 cách nhìn khác nhau.

+ **Cách 1:** Viết phương trình đường thẳng AC , tìm giao điểm sau đó suy ra tọa độ điểm C .

+ **Cách 2:** Tìm tọa độ hình chiếu của A lên d là H nhờ biết H nằm trên d và $AH \perp d$, từ đó có tọa độ điểm C nhờ H là trung điểm AC .

+ **Cách 3:** Gọi C đối xứng với A qua d khi đó có hai yếu tố tìm tọa độ C là $AC \perp d$, trung điểm AC nằm trên d .

Ta tiến hành giải bài toán trên.

Cách 1:

$$M \in d \Rightarrow M(3m+5; m)$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } MA + MO &= \sqrt{(3m+4)^2 + (m-2)^2} + \sqrt{(3m+5)^2 + m^2} \\ &= \sqrt{10m^2 + 20m + 20} + \sqrt{10m^2 + 30m + 25} \end{aligned}$$

Ta có

$$\sqrt{10m^2 + 20m + 20} + \sqrt{10m^2 + 30m + 25} = \sqrt{10} \left(\sqrt{m^2 + 2m + 2} + \sqrt{m^2 + 3m + \frac{5}{2}} \right)$$

$$\sqrt{m^2 + 2m + 2} + \sqrt{m^2 + 3m + \frac{5}{2}} = \sqrt{(m+1)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{3}{2} + m\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\text{Xét điểm } P(-1; 1), Q\left(\frac{-3}{2}; \frac{-1}{2}\right); N(m; 0)$$

$$\text{Khi đó } PN + NQ = \sqrt{(m+1)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{3}{2} + m\right)^2 + \frac{1}{4}} \geq PQ = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{“dấu bằng xảy ra khi } m = \frac{-4}{3} \text{” . Khi đó điểm } M\left(1; \frac{-4}{3}\right).$$

Cách 2:

Xét $F(x, y) = x - 3y - 5$ Ta có $F(0, 0) \cdot F(1, 2) = 50 > 0$ suy ra hai điểm A, O nằm cùng phía với đường thẳng d ,

Gọi C là điểm đối xứng với A qua d khi đó ta có

$$MA + MO = MO + MC \geq OC$$

“dấu bằng xảy ra khi A, M, C thẳng hàng hay $M = AC \cap d$ ”

Trong việc tìm điểm C đối xứng với A qua d ta có 3 cách làm với 3 cách nhìn khác nhau

Lời giải:

+ Cách 1:

Viết phương trình đường thẳng AC , tìm giao điểm của AC và d sau đó suy ra tọa độ điểm C .

Gọi Δ' là đường thẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d khi đó phương trình

$$\Delta': 3x + y - 5 = 0$$

Gọi $H = \Delta' \cap d$ khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow H(2; -1)$$

Do A và C đối xứng nhau qua đường thẳng d nên H là trung điểm của $AC \Rightarrow C(3; -4)$

+ **Cách 2:** Tìm tọa độ hình chiếu của A lên d là H nhờ biết H nằm trên d và $AH \perp d$, từ đó có tọa độ điểm C nhờ H là trung điểm AC .

$$H \in d \Rightarrow H(3a+5; a); \overrightarrow{AH} = (3a-4; a-2)$$

$$AH \perp d \Rightarrow \frac{3a-4}{1} = \frac{a-2}{-3} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow H(2; -1)$$

H là trung điểm của $AC \Rightarrow C(3; -4)$

+ **Cách 3:** Gọi $C(x; y)$, $AC \cap d = H$, C đối xứng với A qua d ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC}(x-1; y-2) \\ H\left(\frac{x+1}{2}; \frac{y+2}{2}\right) \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ H \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-1) + y - 2 = 0 \\ \frac{x+1}{2} - 3\frac{y+2}{2} - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow C(3; -4)$$

Khi đó $MA + MO = MO + MC \geq OC = 5$

“dấu bằng xảy ra khi O, M, C thẳng hàng hay $M = OC \cap d$ ”

Phương trình đường thẳng $OC: 4x + 3y = 0$. Tọa độ M là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(1; -\frac{4}{3}\right)$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng các đường thẳng d có phương trình (với t là tham số)
 $d: 2tx + (1-t^2)y + 1 + t^2 = 0$ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Phân tích:

Cách 1: Nếu giải bài toán theo cách thông thường ta gọi đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ bán kính R khi đó ta xét giao điểm của đường thẳng và đường tròn. Để đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn thì phương trình tọa độ giao điểm phải có nghiệm kép với mọi giá trị của t từ đó ta thu được a, b, R .

Cách 2: sử dụng điều kiện tiếp xúc của đường thẳng và đường tròn thay cho việc giải phương trình tọa độ giao điểm: có nghĩa là đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (C) khi $d(I, d) = R(\forall t)$.

Cách 3: Chú ý quan sát thì các hệ số $2t, 1-t^2, 1+t^2$ rất gần gũi với các công thức lượng giác biểu diễn $\sin x, \cos x, \tan x$ theo công thức $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ từ đó đặt $t = \tan \alpha$ ta có lời giải thứ 3 của bài toán. Ta đi giải bài toán theo ba cách trên

Lời giải:

Cách 1: Gọi đường tròn (C) tâm $I(a; b)$ bán kính R là đường tròn cố định luôn tiếp xúc với đường thẳng d ta có $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Ta có tọa độ giao điểm của đường thẳng và đường tròn là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2tx + (1-t^2)y + 1 + t^2 = 0 & (1) \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) ta có } x = \frac{1+t^2-(1-t^2)y}{2t} \text{ thế vào (2)} \Rightarrow \left(\frac{1+t^2-(1-t^2)y}{2t} - a \right)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+t^2-2at-(1-t^2)y}{2t} \right)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+t^2-2at-(1-t^2)y}{2t} \right)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow (1-t^2)^2 y^2 + 2y(1-t^2)(1-2at+t^2) + (1-2at+t^2)^2 + 4t^2(y^2 - 2by + b^2) = 4R^2 t^2$$

$$\Leftrightarrow (1+t^2)^2 y^2 + 2y[(1-t^2)(1-2at+t^2) + 4t^2] + (1-2at+t^2)^2 + 4t^2 b^2 + 4t^2 - 4R^2 t^2 = 0(*) (C)$$

là đường tròn cố định tiếp xúc với đường thẳng d khi đó phương trình (*) phải có nghiệm kép với mọi giá trị của t

$$\Leftrightarrow \Delta' = [(1-t^2)(1-2at+t^2) + 4t^2]^2 - (1+t^2)^2 [(1-2at+t^2)^2 + 4t^2 b^2 + 4t^2 - 4R^2 t^2] = 0, \forall t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \\ R = 1 \end{cases}$$

Nếu suy nghĩ theo cách đơn giản hơn thì do đường tròn cố định luôn tiếp xúc với đường thẳng d với mọi giá trị của t nên đường tròn đó phải tiếp xúc với 3 đường thẳng $y = -1; x = -1; 4x - 3y + 5 = 0$ là 3 cạnh của một tam giác dễ dàng tìm được tâm đường tròn nội

tiếp tam giác là điểm $O(0;0)$ và khi đó ta tính $d(O, d) = \frac{|2t \cdot 0 + (1-t^2) \cdot 0 + 1 + t^2|}{\sqrt{(2t)^2 + (1-t^2)^2}} = 1 \forall t$ từ đó ta

thấy họ đường thẳng luôn tiếp xúc với đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 1$.

Cách 2. Đường thẳng $d: 2tx + (1-t^2)y + 1 + t^2 = 0$ luôn tiếp xúc với đường tròn cố định

$(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ khi $d(I, d) = R, \forall t$ đặt $u = x-a; v = y-b \Rightarrow x = u+a; y = v+b$

khi đó đường tròn (C) trở thành đường tròn tâm O , đường thẳng

$d: 2au + (1-t^2)v + 2at + (1-b^2)t + 1 + t^2 = 0$ khi đó d là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow d(O, d) = R, \forall t$

$$\Leftrightarrow \frac{|2at + (1-t^2)b + 1 + t^2|}{\sqrt{(2t)^2 + (1-t^2)^2}} = R$$

$$\Leftrightarrow (1-b)^2 + (2at)^2 + (1+b)^2 + 4a(1-b)t^3 + 2(1-b^2)t^2 + 4a(1+b)t = R^2(1+t^2)^2, \forall t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-b)^2 = R^2 \\ 4a(1-b) = 0 \\ 4a^2 + 2(1-b^2) = 2R^2 \\ (1+b)^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \\ R = 1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra đường thẳng d luôn tiếp xúc với đường tròn có định tâm $O(0;0)$ bán kính $R=1$.

Cách 3. Chú ý quan sát thì các hệ số $2t, 1-t^2; 1+t^2$ rất gần gũi với các công thức lượng giác biểu diễn $\sin x, \cos x, \tan x$ theo công thức $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ từ đó đặt $t = \tan \alpha$ ta có lời giải thứ 3 của bài toán.

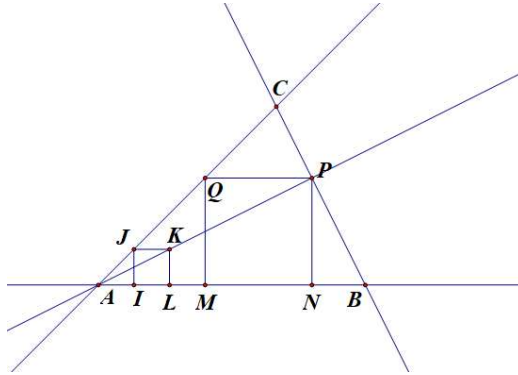
$$2tx + (1-t^2)y + 1+t^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2t}{1+t^2}x + \frac{1-t^2}{1+t^2}y + 1 = 0.$$

Đặt $t = \tan \alpha$ ta có $x \cdot \sin 2\alpha + y \cdot \cos 2\alpha + 1 = 0$.

Các đường thẳng này luôn tiếp xúc với đường tròn tâm $I(a;b)$ khi và chỉ khi $\frac{|a \sin 2\alpha + b \cos 2\alpha + 1|}{1} = R, \forall \alpha$ điều này chỉ xảy ra khi $a = b = 0$ khi đó $R = 1$

Từ đó suy ra đường thẳng d luôn tiếp xúc với đường tròn có định tâm $O(0;0)$ bán kính $R=1$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa các cạnh lần lượt là $AB: y=1, AC: x-y+3=0; BC: 2x+y-12=0$. Tìm tọa độ các điểm M, N nằm trên cạnh AB , Q nằm trên cạnh AC , P nằm trên cạnh BC sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.



Phân tích.

Cách 1. Theo cách nghĩ thông thường ta sử dụng phương pháp tọa độ hóa gọi điểm M nằm trên đường thẳng AB sau đó viết phương trình đường thẳng MQ biết tọa độ M và có quan hệ vuông góc với đường thẳng BC . Sau đó tìm tọa độ Q là giao điểm của QM với đường thẳng AC , từ đó viết được phương trình đường thẳng PQ đi qua điểm Q và song song với BC . Tìm tọa độ P là giao điểm của PQ và BC . Do tứ giác $MNPQ$ là hình vuông nên ta có $MQ = PQ$ rồi tìm tọa độ các điểm còn lại.

Cách 2: Dễ dàng tìm được 4 điểm $IJKL$ có tọa độ là 4 đỉnh của hình vuông với $I, L \in BC$, $J \in AC$ để tứ giác $IJKL$ là hình vuông (lấy $I \in BC$, J, L lần lượt sẽ là giao điểm của đường tròn tâm I bán kính IA với đường thẳng AC, AB) khi đó ta có tam giác ΔAIJ và tam giác ΔACP đồng dạng, từ đó ta có ba điểm A, K, P thẳng hàng. Từ đó bài toán được giải quyết.

Lời giải

Cách 1. Dễ thấy $A(-2;1), B\left(\frac{11}{2};1\right), C(6;3)$.

Do $M \in BC \Rightarrow M(m;1) \left(m \in \left(-2; \frac{11}{2}\right) \right)$. Đường thẳng MQ vuông góc với đường thẳng AB

nên phương trình đường thẳng $MQ: x - m = 0$.

$Q = MQ \cap AC \Rightarrow$ tọa độ Q thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = m \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = m + 3 \end{cases} \Rightarrow Q(m; m + 3).$$

Đường thẳng PQ song song với đường thẳng BC nên đường thẳng PQ có phương trình $y = m + 3$.

$P = PQ \cap BC \Rightarrow$ tọa độ P thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = m + 3 \\ 2x + y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m + 3 \\ x = \frac{9 - m}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{9 - m}{2}; m + 3\right).$$

Do tứ giác $MNPQ$ là hình vuông nên ta có $MQ = PQ \Leftrightarrow MQ^2 = PQ^2$

$$\Leftrightarrow (m + 2)^2 = \left(\frac{9 - 3m}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 5m^2 - 70m + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{64}{5} \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

Từ đó ta có $M(1;1); P(1;4), Q(4;4), N(4;1)$.

Cách 2. Chọn tứ giác $IJKL$ với $I(-1;0), L(0;0), J(-1;2), K(0;1)$ khi đó $I, L \in BC, I \in AC$ để tứ giác $IJKL$ là hình vuông. Do hai tam giác $\triangle AIJ$ và tam giác $\triangle ACP$ đồng dạng nên A, K, P hay $P = AK \cap BC$. Phương trình $AK: x - 4y - 4 = 0$.

$P = AK \cap BC \Rightarrow$ tọa độ P thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 4y + 4 = 0 \\ 2x + y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow P(4;4). \text{ Từ đó ta có } M(1;1); P(1;4), Q(4;4), N(4;1).$$

2. Một số ví dụ sử dụng hình học tọa độ để làm các bài toán đại số.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3xy - 10y = 3(1) \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2} = 5(2) \end{cases}$$

Nhận xét nhìn phương trình (1) có thể rút được ẩn y theo ẩn x rồi thế vào phương trình (2) khi đó bài toán quy về việc giải phương trình một ẩn nhưng sẽ rất phức tạp, nếu quan sát từ phương trình (2) ta nhận thấy đây là hai công thức khoảng cách trong hình học tọa độ, điều

đặc biệt trong bài toán này là sử dụng được bất đẳng thức trong tam giác nên lời giải theo cách 2 dễ dàng hơn.

Giải: Gọi $A(2;4), B(5;8), M(x;y)$ khi đó ta có $MA = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}$,

$MB = \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2}$, $AB = 5$, với ba điểm A, M, B tùy ý ta luôn có $MA + MB \geq AB = 5$

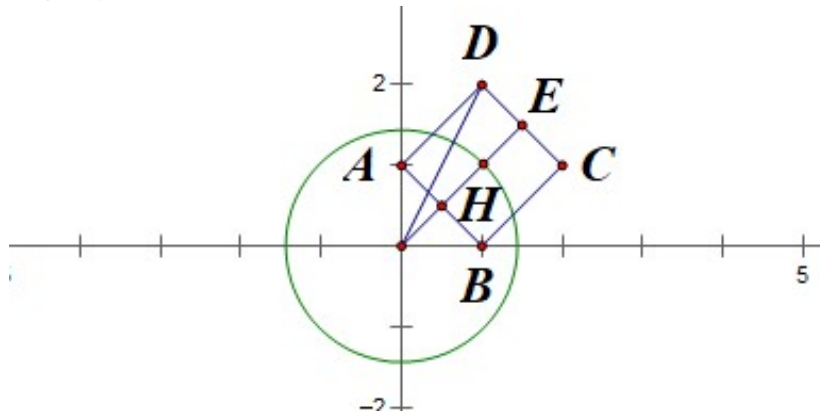
dấu bằng xảy ra khi $\frac{x-2}{x-5} = \frac{y-4}{y-8} \Leftrightarrow 4x - 3y + 4 = 0$ từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 4 = 0 \\ 3xy - 10y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = 6 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Tìm a để hệ phương trình $\begin{cases} |x-1| + |y-1| = 1(1) \\ x^2 + y^2 = a(2) \end{cases}$ có nhiều nghiệm nhất.

Phân tích:

Nếu nhìn bài toán dưới góc độ đại số ta có thể dùng định nghĩa giá trị tuyệt đối trong 4 trường hợp rồi giải biện luận hệ phương trình, nhưng khi đó bài toán trở lên phức tạp quan sát dưới góc độ hình học ta thấy phương trình (1) là biểu diễn 4 cạnh của hình vuông, phương trình (2) là biểu diễn của đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{a}$ nếu $a > 0$. Khi đó yêu cầu bài toán sẽ trở thành quan sát khi nào thì đường tròn và hình vuông sẽ có nhiều giao điểm nhất, ta đi giải bài toán theo hướng này.



Lời giải:

Khi $a \leq 0$ hệ phương trình vô nghiệm.

Khi $a > 0$ phương trình (2) là biểu diễn của đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{a}$

Từ phương trình (1) phá dấu giá trị tuyệt đối ta thu được phương trình bốn đoạn thẳng tạo thành hình vuông $ABCD$, Khi đó yêu cầu bài toán sẽ trở thành quan sát khi nào thì đường tròn và hình vuông sẽ có nhiều giao điểm nhất.

Quan sát hình vẽ ta thấy hệ phương trình có nhiều nghiệm nhất khi

$$OH < R < OD \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2} < a < \sqrt{5}.$$

Ví dụ 3: (thpt quốc gia 2003 khối A):

Cho: $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$ Chứng minh rằng $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$.

Đặt $\vec{u} = \left(\frac{1}{x} - x; \sqrt{2}\right); \vec{v} = \left(\frac{1}{y} - y; \sqrt{2}\right); \vec{w} = \left(\frac{1}{z} - z; \sqrt{2}\right)$.

Khi đó $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} = |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| \geq \sqrt{82}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ cùng phương $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 4: Cho 4 số thực a, d, c, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 5$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5 - a - 2b} + \sqrt{5 - c - 2d} + \sqrt{5 - ac - bd} \leq \frac{3\sqrt{30}}{2}.$$

Lời giải: Xét các điểm $M(a, b), N(c, d)$ ta thấy hai điểm M, N nằm trên đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{5}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{(a-1)^2 + (b-2)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(c-1)^2 + (d-2)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{2}} \leq \frac{3\sqrt{30}}{2}$$

$$\Leftrightarrow MP + PN + MN \leq 3\sqrt{15}$$

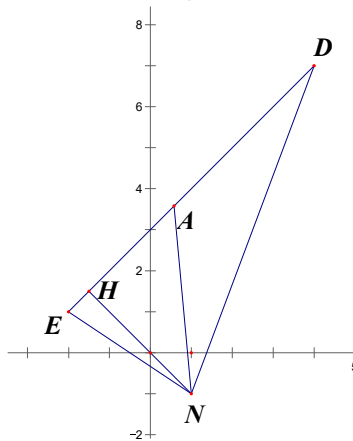
$$\Leftrightarrow \sin \widehat{NMP} + \sin \widehat{MNP} + \sin \widehat{PNM} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ luôn đúng, dấu bằng xảy ra khi tam giác MNP đều.}$$

3. Vận dụng phương pháp tọa độ trong mặt phẳng ở một số bài toán về cực trị về modul của số phức.

Việc tìm một số phức trong chương trình thpt có thể quy về tìm tọa độ của điểm biểu diễn số phức đó trên mặt phẳng, từ đó ta có thể vận dụng một số bài toán của hình học để tìm lời giải cho bài toán liên quan đến số phức.

Ví dụ 1: Xét số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $P = |z - 1 + i|$. (Đề Tham Khảo 2017).

Lời giải:



Phân tích: Gọi $A(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức khi đó $|z + 2 - i| = AE, E(-2; 1), |z - 4 - 7i| = AF, F(4; 7)$ và $EF = 6\sqrt{2}$ ta thấy $AE + AF = 6\sqrt{2} = EF$ và $P = |z - 1 + i| = AN, N(1; -1)$ Từ đó ta có thể giải bài toán này nhờ phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức z , $E(-2; 1)$, $F(4; 7)$ và $N(1; -1)$.

Từ $AE + AF = |z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$ và $EF = 6\sqrt{2}$ nên ta có A thuộc đoạn thẳng EF .

Gọi H là hình chiếu của N lên EF , ta có $H\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

$$\text{Suy ra } P = NH + NF = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}.$$

Ví dụ 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 2 - 2i|$.

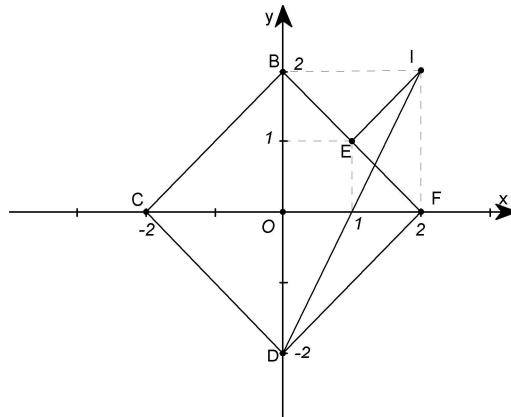
Nhận xét. Ta thấy nếu gọi $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ khi đó $z + \bar{z} = 2x; z - \bar{z} = 2yi$

Và $|z + \bar{z}| = 2|x|, |z - \bar{z}| = 2|y|$ khi đó tập hợp các điểm $N(x; y)$ biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$ có mối liên hệ giữa x, y là $|x| + |y| = 2$ nằm trên 1 hình vuông. Xét điểm $I(2; 2)$ khi đó $P = NI$ với N thuộc cạnh của hình vuông, nên ta có thể giải bài tập này nhờ phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

Lời giải:

Giả sử: $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow N(x; y)$: điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Ta có: $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow |x| + |y| = 2 \Rightarrow N$ thuộc các cạnh của hình vuông $BCDF$ (hình vẽ).



$$\bullet P = |z - 2 - 2i| \Rightarrow P = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2} \Rightarrow P = d(I; N) \text{ với } I(2; 2).$$

Từ hình ta có: $E(1; 1)$.

$$M = P_{\max} = ID = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ và } m = P_{\min} = IE = \sqrt{(2 - 1)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}.$$

Vậy. $P_{\max} = 2\sqrt{5}$ $P_{\min} = \sqrt{2}$.

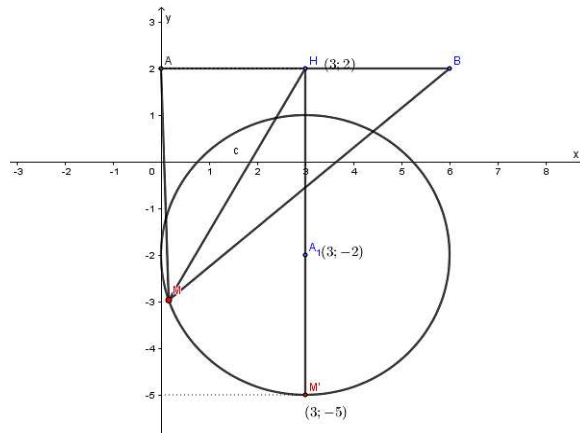
Ví dụ 3: Xét các số phức w, z thỏa mãn $|w+i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2+i)(z-4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-2i| + |z-6-2i|$.

Phân tích:

Ta có: $5w = (2+i)(z-4)$ thay $|w+i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ta có $|z-3+2i| = 3$ từ đó ta thấy tập hợp điểm

M biểu diễn số phức z nằm trên 1 đường tròn

$P = |z-2i| + |z-6-2i| = MA + MB, A(0;2), B(6;2)$. Từ đó ta có thể sử dụng phương pháp tọa độ trong mặt phẳng để giải bài toán trên.



Lời giải:

Ta có: $5w = (2+i)(z-4) \Rightarrow w = \frac{(2+i)(z-4)}{5}$ thay vào $|w+i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ta có

$$\Rightarrow \left| \frac{(2+i)(z-4)}{5} + i \right| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{(2+i)}{5} \left(z - 4 + \frac{5i}{2+i} \right) \right| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\Leftrightarrow |z-3+2i| = 3.$$

Khi đó $P = |z-2i| + |z-6-2i| = MA + MB, A(0;2), B(6;2)$

$$P = MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{2\left(2MH^2 + \frac{AB^2}{2}\right)} = \sqrt{4MH^2 + AB^2}.$$

Do AB cố định nên P lớn nhất khi MH lớn nhất với H là trung điểm của AB . Suy ra, MH^2 đạt giá trị lớn nhất khi $M \equiv M' \Rightarrow P^2 \leq 232 \Rightarrow P = 2\sqrt{58}$.

Ví dụ 4. Xét các số phức z_1 thỏa mãn $|z_1-2|^2 - |z_1+i|^2 = 1$ và các số phức z_2 thỏa $|z_2-4-i| = \sqrt{5}$. Tính trị nhỏ nhất của $P = |z_1 - z_2|$.

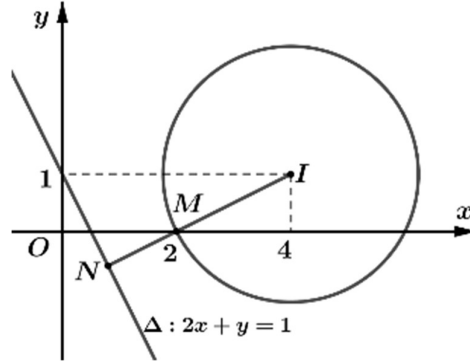
Lời giải:

Ta có: $|z_1 - 2|^2 - |z_1 + i|^2 = 1 \Leftrightarrow [(x-2)^2 + y^2] - [x^2 + (y+1)^2] = 1$

$\Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0 \Rightarrow$ Tập hợp biểu diễn số phức z_1 là đường thẳng d .

Ta lại có: $|z_2 - 4 - i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-4) + (y-1)i| = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5$ Tập hợp biểu diễn z_2 là đường tròn (C) có tâm $I(4;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.



Khi đó $|z_1 - z_2|$ là khoảng cách từ 1 điểm thuộc d đến 1 điểm thuộc (C) .

Suy ra: $P_{\min} = MN = |d[I, \Delta] - R| = \left| \frac{8}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} \right| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 5. Cho hai số phức u, v thỏa mãn $3|u - 6i| + 3|u - 1 - 3i| = 5\sqrt{10}$, $|v - 1 + 2i| = |\bar{v} + i|$ Tìm trị nhỏ nhất của $P = |u - v|$.

Phân tích:

Gọi M là điểm biểu diễn số phức u ta có :

$$MA + MB = \frac{5\sqrt{10}}{3} > AB \quad \text{với } A(0;6), B(1;3).$$

$\Rightarrow M$ thuộc Elip có: A, B là các tiêu điểm, độ dài trục lớn.

$$AB = 2a = \frac{5\sqrt{10}}{3} \rightarrow a = \frac{5\sqrt{10}}{6}.$$

Phương trình đường thẳng AB : $3x + y = 6$.

Gọi N là điểm biểu diễn số phức v :

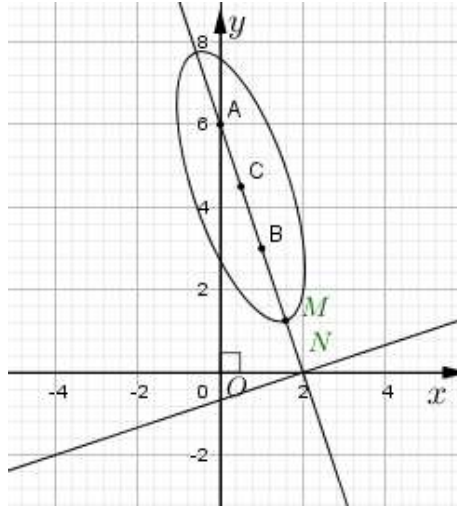
$$|v - 1 + 2i| = |\bar{v} + i| \Leftrightarrow |(x-1) + (y+2)i| = |x + (1-y)i|$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = x^2 + (1-y)^2 \Leftrightarrow x - 3y = 2$$

$$P = |u - v| = MN.$$

Nên bài toán trên có thể giải bằng phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

Lời giải:



Bài toán trở thành tìm M thuộc elip, N thuộc đường thẳng $x - 3y = 2$ để MN nhỏ nhất. Để MN nhỏ nhất thì M, N có vị trí như hình vẽ.

$$\text{Ta có: } MA + MB = \frac{5\sqrt{10}}{3}, MA - MB = AB = \sqrt{10} \Rightarrow MA = \frac{4\sqrt{10}}{3}.$$

$$A(0;6), N(2;0) \Rightarrow NA = 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Suy ra: } MN = NA - MA = 2\sqrt{10} - \frac{4\sqrt{10}}{3} = \frac{2\sqrt{10}}{3}.$$

$$\text{Từ đó ta có giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là: } \frac{2\sqrt{10}}{3}.$$

Biện pháp 3: Phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh bằng cách tạo cơ hội cho học sinh phát triển, mở rộng bài toán.

Ví dụ gốc 1: Trong hệ tọa độ Oxy đường thẳng d và điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt trục tọa độ Ox tại A cắt d tại B sao cho $OA : OB = 2 : 1$.

Bước 1:

Giáo viên: nêu câu hỏi với học sinh là bài toán cho cái gì? Hỏi cái gì?

Học sinh: Bài toán cho đường thẳng d , cho $P \in AB$ và $OA : OB = 2 : 1$.

Bước 2: Lập kế hoạch giải bài toán.

Cách 1: Gọi $A(a;0), B(b;2b)$, ba điểm A, B, P thẳng hàng từ đó tìm được tọa độ hai điểm A, B .

Cách 2: Gọi véc tơ pháp tuyến của đường thẳng cần tìm là $\vec{n}(a;b)$.

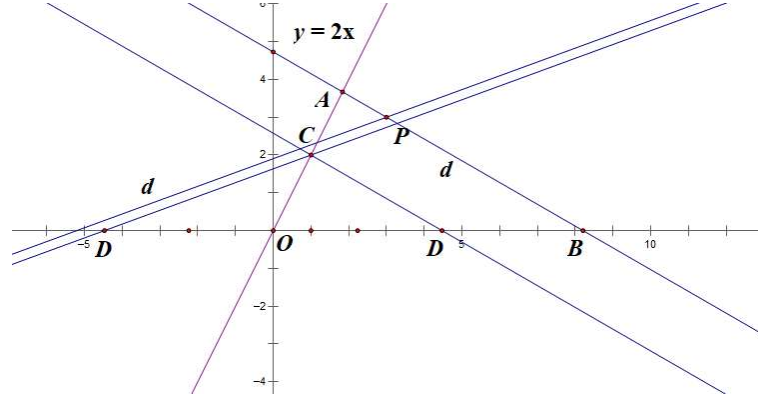
Do đường thẳng d qua P từ đó ta có $d : a(x-3) + b(y-3) = 0$.

Tìm giao điểm của $d \cap Ox = A$, $d \cap Oy = B$ và giải điều kiện $OA = 2OB$ để tìm mối liên hệ giữa hai đại lượng a, b .

Cách 3: Lấy $C(1;2) \in d$, ta đi tìm $D \in Ox$ thỏa mãn $OD : OC = 2 : 1$.

$$\Rightarrow OD = 2OC = 2\sqrt{5} \Rightarrow \begin{bmatrix} D(2\sqrt{5};0) \\ D(-2\sqrt{5};0) \end{bmatrix}.$$

Nhận thấy đường thẳng d luôn đi qua P nhận $\overrightarrow{CD}$ là véc tơ chỉ phương:



Trường hợp 1: $D(2\sqrt{5};0)$ ta có $\overrightarrow{CD}(2\sqrt{5}-1;-2) \Rightarrow \vec{n}(2;2\sqrt{5}-1)$ là véc tơ pháp tuyến của d . Ta có phương trình đường thẳng $d: 2(x-3) + (2\sqrt{5}-1)(y-3) = 0$.

$$\Leftrightarrow 2x + (2\sqrt{5}-1)y - 3 + 6\sqrt{5} = 0.$$

Trường hợp 2: $D(-2\sqrt{5};0) \Rightarrow \overrightarrow{CD}(-2\sqrt{5}-1;-2) \Rightarrow \vec{n}(2;-2\sqrt{5}-1)$ là véc tơ pháp tuyến của d . Ta có phương trình đường thẳng $d: 2(x-3) - (2\sqrt{5}+1)(y-3) = 0$.

$$\Leftrightarrow 2x - (2\sqrt{5}+1)y - 9 - 6\sqrt{5} = 0.$$

Nhìn lại cách giải 3 của bài toán ta có thể mở rộng ví dụ gốc thành các bài tập sau:

Bài tập 1. Trong hệ tọa độ Oxy đường thẳng d và điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai trục tọa độ Ox tại A cắt d tại B sao cho $OA:OB = p:q$ với p, q là một cặp số bất kỳ.

Cách giải: như cách 3.

Bài tập 2. Trong hệ tọa độ Oxy đường thẳng d và điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai trục tọa độ Ox tại A cắt d tại B sao cho $OA+OB = c$ với p, q là một cặp số cùng dấu bất kỳ.

$$\text{Cách giải: } OA+OB = c \Rightarrow OA = p \Rightarrow OB = c-p \Rightarrow OA:OB = p:(c-p).$$

Bài tập 3. Trong hệ tọa độ Oxy đường thẳng d và điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai trục tọa độ Ox tại A cắt d tại B sao cho $OA.OB = c$ với p, q là một cặp số cùng dấu bất kỳ.

$$\text{Cách giải: } OA.OB = c \Rightarrow OA = p \Rightarrow OB = \frac{c}{p} \Rightarrow OA:OB = \frac{pq}{c}.$$

Bài tập 4. Trong hệ tọa độ Oxy đường thẳng d và điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai trục tọa độ Ox tại A cắt d tại B thoả mãn diện tích tam giác $OAB = p$.

Cách giải: Ta có góc của đường thẳng d và trục hoành là $\alpha : \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\text{nên } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} OA \cdot OB \Rightarrow OA \cdot OB = \sqrt{5} p.$$

Bài tập 5. Trong hệ tọa độ Oxy đường thẳng d và điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai trục tọa độ Ox tại A cắt d tại B thoả mãn tam giác OAB vuông tại B .

Cách giải: ta có α là góc của d và $Ox : \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow OB = \cos \alpha \cdot OA$

Đặc biệt hóa ví dụ góc 1 cho d là Oy ta có:

Ví dụ góc 2: Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại A và B với A, B không trùng O sao cho $OA : OB = 2 : 1$.

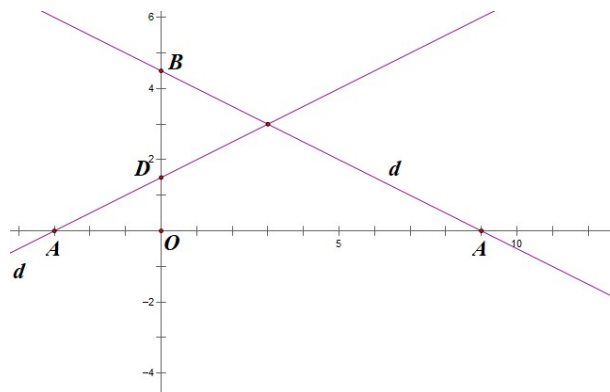
Bước 1: Giáo viên đặt câu hỏi cho học sinh bài toán cho gì, yêu cầu tìm gì?

Học sinh: Học sinh: Bài toán cho $A \in Ox, B \in Oy$ A, B không trùng O , cho $P \in AB$ và $OA : OB = 2 : 1$.

Bước 2: Lập kế hoạch giải bài toán.

Cách 1: Gọi α là góc của d với chiều dương trục hoành ta có $\tan \alpha = \frac{1}{2}$.

Từ đó phương trình đường thẳng $d : y = \pm \frac{1}{2}(x-3) + 3$.



Từ đó ta có các ví dụ có thể phát triển từ vd số 1 đến số 4 tương tự bài toán góc số 1.

Bài tập 1. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại A và B với A, B không trùng O sao cho $OA : OB = p : q$

Bài tập 2. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại A và B với A, B không trùng O sao cho $OA + OB = c$.

Bài tập 3. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại A và B sao cho $OA \cdot OB = c$.

Bài tập 4. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB là p .

Cách 2: $A(a;0), B(0,b)$ khi đó phương trình $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \frac{3}{a} + \frac{3}{b} = 1; |a| = 2|b|$

Hướng nhìn số 2: P là điểm cố định của đường thẳng d nên ta có thể hướng dẫn học sinh nhìn một số bài toán cực trị qua việc kết hợp với một số bất đẳng thức cơ bản.

Bài tập 1. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại A và B với A, B không trùng O sao cho khoảng cách từ O đến d là nhỏ nhất.

Cách làm: Khi đó $d(O, d) = OP$ hay $\overline{OP}$ chính là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng d .

Bài tập 2. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai tia Ox, Oy tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB nhỏ nhất.

Cách giải.

Ta có $OA = a, OB = b (a, b > 0)$, $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} a \cdot b$.

Ta có $1 = \frac{3}{a} + \frac{3}{b} \geq 6\sqrt{\frac{1}{ab}} \Rightarrow ab \geq 36$ dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

Bài tập 3. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai tia Ox, Oy tại A và B sao cho chu vi tam giác OAB nhỏ nhất.

Cách giải:

$$OA + OB + AB = OA + OB + \sqrt{OA^2 + OB^2} \geq 2\sqrt{OA \cdot OB} + \sqrt{2OA \cdot OB}.$$

Bài tập 4. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $P(3;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm P cắt hai tia Ox, Oy tại A và B sao cho $OA + OB$ nhỏ nhất.

Cách giải:

$$OA + OB = a + b = \left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b}\right)(a + b) = 9 + \frac{3b}{a} + \frac{3a}{b} \geq 15.$$

IV. Kết quả đạt được.

* Đối với học sinh:

- Học sinh yêu thích môn toán hơn vì biết tự khám phá và tư duy những bài tập mới mà học sinh cho là khó. Biết tư duy logic và liên kết các kiến thức với nhau để giải bài toán theo nhiều hướng khác nhau.

- Học sinh tương tác tốt và rất hứng thú với những bài toán liên quan đến hình học. Đặc biệt là hình học làm bằng phương pháp tọa độ.

- Học sinh biết cách phân tích và định hướng cách làm từ bài thứ 2 trở đi. Biết cách phân tích đầu bài và đặt các câu hỏi để dẫn dắt hướng đi cho bài làm. Tạo ra thói quen tốt khi giải toán, điều mà trước đây phần lớn học sinh chưa làm được.

- Học sinh biết cách đặt các câu hỏi ngược để dẫn dắt giải quyết các bài toán, hạn chế cách làm bài dập khuôn máy móc.

*** Đối với giáo viên**

- Tạo ra một hướng mới trong dạy học phát triển tư duy cho học sinh, làm thay đổi thói quen dạy học thụ động. Giáo viên có điều kiện phát huy năng lực của bản thân và có hướng mở rộng nhiều chuyên đề khác. Tạo cảm hứng trong dạy và học.

- Sáng kiến kinh nghiệm là một tài liệu tham khảo tốt cho đồng nghiệp. Do có sự đóng góp ý kiến của đồng nghiệp, quá trình trao đổi chuyên môn giúp đồng nghiệp gắn kết hơn. Làm phong phú tài liệu tham khảo cho tổ chuyên môn.

*** Kết quả đạt được của học sinh:**

1. Thi học sinh giỏi năm 2021-2022: 3/3 học sinh thi HSG cấp Thành Phố đạt giải khuyến khích.

2. Thi học sinh giỏi năm 2020-2021: 5/5 học sinh thi HSG cấp Cụm đạt giải Nhất, nhì ba.

3. Áp dụng cho phần các câu hỏi vận dụng vận dụng cao trong kì thi THPT Quốc Gia đem lại sự hứng thú và yêu thích môn toán cho các học sinh lớp 12

2. Kết quả áp dụng đối với lớp 11A1 và 11A6:

- **Kết quả khảo sát hứng thú của học sinh sau khi áp dụng SKKN:**

- **Kết quả khảo sát thông qua bài kiểm tra 30 phút.**

Kết quả	Mức độ hiểu bài			Mức độ yêu thích môn toán		
	Hiểu và biết cách vận dụng	Hiểu nhưng chưa biết cách vận dụng	Không hiểu bài	Rất yêu thích	Bình thường	Chưa có hứng thú
Tỉ lệ	44%	27%	29%	53%	18%	29%

C. Phần kết luận và khuyến nghị

Kết luận và đánh giá cơ bản.

Sau khi tổ chức dạy học theo phương pháp đề xuất trên ở các lớp 10A1 n=45 học sinh, lớp 10A1 n=50 học sinh, lớp 10A6 n=49 học sinh (HS)

Qua các số liệu trên ta thấy khi dạy học sinh có cái nhìn khái quát hoá dạng toán cực trị học sinh hiểu bài và vận dụng làm bài tập tốt hơn, điển hình là đầu điểm cao cũng nhiều hơn.

Nội dung của SKKN này được tác giả vui công nghiên cứu trao đổi thông qua quá trình học cao học, giảng dạy tại trường THPT Yên Lãng và sự trao đổi giúp đỡ của đồng nghiệp ban bè, sử dụng một số kiến thức toán học cao cấp như giải tích lồi, các phương pháp tìm cực trị của

hàm nhiều biến được ứng dụng vào giải toán THPT và kiến thức toán học sơ cấp. Và đã mang lại một số kết quả tích cực đáng khích lệ.

Nội dung của sáng kiến kinh nghiệm đã trình bày một cách có hệ thống kiến thức cụ thể chi tiết những dạng toán cơ bản về các phương pháp tìm cực trị ở chương trình toán THPT.

Thông qua SKKN này học sinh đã tự tin hơn rất nhiều khi học toán từ đó tạo tính ham học, sáng tạo trong quá trình học và tư duy toán.

2. Khuyến nghị:

Cần nâng cao tư duy học toán của học sinh thông qua các phương pháp giải có tính hệ thống.

Cần giúp học sinh có các nhìn khái quát nhất thông qua các phương pháp giải, đưa ra các nhận xét có tính chính xác, phù hợp từ đó hình thành nên tính tự giác, tích cực, chủ động học tập của học sinh.

Cần xây dựng hệ thống các phương pháp giải, các dạng bài tập tương ứng.

Kiến thức trên chỉ được áp dụng cho học sinh khá giỏi. Giảng dạy ở các lớp mũi nhọn của trường.

SKKN này có thể được áp dụng rộng rãi để bồi dưỡng học sinh giỏi toán, luyện thi ĐH, CĐ.

Chúng ta đã biết các bài toán tìm cực trị là các bài toán rất phong phú và đa dạng. Đòi hỏi vận dụng kiến thức một cách linh hoạt vì vậy đây là nội dung rất đáng lo ngại của người học toán và làm toán. Trong SKKN này tôi đã đưa ra một số công cụ để giải quyết bài toán tìm cực trị của số phức. Mặc dù bài toán cực trị có rất nhiều phương pháp giải nhưng do khuôn khổ của SKKN và do năng lực của bản thân còn nhiều hạn chế nên SKKN của tôi vẫn chưa nêu hết được đầy đủ và hệ thống các phương pháp để giải chúng.

Tôi kính mong các đồng nghiệp đóng góp ý kiến để SKKN của tôi được hoàn thiện hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ban chấp hành TW Đảng cộng sản Việt Nam (2013), *Nghị quyết số 29*, NXB Chính trị QG, Hà Nội.
2. Hoàng Chúng (1991), *Rèn luyện khả năng sáng tạo toán học ở trường phổ thông*, NXB tp Hồ Chí Minh.
3. Trần Văn Đông và Bùi Văn Nghị (2016), *Khuyến khích tính sáng tạo của học sinh trong giải toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*, Tạp chí Giáo dục số đặc biệt, 12-2016, tr.163-166.
4. Vũ Dũng (2001), *Từ điển giáo dục học*, NXB Từ điển Bách khoa.
5. Nguyễn Văn Giao, Nguyễn Hữu Quỳnh, Vũ Văn Tảo, Bùi Hiền, *Từ điển giáo dục học*, NXB Từ điển Bách khoa.
6. Nguyễn Văn Hiến (2006), *Phát triển tư duy sáng tạo toán học cho học sinh giỏi ở trường THCS qua chủ đề bất đẳng thức hình học phẳng*, luận văn Thạc sĩ, trường ĐHSP HN ĐH Thái Nguyên
7. Nguyễn Bá Kim - Vương Dương Minh - Tôn Thân (1996), *Khuyến khích một số hoạt động trí tuệ của học sinh qua môn toán ở trường THCS*, Tạp chí Giáo dục số 14.
8. Nguyễn Bá Kim (2002), *Phương pháp dạy học môn Toán*. Nxb Đại học sư phạm.
9. Bùi Văn Nghị (2008), *Giáo trình phương pháp dạy học những nội dung cụ thể môn Toán*. Nxb Đại học sư phạm.
10. Bùi Văn Nghị (2009), *Vận dụng lí luận vào thực tiễn dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm.
11. Đề THPTQG các năm của BGD
12. Đề thi thử THPT Quốc gia của các trường và các SGD trên toàn quốc